**Дневник**

Quod sentimus loquamur,
quod loquimur sentiamus!

# VEcordia

## Извлечение R-KLINE1

Открыто: 2009.11.17 21:45
Закрыто: 2012.03.20 15:46
Версия: 2018.02.24 14:15

**ISBN 9984-9395-5-3**
Дневник «VECORDIA»

**ISBN**
Моррис Клайн. «Математика». Ч. 1-я



**Обложка той книги, с которой засканирован этот текст**

Моррис Клайн

# Утрата Определенности

Часть I (главы I–V)
Перевод Ю.А. Данилова
Под ред. И.М. Яглома
С комментариями Валдиса Эгле

Impositum

Grīziņkalns 2018

Talis hominis fuit oratio,
qualis vita

## *Предисловие автора Векордии*

2009.11.18 13:16 среда

Книга «Математика: Утрата определенности» Морриса Клайна появилась в моей жизни в довольно драматический ее момент.

Летом 1978 года я, развивая дальше свою философскую систему, еще более интенсивно, чем в предыдущие годы, задумался над природой чисел и вообще математики, и именно тем летом я, наконец, понял ее – эту природу – до конца. Та система представлений, которая тогда родилась, позже получила название «Веданская теория» – и под таким именем она будет фигурировать в этом издании и вообще фигурирует в Векордии.

Книга Клайна вышла на английском языке в 1980 году; стало быть, в 1978 году, когда родилась Веданская теория, Клайн свою книгу еще только писал или начинал писать. Но всё дело в том, что Веданская теория как раз и представляла собой ответ на те вопросы, которые составляют основной стержень книги Клайна.

Потратив два с половиной года на письменное изложение Веданской теории и разработку некоторых нюансов, я 16 февраля 1981 года предъявил ее (в машинописном виде) ведущим представителям латвийской науки (добраться до представителей российской или вообще какой-нибудь иной, помимо латвийской, науки у меня не было ни сил, ни возможности).

К 1984 году этими представителями (латвийской «науки») Веданская теория была отвергнута – без серьезного ее рассмотрения и без выдвижения каких-либо аргументов против нее. (Основными мотивами отвержения были обычные: ополчение людей, считавших себя «профессионалами», против «аутсайдера»; зависть к успехам соплеменника и нежелание их признавать; желание защитить свою привычную научную «кормушку» и т.п.).

И вот, в этот драматический момент на полках отечественных книжных магазинов появился русский перевод книги Клайна, в которой с невиданной до тех пор яркостью выдвигались те проблемы, которые Веданская теория уже решила.

Я тогда купил два экземпляра этой книги: один для себя, а второй подарил (на Рождество 1984 года) главе моих противников – преподавателю Латвийского государственного университета, тогда кандидату ф.-м. наук Карлису Подниексу, в его экземпляре отметив красными чернилами множество цитат и вписав дарственную надпись с эпиграфом: «*Смири гордыню, математик!*».

(Это, правда, не помогло: латвийские «ученые» ополчились не только против меня, но и против Клайна).

Много «воды утекло» с тех пор. Десятилетиями я боролся за признание Веданской теории (даже не за признание, а за то, чтобы она была просто вообще рассмотрена). Я использовал каждый подвернувшийся шанс, но эти шансы были ничтожными. (Что может сделать человек, имеющий на руках только несколько экземпляров бумаг, отпечатанных на пишущей машинке, и не имеющий совершенно никакой поддержки абсолютно нигде, а только презираемый и высмеиваемый «профессионалами науки»?).

Здесь не место перечислять всё то, что я предпринимал, пытаясь добиться рассмотрения Веданской теории «официальной наукой». Достаточно сказать, что в 2003 году по указанию лично Президента Латвийской Республики против меня почти было возбуждено уголовное дело латвийской Полицией безопасности (это вместо того, чтобы просто рассмотреть Веданскую теорию и дать о ней какое-нибудь аргументированное заключение: всю абсурдность этой ситуации трудно даже себе вообразить!).

Положение изменилось только в 2008 году (спустя 30 лет после создания Веданской теории!), когда бесплатные средства Интернета достигли такого уровня, что и мои, посвященные математике и поэтому «неплоские» тексты стало возможно разместить в Интернете и сделать тем самым доступными широкой публике во всем мире. Только теперь у Веданской теории появилась возможность выйти на Российскую (и вообще мировую русскоязычную) аудиторию, обойдя ту стену замалчивания, затаптывания, презрения и ненависти, которую ей в течение тридцати лет создавала та смесь провинциальной ограниченности и мелочного завистливого эгоизма, которая всё это время руководила латвийскими псевдоучеными.

С 2008 года материалы по Веданской теории постепенно публикуются в Интернете, и публикация книги Клайна с моими комментариями (разумеется, в духе Веданской теории) представляет собой одно мероприятие из этого направления.

В настоящем издании (книги Клайна) я, разумеется, не могу дать систематическое изложение Веданской теории. Но несколько слов о ее сущности, пожалуй, следует сказать, чтобы эту книгу (с ее комментариями) можно было читать более менее независимо от остальных материалов по Веданской теории.

Сущность Веданской теории состоит в том, что в ней человеческая психика рассматривается как деятельность (работа) системы обработки информации или, иными словами, биологического компьютера. Сама по себе эта идея не нова и часто фигурировала, начиная с «эры кибернетики» в 1950-х годах. Оригинальным (отсутствующим в других теориях и системах взглядов) моментом Веданской теории является то, что она не останавливается на этой общей декларации и начинает разбирать эту систему обработки информации («операционную систему») в терминах абстрактного программирования.

То есть, мы начинаем предполагать в этой операционной системе наличие определенных (выделенных нами) программ (или функциональных блоков), выполняющих вполне конкретную работу; мы начинаем рассуждать об этих программах так, как вообще рассуждают программисты о своих (или чужих) программах: не интересуясь конкретными носителями их и местоположением программ в памяти компьютера, а занимаясь их входной информацией, выходными (результирующими) данными, их (принципиальным) алгоритмом и т.д.

Такой подход к психической и умственной деятельности человека сразу меняет все традиционные представления во всех областях, связанных с упомянутой деятельностью. Так, например, если лингвистика традиционно занималась «грамматическим строем языка», «лексикой», «значением слов» и т.п. категориями, то теперь вместо этих «привычных» понятий появляются программы, которые кодируют сообщение (какую-то исходную информацию) в поток звуковых сигналов на одном конце, и программы, декодирующие это сообщение на другом конце, появляются алгоритмы этих программ, их входы и выходы и т.п. категории.

Вроде (на первый взгляд) то же самое, но появилась другая структура представлений (другая «модель»), другие понятия, другой подход к делу, и через некоторое время, как правило, обнаруживаются и другие следствия (которых не было в «старой модели»).

В принципе так же дело обстоит и с математикой. Раз математика создана умственной деятельностью человека, то (по Веданской теории) она создана мозговыми программами, и можно рассматривать эти программы в категориях «абстрактного программирования»: выделять сами программы, задействованные в создании определенных «математических вещей», определять входную и выходную информацию этих программ, их принципиальный алгоритм и т.д.

Видеть за привычными «математическими вещами» деятельность и характеристики этих мозговых программ – это и составляет сущность Веданской теории (в области математики).

Когда мы начинаем ТАК смотреть на математику, то очень быстро обнаруживается, что «традиционная математика» создана на удивление нелогично – с точки зрения изучения тех программ, которые (согласно Веданской теории) стоят за этими математическими вещами. Будучи порождением мозговых программ и изучающая (в основном) абстрактные продукты этих программ, «традиционная математика» при этом не отдает себе отчета о подлинной природе изучаемых ею объектов, применяет к ним методы, которые ни один программист ни в жизнь не применил бы ни к какой системе программ (представьте себе, например, что операционная система *Windows* описана при помощи аксиоматического метода в виде теорем и их доказательств: более абсурдный и более неудобный метод описания программ трудно себе даже представить!).

Естественно, что такой в корне – фундаментально! – неверный метод изучения определенной системы программ и накопления знаний о ней (о ее продуктах) приводит к очень тяжелым последствиям для математики. Вот, эти последствия и описываются Моррисом Клайном в его книге, приводимой ниже.

Клайн описывает эти последствия как проблему: то есть, без знания того, как эту проблему можно было бы решить. А Веданская теория еще до выхода первого издания книги Клайна давала ответ: чтобы решить все эти проблемы, нужно начинать смотреть на математику как на деятельность и продукты деятельности определенных мозговых программ, применяя для их описания такие методы, которые наиболее подходят для описания программ и их продуктов.

Это, разумеется, радикальный пересмотр проблемы оснований математики.

Чтобы научно оценить Веданскую теорию (точнее: ее следствия в математике), нужно в первую очередь проверить и убедиться, могут ли все положительные математические знания быть интерпретированы в терминах Веданской теории – т.е. как продукция деятельности определенных мозговых программ.

Когда мы в этом убедились (если убедились), то Веданская система предстает как альтернатива «традиционному подходу» к основаниям математики (со всеми их существующими разновидностями), и тогда нужно выбрать, которая из этих моделей лучше описывает действительность.

Таковы основы научного подхода к делу и к Веданской теории. (Как уже было сказано выше, за почти 32-летнее существование Веданской теории, ни разу не было ни одного случая, чтобы к ней подступались с научным подходом).

Вот, с таких позиций ниже делаются мои комментарии к книге Морриса Клайна.

Валдис Эгле

18 ноября 2009 года

* * *

2012.02.28 01:56 вторник
(через 2 года, 3 месяца, 9 дней, 12 часов, 40 минут)

Эту книгу я засканировал в компьютер в 2005 году, но тогда не предпринял никаких дальнейших шагов по обработке текста; осенью 2009 года я открыл три тома Векордии для книги Клайна, и тогда довел ее «спеллчекинг» и комментирование до 27-й страницы. А потом другие дела снова отклонили меня с такого пути, и 27 месяцев я Клайна опять не касался. За эти месяцы были выпущены 9 бюллетеней «В Защиту Науки» на сайте MOI-VZN, взята ориентация на Комиссию РАН по борьбе с лженаукой, начата переписка ПОТИ, произведено официальное обращение к Российской науке {POTI-2}, открыт сайт VE-POTI и начато на нем создание Веданопедии. Возможно, эти факты как-то отразятся на дальнейшей работе над книгой Клайна, каковую работу я теперь возобновляю.

Помимо моих комментариев, к тексту Клайна идут еще четыре потока примечаний: 1) неподписанные сноски в книге, видимо, принадлежащие самому Клайну; 2) комментарии редактора перевода М.И. Яглома; 3) примечания, подписанные «*ред.*» и, видимо, принадлежащие издательству «Мир»; 4) чтобы читателю не пришлось искать ссылки на литературу в отдаленных (и притом еще в двух разных) списках литературы, я указания источников отдублировал в сносках. Всё это и помимо комментариев моих создает большую нагрузку на подстрочные примечания внизу страниц. Кроме того, Клайн непрерывно цитирует разных авторов.

Чтобы в таком загроможденном примечаниями и цитатами тексте было легче разобраться, что есть что, я свои комментарии к этой книге решил выделить цветом. Я перебрал разные комбинации цвета шрифта и фона, и единственной комбинацией цветов, в какой я при своем слабом зрении мог и сам прочесть, что, собственно, мною написано, оказалось: черными буквами на желтом фоне. Поэтому на такой комбинации цветов и пришлось остановиться.

Задача этого издания – не только преподнести в электронном и удобочитаемом виде замечательную книгу Клайна (это лучшее описание истории математики, какое я только когда-либо видел), но и дать точку зрения Веданской теории на эту историю. Поэтому мои комментарии многочисленны и обширны. Короткие примечания я даю в сносках, а длинные – в виде вставок прямо в текст Клайна. И те, и другие, как уже было сказано, от текстов других авторов отличаются цветом фона.

Комментарии до примерно 30-й страницы написаны в 2009 году, а дальше – в 2012 году.[1] Пятнадцать глав Клайна разделены на три тома – по пять глав в каждом.

Валдис Эгле

28 февраля 2012 года

[1] Предисловие к комментариям 2012 года см. в {R-KLINE2}.

# Математика: Утрата определенности. Главы I–V

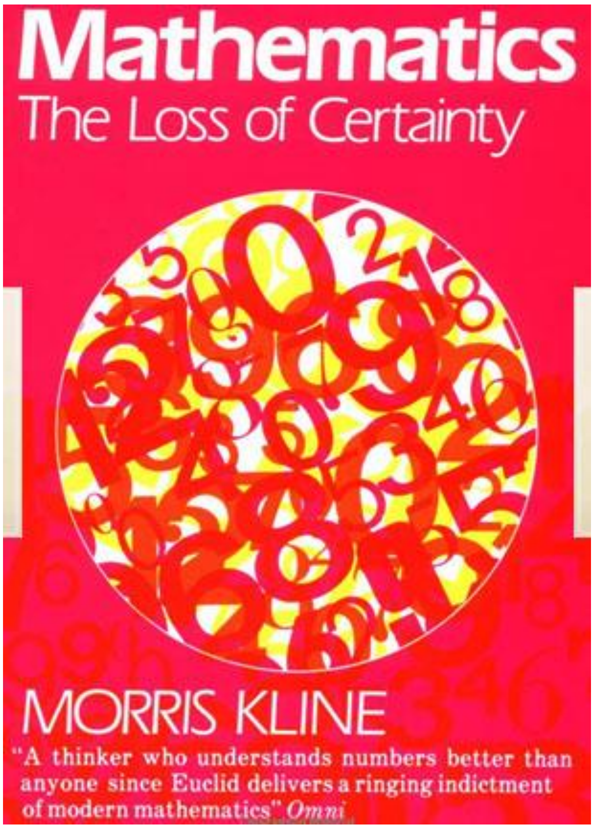
Mathematics: The Loss of Certainty
Morris Kline
Professor Emeritus of Mathematics
Courant Institute of Mathematical Sciences
New York University
New York
Oxford University Press 1980

М. Клайн
Математика
Утрата определенности
Перевод с английского Ю.А. Данилова
под редакцией д-ра физ.-мат. наук, проф. И.М. Яглома
Москва, «Мир», 1984

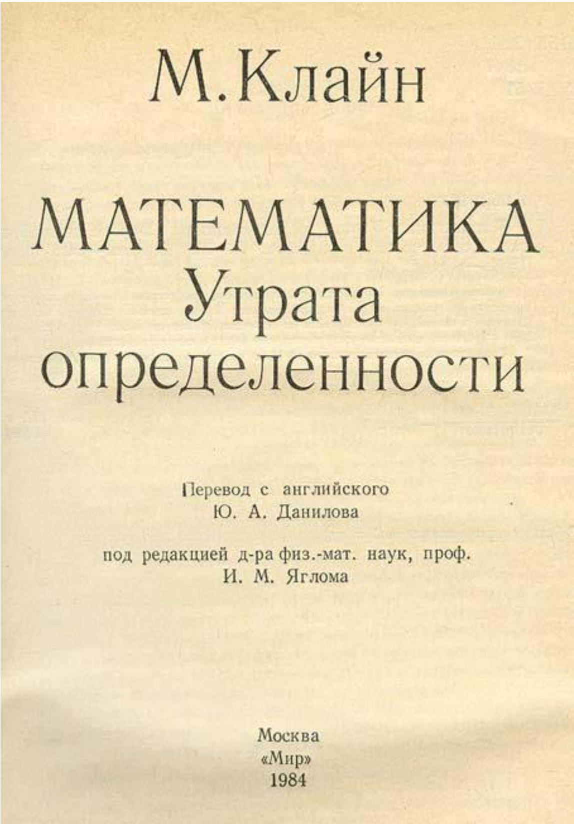
Книга известного американского математика, профессора Нью-Йоркского университета М. Клайна, в яркой и увлекательной форме рисующая широкую картину развития и становления математики от античных времен до наших дней. Рассказывает о сущности математической науки и ее месте в современном мире. Рассчитана на достаточно широкий круг читателей с общенаучными интересами.

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы






Обложка одного из английских изданий




Титульный лист русского издания

## *Предисловие редактора перевода*

**Яглом Исаак Моисеевич**
(1921.03.06 – 1988.04.17)[2]

Что такое математика? Каковы ее происхождение и история? В чем отличие математики от других наук? Чем занимаются математики сегодня и каков, по их мнению, ныне статус науки, которая составляет предмет их интересов и профессиональной деятельности? Все эти вопросы живо интересуют многих, но практически ни одно из имеющихся в нашей литературе научно-популярных сочинений не дает на них достаточно полного ответа. Вопрос «Что такое математика?» вынесен в заглавие пользующейся заслуженной известностью книги Р. Куранта и Г. Роббинса [118][3]. В этом сочинении Курант сделал попытку «конструктивного» определения математики: «Математикой называется всё то, о чем говорится в нашей книге». Однако подобный ответ вряд ли можно признать удовлетворительным: он разъясняет суть дела лишь в той степени, в какой авторам названной книги удалось «характеризовать главные направления математической науки; без сомнения, многих читателей книга Куранта–Роббинса может и разочаровать. Возможно, более всеобъемлющий ответ на поставленные нами вопросы дает другая книга, в значительной мере также созданная под руководством Р. Куранта, – сборник «Математика в современном мире» [137][4], в котором собраны посвященные математике статьи из известного американского научно-популярного журнала *Scientific American*.[5] Однако, уделяя большое внимание общим вопросам, эта книга остается всего лишь сборником статей различных авторов, отличающихся одна от другой по стилю, основным установкам и доступности для читателя.

Одним из авторов «Математики в современном мире» был Морис Клайн, который в годы составления этого сборника возглавлял математический факультет Нью-Йоркского университета и был руководителем одного из отделов Математического института им. Куранта. В настоящее время Клайн отказался от всех своих официальных должностей, сохранив лишь звание заслуженного профессора курантовского института; он входит также в состав редколлегий журналов *Mathematics Magazine* и *Archive for History of Exact Sciences*. Клайн является автором многих книг, из числа которых можно отметить часто цитируемые сочинения «Математика в западной культуре» [46*[6]][7] и, быть может, лучший из зарубежных курсов истории математики, «Математическое мышление от древности до настоящего времени» [45*][8]. Но в наши дни

---

[2] **В.Э.:** Родился в Харькове вместе с братом-близнецом (впоследствии тоже известным ученым); в 1926 семья переехала в Москву, в 1938 поступил в МГУ на механико-математический факультет; во время войны в армию не был призван из-за сильной близорукости; в 1942 окончил Свердловский университет; в 1945 стал кандидатом наук, потом преподавателем МГУ, но в 1949 г. был уволен как «космополит» и стал преподавателем Орехо-Зуевского педагогического института; в 1956 вернулся в МГУ. С 1965 г. доктор наук и профессор. В 1968–1974 гг. профессор Московского металлургического института, в 1974–1983 профессор Ярославского университета; в 1983–1988 с.н.с. Академии Педагогоческих наук СССР. Умер в возрасте 67 лет от осложнений после операции (3,5 года после выхода настоящей книги).

[3] Курант Р., Ррбинсон Г. *Что такое математика*? – М.: Просвещение, 1967.

[4] *Математика в современном мире*. – М.: Мир, 1967.

[5] Ныне этот журнал переводится на русский язык и публикуется издательством «Мир» под названием «В мире науки».

[6] Здесь и далее ссылки на литературу, помеченные звездочкой; относятся к авторскому списку «Избранная литература».

[7] Kline M. *Mathematics in Western Culture*. – New York: Oxford University Press, 1958.

[8] Kline M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. – New York: Oxford University Press, 1972.

наибольшим успехом из всех сочинений[9] М. Клайна пользуется его книга «Математика. Утрата определенности», предлагаемая ныне советскому читателю; такой успех обусловлен как бесспорным литературным и педагогическим талантом автора, так и широтой и важностью затронутых в книге вопросов.

Настоящая книга М. Клайна именно и ставит своей целью ответить на вопросы, прозвучавшие в начале нашего предисловия. Автор пытается разъяснить сущность математики читателю, интересующемуся общенаучными проблемами, но не имеющему специального математического образования, и стремится ознакомить его с теми принципиальными проблемами, которые возникли в математике в конце XIX и в XX вв. В этом отношении книгу М. Клайна с полным основанием можно считать уникальной: столь широкий круг вопросов ранее в научно-популярной литературе по математике никогда не рассматривался. Изложение автора имеет «генетический» характер: он уделяет много внимания истории математики, особенно тщательно анализируя кризисные моменты, связанные с необходимостью ломки самой «математической идеологии». При этом автор достаточно подробно говорит о связи «чистой» и прикладной математики, о «непостижимой эффективности математики в естественных науках» (если использовать здесь название известной и цитируемой автором статьи Юджина Вигнера). Но самое значительное место в книге М. Клайна отводится вопросам, связанным с современным положением математики, и трудностям, обнаруженным в ее обосновании уже в нашем столетии, нередко в самые последние десятилетия.

Можно не сомневаться, что для многих читателей изложенные автором факты будут весьма неожиданными: мы привыкли считать, что математика всегда являлась образцом строгости, – автор же говорит о «нелогичном развитии» этой самой строгой и последовательной из наук и указывает, что античный идеал «доказательности» был достигнут здесь лишь во второй половине XIX в., а до этого общенаучный уровень арифметики и алгебры, геометрии и анализа был таким, что от него, безусловно, отшатнулись бы в ужасе древнегреческие мыслители. Неспециалисты привыкли считать, что в математике вообще не осталось никаких нерешенных проблем, но автор подчеркивает, что даже фундамент этой «самой научной из наук» не только не достроен, но, как будто никогда и не будет достроен до конца,[10] так что непротиворечивость математики вызывает известные сомнения (ср. впрочем, с шутливым высказыванием Вейля, процитированным на с.304). Главы «Нелогичное развитие» являются, быть может, самыми удачными в книге: читателю будет интересно узнать, с каким трудом входили в математику современное понятие числа или геометрические представления, с которыми мы знакомимся ныне буквально на школьной скамье.

Однако книга Клайна нуждается и в некоторых предостережениях. Рассчитывая на вдумчивого читателя и доверяя его критическому чутью, автор приводит много разных – иногда друг другу противоречащих – точек зрения и свободно сталкивает разные суждения, не настаивая на каком-либо определенном. Однако из того, что Клайн подробно рассказывает, скажем, о философии Канта, вовсе не следует, что сам он является кантианцем. Излагая далее религиозные установки ученых XVII–XVIII вв., Клайн также позже открещивается от них. Автор не претендует на то, чтобы читатель принял какую-либо из изложенных в книге философских концепций, как не требует он и безоговорочно признать правоту той или иной из обсуждаемых им школ, занимающихся основаниями математики: Клайн хочет о многом рассказать, но вовсе не

[9] Перечисляя книги Клайна, я обхожу здесь вниманием пользующиеся (возможно, даже чрезмерно громкой) известностью его недавние сочинения «Как складывает Джонни» и «Как учит учитель», содержащие острую критику современной реформы преподавания математики в средней школе и написанные с присущими этому автору темпераментом и полемическим задором (см. также переведенную ранее на русский язык интересную, но, пожалуй, чрезмерно заостренную статью [138: Клайн М. *Логика против педагогики*. – В кн.: Математика (проблемы преподавания математики в вузах), вып. 3. – М.: Высшая школа, 1973]).

[10] Трудно не процитировать здесь столь почитаемого Клайном Германа Вейля: «...Процесс познания начинается, так сказать, с середины и далее развивается не только по восходящей, но и по нисходящей линии, теряясь в неизвестности. Наша задача заключается в том, чтобы постараться в обоих направлениях пробиться сквозь туман неведомого, хотя, конечно, представление о том, что колоссальный слон науки, несущий на себе груз истины, стоит на каком-то абсолютном фундаменте, до которого человек может докопаться, является не более чем легендой» (из статьи «Феликс Клейн и его место в математической современности»; Felix Klein Stellung in der mathematischen Gegenwart, Die Naturwissenschaften, Bd. 18, 1930, S. 4–11; Gesammelte Abhandlungen, Bd. 3. – Berlin: Springer-Verlag, 1968, S. 292–299).

во многом убедить. Это, конечно, не означает, что в книге абсолютно не выражена собственная позиция автора. Так, анализируя взаимоотношения математики с действительностью, Клайн явно стоит на стороне тех, кто видит в математике мощный аппарат познания реального тира, хотя не обходит вниманием и ученых, настаивавших на «объективном» существовании математических понятий как образов, которые складываются в нашем мозгу и позволяют нам судить о Вселенной, существующей для нас лишь в той форме, какую придает ей наш разум (с этой позицией еще в середине XVIII в. полемизировал Л. Эйлер). Впрочем, книга М. Клайна, требующая известного внимания и определенной научной культуры, явно не рассчитана на легковерного читателя – это позволяет нам не спорить со всеми теми из изложенных в книге взглядов, с которыми ни редактор, ни читатель никогда не согласятся.

Впрочем, несколько оговорок, относящихся к книге М. Клайна, возможно, будут здесь полезны. Прежде всего следует иметь в виду, что это отнюдь не учебник, а всего лишь сочинение научно-популярного характера: автор порой позволяет себе упрощать реальную ситуацию – поэтому читателям, которые захотят поглубже ознакомиться с затронутыми в книге вопросами, бесспорно, придется обратиться к дополнительной литературе, начиная с «Философской энциклопедии» (тт. 1–5. – М.: Советская энциклопедия, 1960–1970), содержащей не только достаточно подробные и снабженные дальнейшими литературными ссылками статьи о всех упоминаемых в книге философах (скажем о Канте и кантианстве, о Юме и его школе), но и весьма отчетливые характеристики основных направлений в области оснований математики [логицизм, гильбертов формализм, интуиционизм и понимаемый Клайном, пожалуй, слишком расширительно конструктивизм (зачастую отождествляемый автором с интуиционизмом)] и даже обсуждение основных фактов и теорем из области оснований математики, упоминаемых в этой книге. Далее, надо учитывать полемическую заостренность этой интересной книги, стремление автора пробудить читателя к размышлениям, вызвать его на спор, для чего Клайн иногда намеренно несколько драматизирует события. Так, он уделяет много внимания дискуссиям об основаниях математики, развернувшимся в начале нашего столетия и не стихающим до сих пор: однако при этом, конечно, надо учитывать, что «истинность» и применимость основного костяка математической теории ни у кого не вызывает серьезных сомнений, так что заключающая гл. XII притча о пауках в старинном замке представляется здесь вполне уместной.

Слишком заострена также и гл. XIII «Математика в изоляции». Действительно, в наши дни, видимо, уже невозможны личности, подобные, скажем, Герману Гельмгольцу – великому врачу, физиологу, физику, механику и математику; тем не менее это еще не дает оснований к тому, чтобы говорить о полном отрыве математики от реальной жизни. Конечно, очень многие современные математики не интересуются приложениями своей науки, и немало из печатающихся ныне в математических журналах статей «канет в Лету», но это никак не относится к вождям математической науки нашего века, по которым стараются равняться все остальные ученые, как не касается и наиболее значительных работ, кстати сказать, нередко оцениваемых по заслугам лишь много позже. Автор специально отмечает глубокий интерес к естествознанию (в иных случаях – и к гуманитарным наукам) и конкретно к физике всех крупнейших математиков нашего столетия, внесших выдающийся вклад в эту область знания. Здесь можно назвать Анри Пуанкаре (небесная механика, специальная теория относительности) и Давида Гильберта (общая теория относительности); Германа Вейля (теория относительности, квантовая механика) и Джона фон Неймана (квантовая механика, создание ЭВМ, математические методы экономики, теория автоматов); Андрея Николаевича Колмогорова (теория турбулентности в механике, теория динамических систем, математические методы в биологии, математическое стиховедение) и Джорджа Дэвида Биркгофа (теория относительности, динамические системы, математические методы эстетики). Сходную картину мы наблюдаем и в наши дни, когда почти все лидеры математической науки разных поколений отнюдь не чураются решения практических проблем. Да и само различие между «чистой» и прикладной математикой точному учету не поддается: нередко творцы новых разделов математики даже не подозревают, сколь большое практическое применение могут найти в дальнейшем их «чисто математические» результаты. Так, теория функций комплексного переменного создавалась Коши, Риманом и Вейерштрассом, которые, конечно, не могли предположить, что много позже Н.Е. Жуковский укажет на важность этого математического аппарата для решения задач возникшей тогда новой области техники: гидро- и аэромеханики. Дж. Буль и другие логики XIX в. даже не подозревали, что разрабатывают аппарат, который в XX в. будет положен в основу функционирования ЭВМ, а знаменитый Н. Бурбаки в своих «Очерках по истории математики» [68][11] не так уже задолго до современного «октавного бума» в физике элементарных частиц довольно пренебрежительно отозвался об открытой А. Кэли неассоциативной алгебре гиперкомплексных чисел с восьмью комплексными единицами (алгебре октав; ср. со сказанным на с.108 настоящей книги).

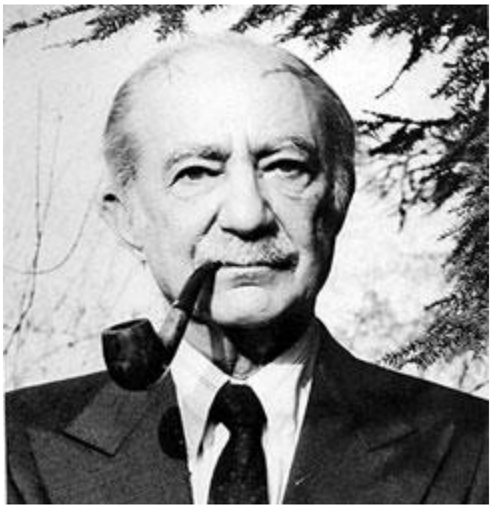
Стремясь облегчить чтение книги М. Клайна лицам, не имеющим математического образования, или начинающим математикам, мы сочли необходимым дополнить авторский текст некоторыми пояснениями и уточнениями (они собраны в разделе «Примечания» в конце книги)[12]. Кроме того, к авторскому списку литературы, ориентированному исключительно на англоязычного читателя (где мы, однако, указали имеющиеся на русском языке переводы некоторых из перечисленных автором книг), был прибавлен список книг (главным образом на русском языке), объединенных в раздел «Дополнительная литература». Следует также заметить, что у М. Клайна использование названной им литературы целиком предоставлено инициативе читателя: в английском оригинале книги не содержится ни одной ссылки на эту литературу. Таким образом, все имеющиеся в настоящем (русском) издании ссылки на литературу принадлежат переводчику и редактору.

Заканчивая это (по необходимости несколько затянувшееся) предисловие, я хотел бы выразить надежду, что читатель получит удовольствие от предлагаемой ему книги – не во всех отношениях бесспорной, но безусловно яркой и очень интересной по содержанию.

И.М. Яглом

[11] Бурбаки Н. *Очерки по истории математики*. – М.: ИЛ, 1963.

[12] **В.Э.:** В настоящем издании книги Клайна эти примечания даются не в конце книги (где их трудно найти и посмотреть), а в подстрочных текстах. Чтобы отличить их от комментариев самого Клайна, моих, обозначенных аббревиатурой «**В.Э.:**», впереди примечаний Яглома присоединено слово «**Яглом:**».



**Моррис Клайн**
1908.05.01 – 1992.06.10

Моей жене Элен Ман-Клайн

## *Вступление*

Эта книга – о глубоких изменениях, которые претерпели взгляды человека на природу и роль математики. Ныне мы знаем, что математика не обладает теми качествами, которые некогда снискали ей всеобщее уважение и восхищение. Наши предшественники видели в математике непревзойденный образец строгих рассуждений, свод незыблемых «истин в себе» и истин о законах природы. Главная тема этой книги – рассказ о том, как человек пришел к осознанию ложности подобных представлений и к современному пониманию природы и роли математики. Краткий обзор избранной темы содержится уже во введении. Отдельные разрозненные факты можно было бы собрать воедино, если проследить историю математики во всех деталях. Но тем, кого интересует главным образом разительные перемены, происшедшие в наших взглядах на природу и роль математики, более доступен и понятен прямой подход, свободный от второстепенных частностей и тем самым позволяющий выделить общие идеи.

Возможно, многие математики предпочли бы вести откровенный разговор о современном статусе своей науки в узком кругу профессионалов. Публичное обсуждение возникающих трудностей они считают таким же проявлением дурного вкуса, как разглашение перед посторонними семейных тайн. Но мыслящие люди должны отчетливо сознавать сильные и слабые стороны тех средств, которыми они располагают. Ясное понимание ограниченности (равно как и возможностей) того или иного подхода приносит несравненно больше пользы, чем слепая вера, способная исказить наши представления или даже привести нас к краху.

Я хотел бы поблагодарить сотрудников издательства «Оксфорд юниверсити пресс» за внимательное отношение к этой книге и выразить особую признательность Уильяму Ч. Халпину и Шелдону Майеру за понимание важности популярного изложения затронутых мной проблем, а также Леоне Кейплесс и Кертиссу Черчу за ценные замечания и критику. Моей жене Элен я обязан многочисленными исправлениями, внесенными ею при чтении рукописи и корректуры.

Пользуясь случаем, я хотел бы поблагодарить Математическую ассоциацию США за разрешение использовать в книге материалы из статей издаваемого ею журнала *The American Mathematical Monthly* («Американский математический ежемесячник»).

М. Клайн

Бруклин, штат Нью-Йорк
Январь 1980 г.

Боги людям открыли не все.
В поиск пустившись, люди сами познали немало.
* * *
Предположим, что мы не так уж далеки от истины.
* * *
Ни теперь, ни во веки знать никому не дано
Истину о богах и о том, что я вам толкую.
Если случится кому истину изречь,
То ведать о том он не в силах,
И над всем внешняя форма царит.
*Ксенофан*

## *Введение: основной тезис*

Лучший метод для предвидения будущего развития математических наук заключается в изучении истории и нынешнего состояния этих наук.[13]
*Анри Пуанкаре*

Одни трагедии порождают войны, голод, чуму, другие – в мире идей – вызваны ограниченностью человеческого разума. Эта книга – горестный рассказ о бедствиях, выпавших на долю математики – наиболее древнего и не имеющего себе равных творения людей, плода их неустанных и многообразных усилий, направленных на использование способности человека мыслить.

Можно также сказать, что эта книга на общедоступном уровне повествует о расцвете и закате величия математики. Позволительно спросить: уместно ли говорить об упадке математики в наше время, когда ее границы необычайно расширились, когда научная деятельность в области математики ведется во всё возрастающих масштабах и достигла небывалого расцвета, когда ежегодно публикуются тысячи работ по математике, всё большее внимание привлекают вычислительные машины и когда поиск количественных соотношений захватывает всё новые области, особенно в биологических и социальных науках? В чем причина трагедии? Прежде чем ответить на эти вопросы, следует напомнить, какие достижения математики снискали ей высочайший престиж, всеобщее признание и славу.

С самого зарождения математической науки как самостоятельной отрасли знания (у колыбели которой стояли древние греки) и на протяжении более чем двух тысячелетий математики занимались поиском истины и добились на этом пути выдающихся успехов. Необозримое множество теорем о числах и фигурах, казалось, служило неисчерпаемым источником абсолютного знания, которое никогда и никем не может быть поколеблено.

За пределами самой математики математические понятия и выводы явились фундаментом замечательных научных теорий. И хотя новые факты устанавливались в результате сотрудничества математики и естествознания, опирающегося на данные, имеющие нематематический, скажем физический, характер, они казались столь же непреложными, как и принципы самой математики, потому что предсказания, которые делались на основе математических теорий в астрономии, механике, оптике и гидродинамике, необычайно точно совпадали с данными наблюдений и экспериментов. Математика давала ключ к глубокому постижению явлений природы, к пониманию, заменявшему тайну и хаос законом и порядком. Человек получил возможность с гордостью взирать на окружающий мир и заявлять, что ему удалось раскрыть многие тайны природы, по существу оказавшиеся серией математических законов. Убеждением в том, что истины открывают математики, проникнуто известное высказывание Лагранжа: «Ньютон был счастливейшим из смертных, ибо существует только одна Вселенная и Ньютон открыл ее законы».

Для получения своих удивительных, мощных результатов математика использовала особый метод – метод дедуктивных выводов из небольшого числа самоочевидных принципов,

[13] Пуанкаре А. *О науке*. – М.: Наука, 1983, с. 294.

называемых аксиомами;[14] этот метод знаком каждому школьнику – прежде всего из курса геометрии. Природа дедуктивного вывода такова, что она гарантирует истинность заключения, если только истинны исходные аксиомы. Очевидная, безотказная и безупречная логика дедуктивного вывода позволила математикам извлечь из аксиом многочисленные неоспоримые и неопровержимые заключения. Эту особенность математики многие отмечают и поныне. Всякий раз, когда нужно привести пример надежных и точных умозаключений, ссылаются на математику.

Успехи, достигнутые математикой с помощью дедуктивного метода, привлекли к ней внимание величайших мыслителей. Математика наглядно продемонстрировала возможности и силу человеческого разума. Почему бы не воспользоваться, спросили мыслители, столь хорошо зарекомендовавшим себя дедуктивным методом для постижения истин там, где прежде безраздельно властвовали авторитет, традиция и привычка, – в философии, теологии, этике, эстетике и в социальных науках? Человеческий разум, столь эффективный в математике и в математической физике, мог бы стать арбитром помыслов и действий также и в других областях, приобщив их к красоте истины и истинности красоты. В эпоху, получившую название эпохи Просвещения (или Века разума), методология математики и даже некоторые математические понятия и теоремы были применены к другим областям человеческой деятельности.

Обращение к прошлому – плодотворный источник познания настоящего. Созданные в начале XIX в. необычные геометрии и столь же необычные алгебры вынудили математиков исподволь – и крайне неохотно – осознать, что и сама математика, и математические законы в других науках не есть абсолютные истины. Например, математики с досадой и огорчением обнаружили, что несколько различных геометрий одинаково хорошо согласуются с наблюдательными данными о структуре пространства. Но эти геометрии противоречили одна другой – следовательно, все они не могли быть одновременно истинными. Отсюда напрашивался вывод, что природа построена не на чисто математической основе, а если такая первооснова и существует, то созданная человеком математика не обязательно соответствует ей. Ключ к реальности был утерян. Осознание этой потери было первым из бедствий, обрушившихся на математику.

В связи с появлением уже упоминавшихся новых геометрий и алгебр математикам пришлось пережить шок и другого рода. Математики настолько уверовали в бесспорность своих результатов, что в погоне за иллюзорными истинами стали поступаться строгостью рассуждений. Но когда математика перестала быть сводом незыблемых истин, это поколебало уверенность математиков в безукоризненности их теорий. Тогда им пришлось взяться за пересмотр своих достижений, и тут они, к своему ужасу, обнаружили, что логика в математике совсем не так уж тверда, как думали их предшественники.

По существу развитие математики имело алогичный характер. Это алогичное развитие включало в себя не только неверные доказательства, но и пропуски в доказательствах и случайные ошибки, которых можно было бы избежать, если бы математики действовали более осмотрительно. Такие досадные изъяны отнюдь не были редки. Но алогичность развития математики заключалась также в неадекватном толковании понятий, в несоблюдении всех необходимых правил логики, в неполноте и недостаточной строгости доказательств. Иными словами, чисто логические соображения подменялись интуитивными аргументами, заимствованными из физики, апелляциями к наглядности и ссылками на чертежи.

Но и когда всё это было установлено, математика по-прежнему оставалась эффективным средством описания природы. Кроме того, математика сохранила привлекательность и сама по себе как область чистого знания, и в умах многих, особенно пифагорейцев, являлась частью реальности, представляющей самостоятельный интерес[15].[16] Учитывая это, математики решили

---

[14] **В.Э.:** Это неверно – математика отнюдь не начинала с аксиом; аксиоматический метод стал доминировать в ней только в конце XIX века. Первые творцы математики, начиная уже с шумеров и египтян, изучали программы человеческого мозга – хотя, разумеется, они не отдавали себе отчета в том, что это программы. Но, тем не менее, фактическим объектом их исследований были не аксиомы, а программы. И «дедуктивный метод» в этих исследованиях использовался не более, чем в любых других тогдашних исследованиях природы.

[15] **Яглом:** Относящийся к нашему времени выразительный пример подобного отношения к математике приводит в своей статье «Эйнштейн и физика второй половины XX века» [60: Янг Ч. *Эйнштейн и физика второй половины XX века*. – Успехи физических наук, 132, вып. 1, 1980, с. 169–175] выдающийся современный физик, лауреат Нобелевской премии Ч. Янг (Ян Чжэньнин). Он рассказывает, как, придя к

восполнить пробелы в логическом каркасе своей науки и перестроить заново те части ее, в которых обнаружились изъяны. Движение за математическую строгость приобрело широкий размах во второй половине XIX в.

К началу XX в. математики стали склоняться к мнению, что желанная цель наконец достигнута. И хотя им пришлось признать, что математика дает лишь приближенное описание природы и многие утратили веру в то, что природа полностью основана на математических принципах, математики по-прежнему продолжали возлагать большие надежды на проводимую ими реконструкцию логической структуры математики. Но не успели смолкнуть восторги по поводу якобы достигнутых успехов, как в реконструированной математике в свою очередь обнаружились противоречия. Обычно эти противоречия принято называть парадоксами – эвфемизм, позволяющий тем, кто его использует, обходить молчанием кардинальное обстоятельство: там, где есть противоречия, там нет логики.

Ведущие математики и философы начала XX в. сразу же попытались разрешить возникшие противоречия. В результате возникло четыре различных подхода к математике, которые были отчетливо сформулированы и получили значительное развитие; у каждого из этих подходов нашлось немало приверженцев. Все четыре направления математики стремились не только разрешить известные противоречия, но и гарантировать, что в будущем не появятся новые противоречия, т.е. старались доказать непротиворечивость математики. Интенсивная разработка оснований математики привела и к другим результатам. Приемлемость некоторых аксиом и принципов логики дедуктивного вывода также стала яблоком раздора: позиции школ по этим вопросам разошлись.

В конце 30-х годов XX в. математик мог бы принять один из нескольких вариантов оснований математики и заявить что проводимые им математические доказательства по крайней мере согласуются с догматами избранной им школы. Но тут последовал удар ужасающей силы: вышла в свет работа Курта Гёделя, в которой он среди прочих важных и значительных результатов доказал, что логические принципы, принятые различными школами в основаниях математики, не позволяют доказать ее непротиворечивость. Как показал Гёдель, непротиворечивость математики невозможно доказать, не затрагивая самих логических принципов, замкнутость которых весьма сомнительна. Теорема Гёделя вызвала смятение в рядах математиков. Последующее развитие событий привело к новым осложнениям. Оказалось, например, что даже аксиоматически-дедуктивный метод, столь высоко ценимый в прошлом как надежный путь к точному знанию, небезупречен. В результате этих открытий число различных подходов к математике приумножилось и математики разбились на еще большее число группировок.

В настоящий момент положение дел в математике можно обрисовать примерно так. Существует не одна, а много математик, и каждая из них по ряду причин не удовлетворяет математиков, принадлежащих к другим школам. Стало ясно, что представление о своде общепринятых, незыблемых истин – величественной математике начала XIX в., гордости человека – не более чем заблуждение. На смену уверенности и благодушию, царившим в прошлом, пришли неуверенность и сомнения в будущем математики. Разногласия по поводу оснований самой «незыблемой» из наук вызвали удивление и разочарование (чтобы не сказать больше). Нынешнее состояние математики – не более чем жалкая пародия на математику прошлого с ее глубоко укоренившейся и широко известной репутацией безупречного идеала истинности и логического совершенства.

---

своему старому учителю Чжень Шеншеню, ныне профессору Калифорнийского университета в Беркли и одному из крупнейших современных геометров, он выразил удивление тем, как быстро понадобились физикам идущие в значительной степени от Чженя так называемые *связности на расслоениях*, придуманные математиками вне всякой связи с физической реальностью. На это Чжень ответил ему: «Но ведь никак нельзя сказать, что это мы, математики, выдумали связности на расслоениях – ясно, что они существовали и до нас».

[16] **В.Э.:** Отношение между тем, что «выдумывают математики», и тем, что «существует до нас», очень просто. Математические «структуры» вообще представляют собой (потенциальные) продукты (мозговых) программ (и их алгоритмов). Математики (и люди вообще) придумывают новые алгоритмы. Но когда алгоритм придуман, то его свойства (свойства его продуктов) являются уже объективной данностью и открываются в процессе исследования. С этой точки зрения они «существуют независимо от нас». Но вся эта область не существовала, пока не был придуман новый алгоритм, ставший предметом исследования. Никакой проблемы тут нет.

Как думают некоторые математики, расхождения во мнениях относительно того, что следует считать настоящей математикой, когда-нибудь будут преодолены. Особое место среди тех, кто так считает, занимает группа ведущих французских математиков, пишущих под коллективным псевдонимом Николá Бурбаки:

> С древнейших времен критические пересмотры оснований всей математики в целом или любого из ее разделов почти неизменно сменялись периодами неуверенности, когда возникали противоречия, которые приходилось решать... Но вот уже двадцать пять веков математики имеют обыкновение исправлять свои ошибки и видеть в этом обогащение, а не обеднение науки; это дает им право смотреть в будущее спокойно. ([2][17], с.30.)

Но гораздо больше математиков настроены пессимистично. Один из величайших математиков XX в. Герман Вейль сказал в 1944 г.:

> Вопрос об основаниях математики и о том, что представляет собой в конечном счете математика, остается открытым. Мы не знаем какого-то направления, которое позволит в конце концов найти окончательный ответ на этот вопрос, и можно ли вообще ожидать, что подобный «окончательный» ответ будет когда-нибудь получен и признан всеми математиками. «Математизирование» может остаться одним из проявлений творческой деятельности человека, подобно музицированию или литературному творчеству, ярким и самобытным, но прогнозирование его исторических судеб не поддается рационализации и не может быть объективным.

Говоря словами Гете, «история науки – это сама наука».

Разногласия по поводу того, что такое настоящая математика, и существование многочисленных вариантов оснований математики не только серьезно сказались на самой математике, но и оказали самое непосредственное влияние на физику. Как мы увидим далее, наиболее развитые физические теории ныне полностью «математизированы». (Разумеется, выводы таких теорий интерпретируются посредством так или иначе наблюдаемых «чувственных», подлинно физических объектов: сидя у радиоприемников, мы слышим реальные голоса, чему не мешает отсутствие представления о том, что такое радиоволны.) Поэтому ученых – даже тех, кто не работает непосредственно над решением фундаментальных проблем, – не может не занимать вопрос о судьбах математики, которую они могут применять с уверенностью, не рискуя затратить годы на изыскания, некорректные в силу сомнительности использования математического аппарата.

Утрата критериев абсолютности истины, все возрастающая сложность математики и естественных наук, неуверенность в выборе правильного подхода к математике привели к тому, что большинство математиков оставили вопросы оснований. С проклятием «Чума на оба ваши дома!» они обратились к тем областям математики, где методы доказательства казались им надежными. Они нашли также, что проблемы, придуманные человеком, более привлекательны и легче поддаются решению, чем проблемы, поставленные природой.

Кризис математики и порожденные им конфликты по поводу того, что такое настоящая математика, отрицательно сказались и на применении математической методологии ко многим областям культуры: к философии, социальным и политическим наукам, этике и эстетике. Надежда на то, что удастся найти объективные, непреходящие законы и эталонные образцы знания, развеялась. «Век разума» закончился.

Несмотря на неудовлетворительное состояние математики, многочисленные существенно различные подходы, разногласия по поводу приемлемости аксиом и опасности возникновения новых противоречий, могущих подорвать значительную часть математической науки, многие математики продолжают применять математику для описания физических явлений и даже расширяют сферу ее применимости на экономику, биологию и социологию. Безотказная эффективность математики подсказывает две темы для обсуждения. Во-первых, такая эффективность может рассматриваться как критерий правильности. Разумеется, подобный критерий имеет временный характер: то, что сегодня считается правильным, в дальнейшем может оказаться неверным.

[17] Бурбаки Н. *Теория множеств*. – М.: Мир, 1965.

Вторая тема ставит нас перед загадкой: почему математика вообще эффективна, если вопрос о том, что такое настоящая математика, вызывает столько споров ([96*][18]; [4][19])? Не творим ли мы чудеса, пользуясь при этом несовершенными средствами? Пусть человек заблуждается, но разве может и природа также заблуждаться до такой степени, чтобы поддаться математическому диктату человека? Безусловно, нет. А как быть с успешными полетами на Луну, исследованиями Марса и Юпитера, ставшими возможными благодаря технике, существенно зависящей от математики: разве они не подтверждают математические теории космоса? Как же можно в таком случае говорить об искусственности и неединственности математики? Может ли тело продолжать жить, если разум и дух помутились? Может! И это относится и к человеку, и к математике. Итак, нам надлежит выяснить, почему, несмотря на шаткие основания и взаимоисключающие теории, математика оказалась столь непостижимо эффективной.

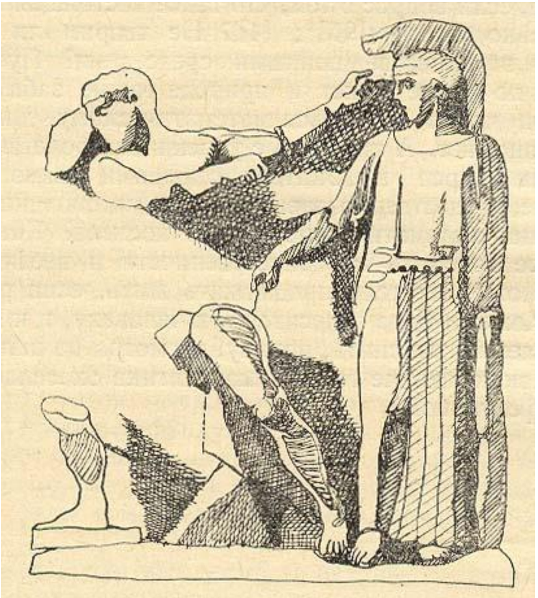
[18] Wigner E.P. *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics*. Com. Pure and Appl. Math., 1960, 13, 1–14. [Русский перевод: Вигнер Е. *Непостижимая эффективность математики в естественных науках*. – В кн.: Вигнер Е. Этюды о симметрии. – М.: Мир, 1971, 182–198; также: УФН, т. 94, вып, 3, 1968, с, 535–546; в кн.: Проблемы современной математики. – М.: Знание, 1971, с. 22–33.]

[19] Манин Ю.И. *Математика и физика*. – М.: Знание, 1979.

# I. Становление математических истин

Трижды счастливы души, которым дано
Подняться до истин подобных и звездное небо измерить!
Взорам их без помех дальние звезды открылись,
В цепи прочные мысли своей ширь эфира они заковали.
Так люди достигли небес – не как встарь,
В тщетной гордыне взгромоздивши горы на горы.

*Овидий*



Любая цивилизация, достойная так называться, занимается поиском истин. Мыслящие люди не могли не пытаться понять многообразие явлений природы, разгадать тайну появления на Земле человека, постичь смысл жизни и выяснить предназначение человека. Во всех древних цивилизациях, кроме одной, ответы на эти вопросы давались религиозными лидерами и принимались всеми. Единственным исключением была цивилизация, созданная древними греками. Греки совершили открытие, величайшее из когда-либо совершенных человеком: они открыли могущество разума. Именно греки классического периода, достигшего наивысшего расцвета в период VI–III вв. до н.э., поняли, что человек наделен способностью мыслить, наделен разумом, который, опираясь на наблюдение или опыт, способен открывать истины.

Нелегко ответить на вопрос о том, что привело греков к их открытию. Первые попытки осмыслить окружающий человека мир были сделаны в Ионии, греческих поселениях в Малой Азии, и многие историки пытались объяснить это сложившейся в Ионии общественно-политической обстановкой. Так, в Ионии была более свободная, чем в европейской Греции, политическая структура, что повлекло за собой определенное пренебрежение к традиционным религиозным верованиям. Однако наше знание греческой истории до VI в. до н.э. носит настолько фрагментарный характер, что невозможно дать сколько-нибудь исчерпывающее объяснение отмеченному феномену.

Со временем греки принялись размышлять над политическими системами, этикой, юриспруденцией, рациональными путями воспитания молодежи и многими другими видами человеческой деятельности. Их главный вклад, оказавший решающее влияние на всю последующую культуру, состоял в том, что они взялись за изучение законов природы. Прежде и греческая, и другие цивилизации древности рассматривали природу как нечто хаотичное, капризное и даже устрашающее. Все происходящее в природе было необъяснимо или приписывалось воле богов, умилостивить которых можно было молитвами, жертвоприношениями и другими ритуалами. Древние вавилоняне и египтяне, создавшие великие цивилизации за 3000 лет до н.э., заметили периодичность в движениях Солнца и Луны и даже разработали на этой основе календари, но не придавали своим открытиям особого значения. И эти исключительные по глубине и важности наблюдения не оказали решающего влияния на отношение людей к природе.

Греки осмелились взглянуть природе в лицо. Древнегреческие мыслители отвергли традиционные доктрины, веру в сверхъестественные силы, догму, сбросив путы, сдерживающие мысль. Греки первыми начали изучать разнообразные загадочные и сложные явления природы и предприняли попытку понять их. Свой разум они противопоставили хаосу на первый взгляд случайных явлений природы и вознамерились пролить на них свет.

Обладая беспредельной любознательностью и незаурядным мужеством, греки ставили вопросы (и находили ответы на них), которые служили пищей для серьезных размышлений и решались мыслителями высочайшего ранга. Лежит ли в основе всего, что происходит во Вселенной, некий единый план? Обязаны ли растения, животные, люди, планеты, свет, звук и т.д. своим появлением игре случая или же они являются частью какого-либо грандиозного плана? Обладая богатым воображением – что способствовало созданию нового взгляда на мир, – греки выработали концепцию Вселенной, ставшую основной на всех последующих этапах развития европейской мысли.

Греческие мыслители стали по-новому относиться к природе. Их отношение было рациональным, критическим и нерелигиозным. Греки отказались от мифов, равно как и от веры в богов, по своей прихоти правящих человеком и всем миром. Постепенно греческие мыслители создали учение об упорядоченной природе, бесперебойно функционирующей по единому плану. Все явления, доступные нашим органам чувств, – от движения планет до трепетания листьев на дереве – грекам удалось уложить в четкую, согласованную в деталях, понятную картину. Короче говоря, оказалось, что природа устроена рационально, и единый план, лежащий в ее основе, хотя и не поддается воздействию со стороны человека, вполне постижим.

Греки не только первыми принялись за поиск закона и порядка в природе, но и были первыми гениальными открывателями сокровенных схем, которым, как показывали наблюдения, следует природа. Так, греки дерзнули заняться поиском схемы, таящейся за грандиознейшими зрелищами, открытыми взору человека, – движением ослепительно сверкающего Солнца, сменой фаз Луны, чей лик являет богатейшую гамму оттенков, яркостью планет, бескрайней панорамой звездного неба, загадочными солнечными и лунными затмениями.

Первые попытки дать рациональное объяснение природы и устройства Вселенной предприняли ионийские философы в VI в. до н.э. Каждый из знаменитых философов этой эпохи: Фалес, Анаксимандр, Анаксимен, Гераклит и Анаксагор – пытался объяснить устройство Вселенной, принимая за основу какую-нибудь одну субстанцию. Фалес считал, например, что все состоит из воды, находящейся в газообразном, жидком или твердом состоянии. Объяснение многих явлений Фалес связывал с водой. Выбор его не столь неразумен, если учесть, что облака, туман, роса, дождь и град – различные состояния воды и что без воды нет жизни: она питает посевы и является основой органической жизни. Даже тело человека, как известно, на 90% состоит из воды.

Натурфилософия ионийцев представляла собой скорее набор дерзких умозаключений, хитроумных догадок и блестящих интуитивных прозрений, чем результат обширных и тщательно проведенных научных исследований. Философы ионийской школы так страстно стремились увидеть картину мира в целом, что обратились к широким обобщениям, минуя промежуточные этапы. Но вместе с тем они порвали с прежними представлениями, имевшими в основном мифологический характер, и предложили материалистическое, согласующееся с наблюдениями объяснение мироздания и природных явлений. Фантастические представления о природе ионийцы заменили рациональным подходом. Ионийцы дерзнули объять разумом Вселенную, перестав полагаться на богов, духов, призраков, демонов, ангелов и другие мистические силы, якобы управляющие явлениями природы. Квинтэссенцию воззрений ионийцев как нельзя лучше отражают слова Анаксагора: «Разум правит миром».

Решающим шагом, позволившим рассеять ореол таинственности и мистицизма, окружавший явления природы, и «навести порядок» в их кажущемся хаосе, стало применение математики. Этот шаг потребовал от греков не меньшей прозорливости, интуиции и глубины, чем вера в силу человеческого разума. План, по которому построена Вселенная, имеет математический характер – и только математика позволяет человеку открыть этот план.

Первой научной школой, предложившей свой вариант «математизированного плана» строения Вселенной, были пифагорейцы, возглавляемые Пифагором Самосским (около 585–500 гг. до н.э.). Пифагорейцы жили на юге Италии. Они черпали вдохновение и заимствовали свои взгляды из религиозных представлений греков, в которых центральное место отводилось очищению души и ее освобождению от скверны и узилища тела. Натурфилософия пифагорейцев носила ярко выраженный рациональный характер. Пифагорейцев поразило, что весьма различные в качественном отношении явления обладают одинаковыми математическими свойствами. Значит, решили пифагорейцы, именно математические свойства выражают сущность явлений. Если говорить более точно, то пифагорейцы видели сущность явлений в числе и числовых отношениях. В их объяснении природы числу отводилась роль начала начал.

Пифагорейцы считали, что все тела состоят из фундаментальных частиц, «единиц бытия», которые в тех или иных комбинациях соответствуют различным геометрическим фигурам. В сумме эти единицы представляют материальный объект. Число было материей и формой Вселенной. Отсюда и основной тезис учения пифагорейцев: «Все вещи суть числа». А поскольку число выражало «сущность» всего, то объяснять явления следовало только с помощью чисел.

Учение пифагорейцев может показаться нам странным, потому что для нас числа – абстрактные понятия, а вещи – физические, или материальные, объекты. Привычное нам понятие числа возникло в результате абстрагирования[20] – а ранним пифагорейцам эта абстракция была чужда. Для них числа были точками или частицами. Говоря о *треугольных*, *квадратных*, *пятиугольных* и других числах, которые мы сегодня называем *фигурными*, пифагорейцы имели в виду наборы точек, камешков, или других мелких предметов, расположенных в форме треугольников, квадратов и других геометрических фигур (рис. 1.1–1.4).

Хотя дошедшие до нас фрагменты исторических документов не позволяют установить точную хронологию событий, не вызывает сомнения, что пифагорейцы, развив и усовершенствовав свои учения, начали рассматривать числа как абстрактные понятия, а объекты – как конкретные реализации чисел. Именно в смысле такого более позднего различия, по-видимому, надлежит понимать высказывание знаменитого пифагорейца V в. до н.э. Филолая: «Если бы ни число и его природа, ничто существующее нельзя было бы постичь ни само по себе, ни в его отношении к другим вещам... Мощь чисел проявляется, как нетрудно заметить... во всех деяниях и помыслах людей, во всех ремеслах и музыке».

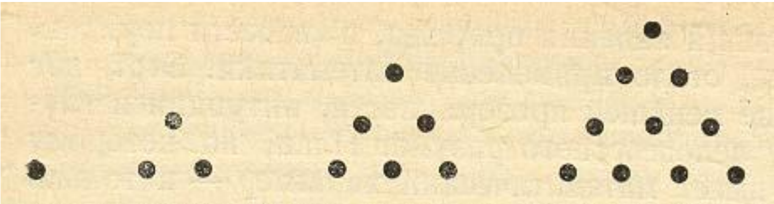


**Рис. 1.1.** Треугольные числа

[20] **В.Э.:** Это распространенная, часто употребляемая фраза, но она не предполагает точного знания механизма, по которому происходит это «абстрагирование». Такой механизм раскрывается только Веданской теорией, когда мы начинаем рассматривать задействованные здесь мозговые программы. Тогда дело выглядит так: в природе имеются объекты, содержащие разное количество частей (например, те же множества камешков). Арифметика начинается с того, что в мозге появляются программы, способные установить, что в двух таких объектах количество частей одинаково (между объектами существует изоморфизм в аспекте количества частей). Далее эти программы усовершенствуются до того, что они способны вообще классифицировать объекты по количеству частей и в результате имеют (бесконечный) ряд таксонов такой классификации. Этот бесконечный ряд таксонов классификации объектов внешнего мира по количеству частей и есть «первая редакция» натуральных чисел. Они представляют собой НЕ множества во внешнем мире, а потенциальные продукты программы классификации. Например, число «5» есть НЕ «множество всех множеств, состоящих из пяти элементов» (если это было бы так, то существование числа 5 зависело бы от того, имеется ли во внешнем мире хотя бы одно множество из пяти элементов), а число 5 есть потенциальный таксон, куда (мозговая) программа классификации множеств поместит внешний объект, состоящий из пяти частей. Благодаря этому, существование числа не зависит от того, существуют ли во внешнем мире множества с таким количеством элементов. Для небольших чисел разницы нет, но для больших есть. Например, число $10^{2000000000000000000}$ существует (как потенциальный продукт-таксон программы классификации), несмотря на то, что по современным представлениям число элементарных частиц во Вселенной не превышает $10^{200}$ и, следовательно, не могут существовать объекты с бóльшим количеством частей. Объектов нет, но таксон классификации для них заготовлен, и число существует (так, как вообще существуют числа). Теперь мы можем более точно определить, что же было истинно в воззрениях пифагорейцев. Выражения типа «Все вещи суть числа» или что «Вселенная имеет математический план» и т.п., фактически означают только то, что любые объекты Вселенной могут быть подвергнуты анализу и классификации при помощи тех (выше упомянутых) мозговых программ, и что обнаруженные этими программами свойства объектов имеют вообще важное значение и проявляются также и в других видах (например, в том, как звучит струна с одной длиной и с двойной длиной).

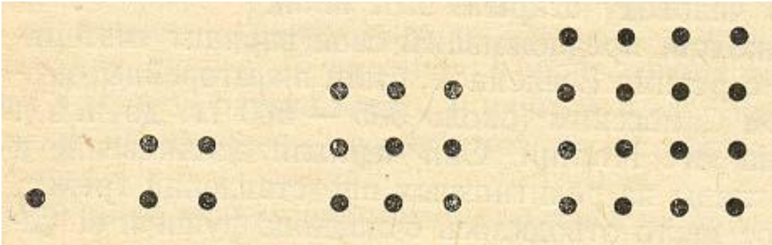


**Рис. 1.2.** Квадратные числа

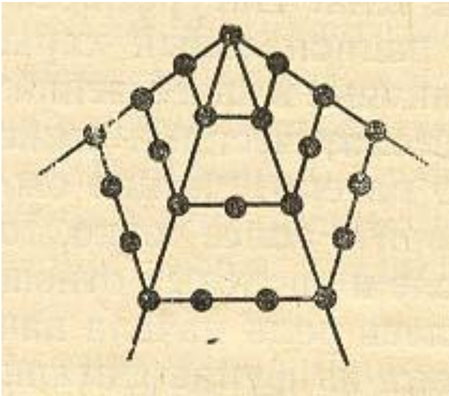


**Рис. 1.3.** Пятиугольные числа

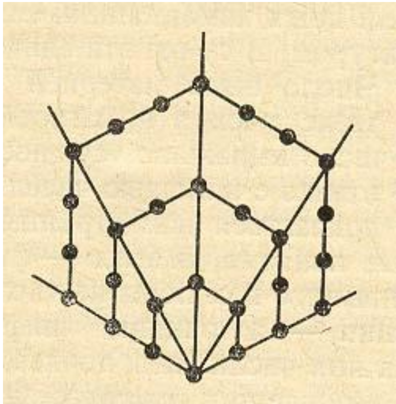


**Рис. 1.4.** Шестиугольные числа

Свести музыку к простым отношениям чисел пифагорейцам удалось после того, как они совершили два открытия: во-первых, что высота тона, издаваемого колеблющейся струной, зависит от ее длины и, во-вторых, что гармонические созвучия издают одинаково натянутые струны, длины которых относятся между собой как целые числа ([5][21], с. 393–434). Например, гармоническое созвучие издают две одинаково натянутые струны, из которых одна вдвое длиннее другой. На современном языке интервал между тонами, издаваемыми такими двумя струнами, называется октавой. Другое гармоническое созвучие издают две струны, длины которых относятся как 3 : 2. В этом случае более короткая струна издает ноту, которая на квинту выше тона, издаваемого более длинной струной. Пифагорейцы разработали знаменитую музыкальную шкалу. Мы не будем, подробно останавливаться на музыке греческого периода. Заметим лишь, что многие греческие математики, в том числе Евклид и Птолемей, посвятили музыке, в частности гармоническим созвучиям и построению музыкальной шкалы, специальные сочинения.

Движения планет пифагорейцы также свели к числовым отношениям. Они считали, что тела, двигаясь в пространстве, издают звуки. Должно быть, на эту мысль их навело наблюдение: камень, раскручиваемый на веревке, со свистом разрезает воздух. Пифагорейцы полагали, что быстро движущееся тело издает более высокий звук, чем тело, движущееся медленно. Согласно астрономическим воззрениям пифагорейцев, планеты движутся тем быстрее, чем дальше они находятся от Земли. Звуки, издаваемые планетами, изменяются в зависимости от удаления от Земли и образуют гармоническое созвучие. Но эта «музыка сфер», подобно всякой гармонии, сводится к числовым отношениям, поэтому и движения планет также сводятся к числовым отношениям. Мы не слышим музыку небесных сфер потому, что привыкли к ней с самого рождения.

Другие явления природы также были сведены пифагорейцами к числам. Особую роль в учении пифагорейцев играли числа 1, 2, 3 и 4, образовывавшие тетрактис, или четверицу. По преданию, клятва пифагорейцев гласила: «Клянусь именем Тетрактис, ниспосланной нашим душам. В ней источник и корни вечно цветущей природы». Пифагорейцы считали, что все объекты в природе состоят из четверок, таких, как четыре геометрических элемента: точка, линия, поверхность и тело. Впоследствии Платон придавал особое значение четверке материальных элементов: земле, воздуху, огню и воде.

[21] Ван дер Варден Б.Л. *Пифагорейское учение о гармонии*. – В кн.: Пробуждающаяся наука. – М.: Физматгиз, 1959.

Сумма чисел, входящих в тетрактис, равна десяти, поэтому десять считалось идеальным числом и символизировало Вселенную. А поскольку число десять идеально, то в небесах должно было быть ровно десять тел. Поэтому пифагорейцы ввели центральный огонь, вокруг которого обращаются Земля, Солнце, Луна и пять известных в древности планет, а также Противоземля, расположенная по другую сторону от центрального огня. Центральный огонь и Противоземля невидимы, потому что поверхность Земли, на которой мы живем, скрывает их от нас. Вряд ли уместно входить в детали пифагорейской картины мира. Главное заключается в том, что пифагорейцы пытались построить астрономическую теорию на основе числовых отношений.

После того как пифагорейцы «свели» астрономию и музыку к числу, музыка и астрономия оказались связанными с арифметикой и геометрией и все четыре дисциплины стали считаться математическими. Они вошли в программу общего образования, причем это положение сохранилось вплоть до средневековья. В средние века комплекс общеобразовательных дисциплин, состоящий из арифметики, геометрии, музыки и астрономии, получил название квадривиум.

Общий итог пифагорейского отождествления числа и реального мира подведен в «Метафизике» Аристотеля:

> В числах пифагорейцы усматривали (так им казалось) много сходного с тем, что существует и возникает, – больше, чем в огне, земле и воде (например, такое-то свойство чисел есть справедливость, а такое-то – душа и ум, другое – удача, и, можно сказать, в каждом из остальных случаев точно так же); так как далее они видели, что свойства и соотношения, присущие гармонии, выразимы в числах; так как, следовательно, им казалось, что все остальное по природе своей явно уподобляемо числам и что числа – первое во всей природе, то они предположили, что элементы чисел суть элементы всего существующего и что все небо есть гармония и число. ([6][22], т.1, с. 75–76.)

Натурфилософию пифагорейцев лишь с большой натяжкой можно назвать состоятельной. Эстетические соображения, к которым примешивается навязчивое стремление найти числовые соотношения, не могли не приводить к утверждениям, выходящим за пределы реальных наблюдений. Пифагорейцам не удалось сколько-нибудь существенно продвинуть ни одну из областей физической науки. С полным основанием их теории можно было бы назвать поверхностными. Но то ли по счастливому стечению обстоятельств, то ли благодаря гениальной интуиции пифагорейцам удалось сформулировать два тезиса, общезначимость которых подтвердило все последующее развитие науки: во-первых, что основополагающие принципы, на которых зиждется мироздание, можно выразить на языке математики; во-вторых, что объединяющим началом всех вещей служат числовые отношения, которые выражают гармонию и порядок природы. Современная наука разделяет пифагорейскую приверженность числу, хотя, как мы увидим далее, современные теории представляют собой гораздо более искусную форму пифагореизма.

Более поздних философов, пришедших на смену пифагорейцам, не в меньшей мере интересовали природа реальности и математический план, лежащий в ее основе. Особое место среди преемников пифагорейцев занимают Левкипп (V в. до н.э.) и Демокрит (ок. 460–370 гг. до н.э.), наиболее отчетливо для своего времени сформулировавшие атомистическое учение. Согласно философии, которой они придерживались, мир состоит из бесконечного числа простых и вечных атомов. Атомы отличаются по форме, размерам, твердости, порядку и расположению. Все, что мы видим вокруг, представляет собой ту или иную комбинацию атомов. Хотя геометрические величины, например, отрезок прямой, бесконечно делимы, атомы являются мельчайшими, не поддающимися дальнейшему дроблению частицами. Одни свойства тел, такие, как форма, размеры или твердость, определяются свойствами атомов. Другие, как, например, вкус, тепло или цвет, определяются не самими атомами, а воздействием атомов на того, кто испытывает ощущения. Чувственное восприятие ненадежно, так как оно существенно зависит от индивидуума. Подобно пифагорейцам, атомисты утверждали, что реальность, лежащую в основе постоянно меняющегося многообразия физического мира, можно выразить на языке математики. Кроме того, атомисты считали, что все происходящее в мире строго предопределено математическими законами.

---

[22] Аристотель. Сочинения в 4-х томах. – М.: Мысль, 1976 (т.1), 1981 (т. 3).

Самой влиятельной после пифагорейцев группой мыслителей, расширившей и распространившей учение о математическом плане, лежащем в основе природы, были платоники, возглавляемые, как о том говорит название этой школы, Платоном Афинским. Хотя Платон (427–347 гг. до н.э.) и заимствовал некоторые фрагменты учения пифагорейцев, в достопамятном IV в. до н.э. он был ведущей фигурой духовной жизни Греции. Платон основал в Афинах Академию – центр, который привлек к себе ведущих мыслителей его времени и существовал в течение девяти столетий.

Вера Платона в рациональность устройства Вселенной, вероятно, лучше всего выражена в его диалоге «Филеб»:

> **Сократ**... Начнем же хотя бы со следующего вопроса...
>
> **Протарх**. С какого?
>
> **Сократ**. Скажем ли мы, Протарх, что совокупность вещей и это так называемое целое управляется неразумной и случайной силой как придется, или же, напротив, что целым правит, как говорили наши предшественники, ум и некое изумительное, всюду вносящее лад разумение?
>
> **Протарх**. Какое же может быть сравнение, любезнейший Сократ, между этими двумя утверждениями! То, что ты сейчас говоришь, кажется мне даже нечестивым. Напротив, сказать, что ум ускоряет все, достойное зрелище мирового порядка – Солнца, Луны, звезд и всего круговращения небесного свода; да и гам я не решился был утверждать и мыслить об этом иначе. ([7][23], с. 33–34.)

Более поздние пифагорейцы и платоники проводили резкое различие между миром вещей и миром идей. Тела и отношения в материальном мире несовершенны, преходящи и тленны, но существует другой, идеальный, мир, в котором истины абсолютны и неизменны. Именно эти истины и надлежит рассматривать философу. О физическом же мире мы можем иметь только мнения. Видимый, чувственный мир не более чем смутная, расплывчатая и несовершенная реализация идеального мира: «вещи суть тени идей, отбрасываемых на экран опыта». Реальность надлежит искать в идеях чувственных, в физических объектах. Платон сказал бы, что в лошади, в доме или в прекрасной женщине нет ничего реального. Реальность заключена в универсальном типе (идее) лошади, дома или прекрасной женщины. Непреходящее знание может быть получено только относительно чистых идеальных форм. Только такие идеи постоянны и неизменны, и знание относительно них прочно и неуничтожимо.

Платон утверждал, что реальность и рациональность физического мира могут быть постигнуты только с помощью математики идеального мира. То, что идеальный мир устроен на математических началах, не вызывало сомнений. Плутарх приводит знаменитое изречение Платона: «Бог всегда является геометром»[24]. В диалоге «Государство» Платон говорит о том, что «знание, к которому стремятся геометры, есть знание вечного, а не того, что тленно и преходяще». Математические законы платоники считали не только сущностью реальности, но и вечными и неизменными. Числовые отношения также были частью реальности, а скоплениям вещей отводилась роль подобия чисел.[25] Если у ранних пифагорейцев числа были имманентны (внутренне присущи) вещам, то у Платона числа стали трансцендентны вещам.

Платон пошел дальше пифагорейцев в том, что хотел не только понять природу с помощью математики, но и заменить математикой природу. Он считал, что более проницательный взгляд на физический мир дал бы возможность открыть основные истины, которые позволили бы

[23] Платон. Сочинения в 3-х томах. Т.3, ч.1. – М.: Мысль, 1971.

[24] **В.Э.:** Здесь ошибка перевода: либо ошибка Данилова в переводе с английского, либо чья-то до него в переводе с древнегреческого. Платон как язычник не мог придерживаться христианской (или иудаистской) монотеической концепции Бога-Творца. Но у него фигурировало понятие «Демиурга». Демиургами в Греции называли сословие ремесленников («работающий народ»). Платон этим словом обозначил абстрактное творческое, созидательное начало Вселенной (и от него оно вошло в философию). Но это не христианский и не иудаистский Бог.

[25] **В.Э.:** Во взглядах Платона имеется гораздо больше смысла, чем обычно думает современный читатель. Платоновский «мир идей» – это на самом деле не что иное, как мир потенциальных продуктов мозговых программ. Этот мир действительно вечен и незыблем (в том смысле, что он не изменяется сам от себя помимо воли человека, как изменяются предметы окружающего мира; – мир «идей» или потенциальных продуктов мозговых программ сохраняется неизменным, пока человек не меняет собственно эти программы). «Скопления вещей» действительно лишь «подобия чисел» (в том смысле, что собственно число – это не «множество вещей», а таксон их классификации – потенциальный продукт программы классификации, не совпадающий со «скоплением вещей»).

разуму уже самостоятельно достроить все остальное. С момента обнаружения первичных истин дальнейшее было бы чистой математикой. Математика заменила бы физическое исследование.

В «Жизни Марцелла» Плутарх сообщает, что знаменитые современники Платона Евдокс и Архит использовали физические соображения для «доказательства» математических истин. Но Платон с негодованием отвергал такие доказательства как подрывающие основы геометрии, ибо они построены не на чистых рассуждениях, а на чувственных восприятиях.

Отношение Платона к астрономии дает ясное представление о том, к какого рода знанию надлежало, по его мнению, стремиться. Астрономия, утверждал Платон, не должна заниматься изучением движений наблюдаемых небесных тел. Расположение светил на небе и их видимые движения достойны всяческого восхищения и поистине прекрасны, но одни лишь наблюдения и объяснения движений далеко еще не составляют истинной астрономии. Дабы достичь истинной астрономии, необходимо «предоставить небеса самим себе», ибо истинная астрономия изучает законы движения истинных звезд в математических небесах, несовершенным подобием которых является видимое небо. Платон поощрял приверженность теоретической астрономии, занятие которой услаждает разум, а не тешит глаз, ибо ее объекты воспринимаются разумом, а не зрением. Различные фигуры, которые глаз видит на небе, надлежит использовать только как вспомогательные чертежи в поисках высших истин. К астрономии мы должны подходить, как к геометрии, рассматривая ее как серию задач, лишь подсказываемых наблюдаемыми светилами. Применения астрономии в навигации, при составлении календарей и вычислении времени для Платона интереса не представляли.

Совершенно иную концепцию изучения реального мира и отношения математики к реальности развил Аристотель, хотя он и был учеником Платона и много у Платона почерпнул. Аристотель критиковал Платона за идею о двух различных мирах и за сведение естественных наук к математике. Аристотель был физиком в буквальном смысле этого слова. В материальных телах он видел первичную субстанцию и источник реальности. По Аристотелю, физика и наука в целом должны заниматься изучением физического мира и извлекать истину из этих исследований. Подлинное знание достигается на основе чувственного опыта с помощью интуиции и абстрагирования. Абстракции не существуют независимо от человеческого разума.

Аристотель неоднократно подчеркивал, что универсалии – общие понятия – абстрагированы от реальных вещей. Для получения этих абстракций «мы начинаем с вещей познаваемых и наблюдаемых и переходим к вещам менее наглядным, которые по своей природе более понятны и более познаваемы». Аристотель брал наглядные, чувственные качества вещей, выхолащивал их и возводил до независимых, абстрактных понятий.

Какое место занимала математика в развитой Аристотелем схеме вещей? Основополагающими в схеме Аристотеля были физические науки. Математике отводилась вспомогательная роль в изучении природы при описании таких внешних свойств, как форма и размеры. Кроме того, математика помогала объяснять причины тех явлений, которые можно наблюдать в материальном мире. Так, геометрия может помочь в объяснении наблюдений из области оптики и астрономии, а арифметические пропорции могут служить основой гармонии. Но математические понятия и принципы заведомо являются абстракциями, корни которых уходят в реальный мир. Поскольку же они абстрагированы из реального мира, то они применимы к нему. Человеческий разум обладает особой способностью приходить к таким идеализированным свойствам физических объектов, отправляясь от ощущений, и создаваемые им абстракции с необходимостью должны быть истинными.

Даже нашего беглого обзора взглядов тех философов, которые сформировали духовный мир греков, достаточно, чтобы понять главное: все они подчеркивали необходимость изучения природы для понимания и оценки лежащей в основе всего сущего реальности. Кроме того, со времен пифагорейцев почти все философы утверждали, что природа устроена на математических основах. К концу классического периода окончательно сформировалось учение о природе, основанной на математических принципах, и начался планомерный поиск математических законов. Хотя это учение отнюдь не предопределило все последующее развитие математики, получив достаточно широкое распространение, оно оказало влияние на величайших математиков, в том числе и на тех, кто непосредственно не разделял его. Из всех достижений умозрительных построений древних греков подлинно новаторской была концепция космоса, в котором все подчинено математическим законам, постигаемым человеческим разумом.

Греки преисполнились решимости доискаться до истин и, в частности, до истин о математических основах природы. Как следует приступить к поиску истин и как при этом гарантировать, что поиск действительно приводит к истинам? Греки предложили «план» такого поиска. Хотя он создавался постепенно на протяжении нескольких веков (VI–III вв. до н.э.) и историки науки расходятся во мнениях относительно того, когда и кем этот план был впервые задуман, к III в. до н.э. «план поиска истин» был доведен до совершенства.

Математика в широком смысле слова, понимаемая как всевозможное использование чисел и геометрических фигур, родилась за несколько тысячелетий до того, как ей занялись греки классического периода. Она включает в себя достижения многих исчезнувших цивилизаций, среди которых наиболее выдающуюся роль сыграли культуры древнего Египта и Вавилона. Но во всех древних цивилизациях, за исключением греческой, математика еще не сформировалась в отдельную науку, у нее не было своей особой методологии, и она не ставила перед собой иных целей, кроме решения самых непосредственных, практических задач. Математика была своего рода инструментом, набором разрозненных нехитрых правил, позволявших людям удовлетворять повседневные запросы: составлять календари, назначать сроки проведения сельскохозяйственных работ, вести торговлю. Открытые методом проб и ошибок, на основе опыта и наблюдений, многие из этих правил были верны лишь приближенно. О математике догреческих цивилизаций в лучшем случае можно сказать, что она в известной мере продемонстрировала мощь, если не строгость, мышления и проявила больше упорства, чем блеска. Математику такого рода принято называть эмпирической. Эмпирическая математика египтян и вавилонян стала прелюдией к тому, что создали греки.

Хотя греческая культура не была полностью свободной от внешних влияний (греческие мыслители, совершая путешествия в Египет и Вавилон, знакомились там с достижениями местной науки) и хотя математике в современном смысле этого слова (даже в столь благоприятной интеллектуальной атмосфере древней Греции) еще предстояло пройти период созревания, то, что создали греки, значительно отличалось от того, что они по крупицам собрали из опыта своих предшественников.

Провозгласив своей целью поиск математических истин, греки не могли опираться на грубые, эмпирические, ограниченные, несвязные и во многих случаях приблизительные результаты, накопленные до них главным образом египтянами и вавилонянами. Сама математика, основные факты о числах и фигурах, должна была стать сводом абсолютных истин – и математические рассуждения, направленные на постижение истин о физических явлениях, например о движениях небесных тел, должны были приводить к неоспоримым результатам. Высокие цели намечены, но как их достичь?

Первый принцип, которого неуклонно придерживались греки, состоял в том, что математика должна иметь дело с абстракциями. Для философов, творцов греческой математики, носителями истины могли быть лишь перманентные, неизменяемые сущности и отношения. К счастью, человеческий разум, работу которого стимулируют наши органы чувств, может подняться до более высоких концепций – идей, вечных реалий и истинных объектов мышления.[26] Предпочтение, отдаваемое греками абстракции, имело под собой и другую причину. Чтобы обрести мощь, математика должна охватывать в едином абстрактном понятии существенные черты всех физических реализаций этого понятия. Так, математическая прямая должна отражать наиболее существенные особенности натянутых нитей, краев линеек, границ сельскохозяйственных угодий и траекторий лучей света. Математическая прямая не должна, следовательно, иметь толщину, цвет, молекулярную структуру или испытывать натяжение.[27] Греки

---

[26] **В.Э.:** В категориях Веданской теории это будет: до потенциальных продуктов мозговых программ. Вообще указанную Клайном разницу между догреческой и греческой математикой можно сформулировать так: египтяне и вавилоняне использовали («математические») мозговые программы, но греки стали изучать их потенциальные продукты как таковые – т.е. независимо от конкретного использования.

[27] **В.Э.:** Математическая прямая есть потенциальный продукт программы проведения прямых. Здесь будет уместно напомнить, как вообще происходит человеческое самопрограммирование. Чтобы выполнить какое-нибудь (элементарное) действие (например, произнести звук, сделать шаг и т.п.), человек должен по нервным волокнам направить серию импульсов определенным мышцам. Чтобы направить к мышцам такую серию импульсов, в человеческом мозге должны быть предварительно взведены определенные области клеток. Такие клетки, приведенные в готовность послать определенные сигналы (точнее: сама их готовность это делать), называется (мозговой) программой. Программа создана (самопрограммированием) тогда, когда клетки приведены в указанную готовность. Но, когда программа создана, она не обязательно сразу выполняется (т.е. программа может быть готовой, но импульсы мышцам еще не посылаются). Очень важно (для Естественного отбора и для выживания Системы), чтобы Система могла, прежде чем

вполне отчетливо и явно утверждали, что их математика имеет дело с абстракциями. В «Государстве» Платон говорит о геометрах следующее:

> Разве ты не знаешь, что, хотя они используют видимые формы и рассуждают о них, мыслят они не о самих формах, а об идеалах, с которыми не имеют сходства; не о фигурах, которые они чертят, а об абсолютном квадрате и абсолютном диаметре... и что в действительности геометры стремятся постичь то, что открыто лишь мысленному взору?

Итак, математика должна заниматься прежде всего изучением таких абстрактных понятий, как точка, прямая и целое число. Другие понятия, например треугольник, квадрат и окружность, можно определить через основные понятия, которые, как отметил Аристотель, должны оставаться неопределимыми, ибо в противном случае у нас не было бы отправной точки. О степени изощренности греческой математики можно судить хотя бы по тому, что определяемые там понятия должны были иметь аналоги в реальности либо по доказанному, либо по построению. Так, нельзя было ввести по определению трисектор угла и доказывать о нем теоремы: трисектор мог бы и не существовать. И так как грекам не удалось решить задачу о трисекции любого угла при тех ограничениях, которые они накладывали на геометрические построения, то они так и не ввели понятия трисектора[28].[29]

Свои рассуждения о математических понятиях греки начинали с *аксиом* – истин, столь очевидных, что в справедливости их невозможно усомниться.[30] Такие истины грекам были

---

выполнить программу, оценить ее возможные последствия. Поэтому эволюция встроила в живых системах аппарат, называемый в Веданской теории «бокоанализом». Чтобы оценить последствия выполнения программы *A*, другая программа *B* «сбоку» анализирует программу *A*, эмулирует ее выполнение и строит ее потенциальный результат (в виде некоторого «образа», похожего на тот образ, который создался бы, если бы Система действительно увидела бы результаты выполнения программы *A*). Этот образ потенциального результата (продукта) программы *A* есть то реальное, чем этот потенциальный продукт представлен в мозговом компьютере и чем он реально оперирует. Пусть теперь программа *A* есть программа, посылающая мышцам такие импульсы, в результате которых будет (на песке или на бумаге) начерчена прямая линия (реально, конечно, какой-то ее отрезок, но сама программа *A* позволяет чертить дальше и дальше). Тогда программа *A* является (мозговой) программой черчения прямых; реальным продуктом ее выполнения (если ее действительно выполнить) будет какой-то конкретный отрезок прямой линии, а ее потенциальным продуктом (точнее: образом этого потенциального продукта) будет тот образ, который создаст программа *B* путем бокоанализа программы *A*. Вот та «программатура», которая задействована «в понятии прямой». Геометрической прямой, объектом геометрического исследования, является потенциальный продукт программы *A* – не те реальные отрезки, которые она на самом деле начертит, если ее действительно выполнить, не сама программа *A*, не программа *B*, и даже не тот образ, который создан программой *B* при бокоанализе программы *A* и которым геометрическая прямая представлена в мозге, а именно собственно потенциальный продукт программы *A* (т.е. программы черчения прямых). (Даже в нашем обыденном представлении, когда мы воображаем «бесконечную прямую», самым существенным ее свойством является отнюдь не то, что она «не имеет ширины» (а также цвета, структуры и т.п.), а то, что она стремится вперед – перед нашим мысленным взором она именно летит, устремляясь всё дальше и дальше в пространство; она – движение, а не статика).

[28] **Яглом:** С этой точки зрения характерно, что Предложение 1 евклидовых «Начал» содержит построение равностороннего треугольника, что единственно оправдывает данное несколько ранее определение такого треугольника (ср. [25: Начала Евклида. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948 (книги I–VI), 1949 (книги VII–X)], с. 13, 15–16).

[29] **В.Э.:** Вообще это показывает, насколько четко (хотя и «стихийно») греки стояли в тех позициях, что предметом геометрии (и вообще математики) являются именно потенциальные продукты мозговых программ (и их алгоритмов). Есть алгоритм (программа) построения равностороннего треугольника – изучаем его; нет алгоритма трисекции угла – не изучаем ее.

[30] **В.Э.:** Это неверно и является анахронизмом, т.е. проекцией современных воззрений на античность. Достаточно взять «Начала» Эвклида и почитать их, чтобы убедиться, что в своих доказательствах Эвклид вообще никогда явно не упоминает ни аксиом, ни постулатов. (Те ссылки на аксиомы и постулаты, которые можно увидеть в современных изданиях, таких как русское издание 1948–1950 гг. под редакцией Мордухая-Болтовского, все вставлены современными издателями, редакторами и комментаторами). В неявном виде (т.е. без указания на аксиому) Эвклид иногда упоминает те вещи, которые содержатся в аксиомах, но эти упоминания делаются мимоходом и составляют ничтожную долю из всей массы эвклидовых аргументов. Поэтому непредвзятому человеку, просто читающему «Начала» Эвклида, вообще трудно понять, откуда могла появиться легенда, будто Эвклид выводит свои выводы из аксиом и постулатов. Список аксиом и (другой) список постулатов действительно предваряет текст

известны. Платон обосновал принятие аксиом своей теорией воспоминаний – *анамнезисом*. Как уже упоминалось, Платон считал объективно существующим мир идей. До того как человек появляется на свет, его душа обретается в мире идей и впитывает впечатления. Побуждаемая к воспоминаниям, душа затем восстанавливает накопленные ранее впечатления, чтобы признать истинность аксиом геометрии. Никакой земной опыт ей для этого не требуется. Аристотель подошел к проблеме иначе. Истинность аксиом, утверждает он во «Второй аналитике» ([8][31] гл. 18),[32] мы познаем посредством безошибочной интуиции. Кроме того, аксиомы необходимы нам как основа для рассуждений. Если бы в своих рассуждениях мы использовали факты, истинность которых неизвестна, то для установления их истинности потребовались бы новые рассуждения, и так до бесконечности. В результате мы бесконечно «спускались» бы в наших доказательствах – но нигде не могли бы остановиться. Среди аксиом Аристотель различал общие понятия и постулаты. Общие понятия истинны во всех областях мысли. К их числу относятся такие утверждения, как «Если от равного отнять равные [части], то остаются равные же [части]» ([8], с. 199). Постулаты применимы к такой специфической области, как геометрия. Таково, например, утверждение «Две [разные] точки определяют прямую и притом только одну».[33] Аристотель

---

Эвклида, и, видимо, из этого факта поверхностное наблюдение сделало вывод, что Эвклид из этих положений (начальных с точки зрения размещения текста) выводит свои теоремы. На самом деле роль аксиом и постулатов у Эвклида была совсем другой. Во времена Эвклида в греческих полисах широкое распространение получило такое явление как софисты. Это были «мудрецы», которые за деньги брались защищать или опровергать любое утверждение. Каждый мог заплатить софисту, чтобы тот перед публикой опроверг утверждения геометров (и это стало довольно распространенной забавой – этаким интеллектуальным спектаклем тех времен). Поэтому геометрам пришлось разработать средства борьбы против софистов. Геометрия была создана (и доказана) без всяких аксиом и постулатов, а аксиомы и постулаты были к ней добавлены позже как антисофистское оружие. В список аксиом были занесены такие положения, которые тогдашнее греческое общество признавало очевидными («..целое больше части..») и которые софисты не могли оспорить, т.к. зрители тогда их просто высмеяли бы. В список постулатов, напротив, заносились такие положения, которые отнюдь не были очевидными (а, наоборот, на самом деле были даже неверными в житейском смысле – «..через любые две точки можно провести прямую..» (невозможно через любые две точки провести прямую так, как их проводили греки на песке!)). Но относительно этих положений со зрителями предварительно заключалось соглашение считать, что они истинны. После такого соглашения софисты уже не имели права их оспаривать. Далее задача геометров при защите своих утверждений от софистов сводилась к тому, чтобы привести слова софиста в противоречие с аксиомой или постулатом, в чем они и приуспели, победив софистов. Видимо, тогда и возникло ощущение, будто геометрия вытекает из аксиом и постулатов, в конце концов (через два тысячелетия) породившее стремление к «полной аксиоматизации» математики. Но на самом деле ни геометрия в частности, ни математика в целом не вытекает из аксиом и не может быть из них выведена. Это миф, и миф вредный (для математики).

[31] Аристотель. Аналитики первая и вторая. – М.: Госполитиздат, 1952.

[32] **В.Э.:** Взгляды Аристотеля, как и взгляды Эвклида передаются автором (и редактором) в анахроническом ракурсе (в интерпретации, соответствующей современной точке зрения). Вот, Яглом вставил в текст Клайна ссылку на 18-ю главу «Второй аналитики», указав при этом русское издание 1952 года. Что ж, откроем именно это издание на 217-ой странице. Там находится глава 18-я «Второй аналитики». Она очень короткая, и я могу процитировать ее полностью. Вот она: «Глава восемнадцатая. <Невозможность знания без чувственного восприятия> Очевидно также, что если нет чувственного восприятия, то необходимо будет отсутствовать и какое-нибудь знание, которое невозможно <в таком случае> приобрести, поскольку мы научаемся <чему-нибудь> либо через индукцию, либо посредством доказательства. Доказательство же исходит из общего, индукция – из частного; однако <и> общее нельзя рассматривать без посредства индукции, ибо и так называемое отвлеченное познается посредством индукции, <именно> если кто-либо хочет показать, что некоторые <признаки>, даже если они и не отделены, присущи каждому роду, поскольку каждый <из этих признаков> есть <именно> такой-то <определенный>. Но индукция невозможна без чувственного восприятия, так как чувственным восприятием <познаются> отдельные <вещи>, ибо <иначе> получить о них знание невозможно. В самом деле, как знание <приобретаемое> из общего, невозможно без индукции, так и <знание> посредством индукции невозможно без чувственного восприятия.» Всё, дальше идет 19-я глава. Ну, – и где здесь речь об аксиомах?

[33] **В.Э.:** В общем, весь рассказ Клайна (подтвержденный Ягломом) ориентирован на то, что аксиоматический метод существовал уже в древности – у Эвклида, Аристотеля и др. Но он не существовал. Во всяком случае не существовало то, что мы сегодня понимаем под этим термином. Чуть выше Яглом указал 199-ю страницу издания 1952 года, на которой Аристотель упоминает, что «*Если от равного отнять равные [части], то остаются равные же [части]*». Да, эти слова там есть. Но вообще там речь

считал, что постулаты не обязательно должны быть самоочевидными, но если они не очевидны, то их истинность надлежит подтверждать выводимыми из них следствиями. Математики же требовали самоочевидности постулатов.

Из аксиом с помощью рассуждений выводятся заключения. Существует много типов рассуждений, например рассуждения по индукции, по аналогии и дедукции. Правильность заключения гарантирует лишь один из многих типов рассуждений. Заключение «Все яблоки красные», сделанное на основании того, что тысяча просмотренных яблок оказались красными, индуктивно и поэтому не абсолютно надежно. Заключение «Джон сможет окончить этот колледж», сделанное потому, что брат Джона, унаследовавший от родителей те же способности, окончил колледж, получено с помощью рассуждения по аналогии и заведомо не надежно. С другой стороны, дедуктивное рассуждение, несмотря на множество различных форм, гарантирует истинность заключения. Так, допуская, что все люди смертны и Сократ – человек, следует прийти к заключению, что Сократ смертен. Используемое в этом рассуждении правило логики является одной из форм суждения, которое Аристотель назвал *силлогистическим выводом*. К правилам дедуктивного рассуждения Аристотель относил также закон противоречия (никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным) и закон исключенного третьего (любое высказывание должно быть либо истинным, либо ложным).

Аристотель, а вслед за ним и весь мир приняли за неоспоримую истину, что применение правил дедуктивного вывода к любым посылкам гарантирует получение заключений, не уступающих по надежности посылкам. Иначе говоря, если посылки истинны, то истинны и заключения. Следует отметить, в особенности для обсуждения в дальнейшем, что Аристотель абстрагировал правила дедуктивной логики из рассуждений, которыми тогда уже широко пользовались математики.[34] Дедуктивная логика – дитя математики.

Хотя почти все греческие философы считали дедуктивный вывод единственно надежным методом получения истины, Платон придерживался несколько иных взглядов. Не выдвигая возражений против дедуктивного доказательства, Платон тем не менее считал его поверхностным, поскольку математические аксиомы и теоремы существуют в некотором объективном, независимом от человека мире, и в соответствии с учением Платона об анамнезисе человеку необходимо лишь вспомнить эти аксиомы, чтобы сразу же распознать их неоспоримую истинность. Теоремы, если воспользоваться сравнением из диалога Платона «Теэтет», подобны птицам в птичнике. Они существуют сами по себе, и необходимо лишь «схватить» их. В диалоге Платона «Менон» Сократ с помощью искусно поставленных вопросов вытягивает из молодого раба утверждение, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, вдвое больше площади квадрата, построенного на любом из катетов. Сократ торжествующе заключает, что искусно поставленные вопросы помогли рабу, никогда не изучавшему геометрию, вспомнить теорему.

Важно правильно оценивать, *сколь радикальной была приверженность дедуктивному доказательству*. Предположим, что некий ученый, измерив сумму углов ста различных треугольников, отличающихся расположением, размерами и формой, обнаружил, что в пределах точности измерений сумма углов всегда оказывается равной 180°. Разумеется, ученый решил бы, что сумма углов любого треугольника равна 180°. Но его доказательство было бы индуктивным, а не дедуктивным – и поэтому неприемлемым с точки зрения математики. Он мог бы точно так

---

идет о «началах», и под этими началами понимаются в основном объекты и свойства объектов. Типичные объекты: «единица» для арифметики и «точка», «линия» для геометрии, а свойство: прямота (линии). Эти «начала» «не доказываются», а принимаются существующими (т.е. понятными, известными). Они бывают специфическими для одной отрасли (как линии и прямота для геометрии), или общими для всех отраслей – и вот тут-то и упоминается «аксиома» «*Если от равного отнять равные*...». К упоминаемому же Клайном постулату «*Две [разные] точки определяют прямую и притом только одну*» Яглом не присоединил ссылку на конкретное место, где же Аристотель этот постулат упоминает. Видимо, Яглом не нашел такого места. Не нашел и я. (Словом, – ну не было у Аристотеля четкого аксиоматического метода, где из аксиом выводятся теоремы; аксиоматический метод – это плод современности).

[34] **Яглом:** Так, например, еще Платон весьма высоко ценил логический метод «доказательства от противного», при котором установление истинности предложения *p* начинается с предпосылки «пусть *p* неверно», и из этой предпосылки выводится противоречие [так, пифагорейское доказательство иррациональности $\sqrt{2}$ (в наших обозначениях) начинается с утверждения: Пусть $\sqrt{2} = m/n$ – рационально...»]. Общую форму этому методу придал, как будто, основатель так называемой элейской школы в древнегреческой философии Парменид (V в. до н.э.), глубоко почитавшийся Платоном (ему посвящен диалог Платона «Парменид»).

же проверить сколько угодно четных чисел и убедиться, что каждое из них представимо в виде суммы двух простых чисел. Но подобная проверка не является дедуктивным доказательством, и ее результат не сочли бы за математическую теорему. Итак, мы видим, что дедуктивность доказательства – требование весьма ограничивающее. Тем не менее греческие математики, бывшие в большинстве своем философами, упорно настаивали на исключительном использовании дедуктивных рассуждений, так как именно дедукция приводит к абсолютным истинам, к вечным ценностям.

Предпочтение, отдаваемое философами дедуктивным рассуждениям, обусловлено еще одной причиной. Философов интересуют лишь самые общие факты, касающиеся человека и физического мира, а чтобы установить такие универсальные истины, как то, что человек по существу добр, что в мире царит порядок или что человеку есть ради чего жить, дедуктивный вывод из подходящих исходных принципов осуществим в гораздо большей мере, чем индукция или рассуждение по аналогии.

Еще одну причину того, что греки классического периода отдавали предпочтение дедукции, можно усмотреть в организации их общества. Философией, математикой и искусством, естественно, увлекались прежде всего состоятельные люди, а не те, кто занимался физическим трудом. Все домашнее и общественное хозяйство держалось на рабах, метеках (свободных людях, не имевших, однако, гражданских прав)[35] и на свободных гражданах – ремесленниках; они же представляли все важнейшие профессии. Образованные свободные граждане не занимались физическим трудом и редко участвовали в торговых сделках. Платон провозгласил, что профессия лавочника недостойна свободнорожденного, и предложил подвергать наказанию всякого гражданина, который унизит себя подобным занятием, как совершившего преступление. Аристотель утверждал, что в идеальном государстве ни один гражданин (в отличие от рабов) не должен заниматься никаким ремеслом. Беотийцы (одно из греческих племен) запрещали тем, кто запятнал себя участием в торговых сделках, в течение десяти лет занимать общественные должности. В таком обществе эксперимент и наблюдение были мыслителям чужды. Считалось, что источники такого рода не могут помочь получить результаты научного, в частности математического, характера.

Хотя приверженность греков дедуктивному доказательству имела под собой немало оснований, не вполне ясно, кто из философов или какая группа мыслителей впервые продемонстрировали эту приверженность. Наши знания учений и трудов философов – до Сократа – носят, к сожалению, весьма фрагментарный характер, и, хотя на этот счет неоднократно высказывались различные мнения, ни одно из них не получило общего признания. Мы можем лишь с уверенностью утверждать, что во времена Аристотеля требование дедуктивности соблюдалось неукоснительно, так как Аристотель, формулируя в явном виде стандарты строгости, отмечает необходимость неопределяемых терминов и правил логического вывода.

Насколько удалось грекам осуществить свой план установления математических законов Вселенной? К счастью, лучшие достижения греческой математики, созданной усилиями Евклида, Аполлония, Архимеда и Клавдия Птолемея, дошли до нас. Хронологически все эти авторы относятся ко второму великому периоду греческой культуры, получившему название эллинистического или александрийского (300 г. до н.э. – 600 г. н.э.). В IV в. до н.э. царь Филипп Македонский предпринял попытку покорить персов, господство которых распространялось на весь Ближний Восток. Персы были традиционными врагами европейских греков. Филипп был убит, и на трон вступил его сын Александр. Александр Македонский разгромил персов и перенес культурный центр своей безмерно расширившейся империи в новый город, который он с присущей ему «скромностью» назвал в свою честь Александрией. Александр Македонский умер в 323 г. до н.э., но его план создания нового центра подхватили и продолжили его преемники в Египте, вошедшие в историю под именем династии Птолемеев.

Достоверно установлено, что Евклид жил и преподавал в Александрии около 300 г. до н.э. (сам Евклид скорее всего получил образование в Платоновской Академии в Афинах). Это почти единственная информация, которой мы располагаем о частной жизни Евклида. Свои труды Евклид облекал в форму обширных систематических дедуктивных обзоров отдельных открытий

[35] **Яглом:** Укажем, однако, что статут «временно поселившихся лиц», или метеков, имели в Афинах периода их расцвета и многие выдающиеся ученые – назовем хотя бы имена Аристотеля из Стагира, Евдокса Родосского, Демокрита Абдерского, Гиппократа Хиосского (математик) или Гиппократа Косского (врач).

многих греческих авторов классического периода. В главном труде Евклида – «Началах» излагаются основные свойства пространства и пространственных фигур.

«Началами» Евклида отнюдь не исчерпывается его вклад в развитие геометрии пространства. Он посвятил коническим сечениям не дошедшее до нас сочинение, а уроженец города Перга в Малой Азии Аполлоний (262–190 гг. до н.э.), изучавший математику в Александрии, продолжил исследование параболы, эллипса и гиперболы и написал по этому предмету классический труд – «Конические сечения».

Архимед (287–212 гг. до н.э.), возможно получивший образование в Александрии,[36] но живший на Сицилии, добавил к чисто геометрическим достижениям греков трактаты: «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах» и «Квадратура параболы», посвященных вычислению площадей и объемов сложных фигур и тел по методу, предложенному Евдоксом (390–337 гг. до н.э.) и получившему впоследствии название метод исчерпывания. В наши дни подобные задачи решаются методами интегрального исчисления.

Греки внесли еще один крупный вклад в изучение пространства и пространственных фигур: они создали тригонометрию. Ее основы были заложены Гиппархом, который жил на Родосе и в Александрии и умер около 125 г. до н.э. Его труд был продолжен Менелаем (ок. 98 г. н.э.), а полное и вполне авторитетное изложение астрономии дал египтянин Клавдий Птолемей (умер в 168 г. н.э.), работавший в Александрии. Главный труд Птолемея «Большое математическое построение астрономии» более известен под арабским вариантом названия – «Альмагест»[37]. Тригонометрия занимается изучением количественных соотношений между сторонами и углами треугольника. Греков интересовали главным образом треугольники на поверхности сферы со сторонами, образованными дугами больших кругов (так называются круги, плоскость которых проходит через центр сферы), поскольку именно такие сферические треугольники находили применение при изучении движений планет и звезд, перемещавшихся, как считали греки, по дугам больших кругов. Но ту же теорию можно «перенести» и на случай треугольников на плоскости. Именно этот вариант – плоская тригонометрия – входит в программу современной средней школы. Введение тригонометрии потребовало весьма основательных познаний в арифметике и даже некоторого знакомства с алгеброй. В дальнейшем (гл. V) мы узнаем о достижениях греков в этих областях математики.

Достигнутые успехи превратили математику из свода неясных, эмпирических, разрозненных фрагментов в блестящую, обширную, систематическую и глубокую науку. Классические труды Евклида, Аполлония и Архимеда («Альмагест» Птолемея является исключением), посвященные изучению свойств пространства и пространственных фигур, могут показаться весьма специальными и не позволяют составить верное представление о более широкой значимости излагаемого в них материала. Может создаться впечатление, что эти чисто геометрические сочинения имеют весьма косвенное отношение к раскрытию истинных тайн природы. Ведь все классические труды посвящены лишь изложению формализованной, изысканной, дедуктивной математики. В этом отношении греческие математические тексты не отличаются от современных учебников и монографий по математике. Авторы таких книг видят свою главную задачу в организации и связном изложении полученных математических результатов и считают излишним как-либо обосновывать важность излагаемых разделов науки и игнорируют возможные эвристические соображения и разбор частных случаев, подкрепляющих правдоподобность доказываемых теорем, а также умалчивают о возможных применениях своих конструкций. Многие историки науки, специализирующиеся на изучении греческой математики классического периода, склонны поэтому считать, что математики той эпохи занимались математикой ради математики, и в подтверждение своих слов ссылаются на два величайших компилятивных сочинения классического периода – «Начала» Евклида и «Конические сечения» Аполлония. Но те, кто так утверждает, чрезмерно сужают поле зрения. Ограничиваться рассмотрением только «Начал» и «Конических сечений» – это то же самое, что, исходя из одной лишь работы Ньютона о разложении бинома, утверждать, что Ньютон был чистым математиком.

Подлинной целью греков было исследование природы. Этой цели служило все – даже геометрические истины высоко ценились лишь постольку, поскольку они были полезны при

[36] **Яглом:** Во всяком случае, Архимед был тесно связан с александрийскими учеными; в частности, хорошо известна его дружба (и переписка) с Эратосфеном.

[37] **Яглом:** От греческого слова μεγιση – величайший; это название хорошо характеризует отношение арабских ученых к замечательному произведению Птолемея.

изучении физического мира. Греки понимали, что в структуре Вселенной воплощены геометрические принципы, первичным компонентом которых является пространство. Именно поэтому исследование пространства и пространственных фигур явилось существенным вкладом в изучение природы. Геометрия входила составной частью в более широкую программу космологических исследований. Например, изучение сферической геометрии было предпринято, когда астрономия приобрела математический характер, что произошло во времена Платона. Греческое слово «сфера» (шар) у пифагорейцев имело тот же смысл, что и (тогда еще не существовавшее) слово «астрономия». Сочинение Евклида «Феномены», посвященное сферической геометрии, предназначалось для использования в астрономии. Подобные факты и более полное знание того, как происходило развитие математики в последующие времена, позволяют утверждать, что и у греков к постановке математических проблем приводили естественнонаучные исследования и что математика была неотъемлемой частью изучения природы. Чтобы прийти к такому выводу, не нужно строить умозрительные заключения – достаточно выяснить, чего именно удалось достигнуть грекам в исследовании природы и кому принадлежат самые крупные достижения.

Величайший успех в области собственно физической науки выпал на долю астрономии. Платон, хорошо осведомленный о впечатляющем числе астрономических наблюдений, проведенных в Древнем Египте и Вавилоне, неоднократно подчеркивал, что египтяне и вавилоняне не располагали основополагающей, обобщающей теорией, которая позволила бы объяснить наблюдаемые нерегулярные движения планет. Положение дела попытался «исправить» некогда учившийся в Академии Евдокс, чья чисто геометрическая работа включена в V и XIII книги «Начал» Евклида. Полученное Евдоксом решение составило первую в истории науки в разумных пределах завершенную астрономическую теорию.

Мы не станем подробно описывать теорию Евдокса. Скажем лишь, что это была сугубо математическая теория, рассматривавшая движения взаимодействующих сфер. За исключением сферы неподвижных звезд, все сферы в теории Евдокса были не материальными телами, а математическими конструкциями. Евдокс даже не пытался установить, какие силы вынуждают сферы вращаться так, как они, по его утверждению, вращались. Теория Евдокса весьма современна нам по духу, ибо и в настоящее время целью науки зачастую считается математическое описание, а не физическое объяснение. Теория Евдокса была превзойдена теорией, создание которой принято приписывать трем величайшим астрономам-теоретикам: Аполлонию, Гиппарху и Птолемею. Эта теория вошла в «Альмагест» Птолемея.

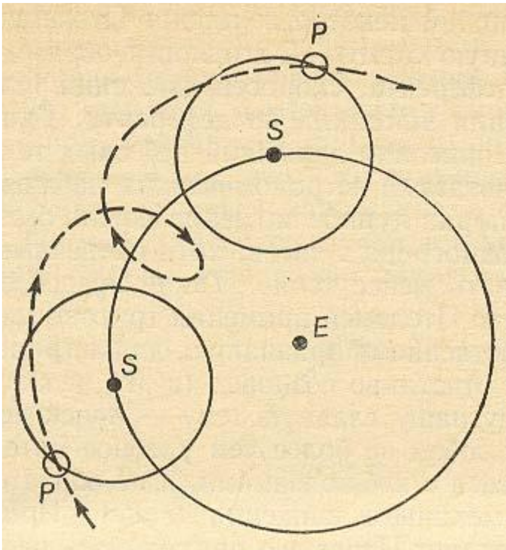


**Рис. 1.5.** Эпицикл и деферент

Никакие труды Аполлония по астрономии до нашего времени не дошли. Однако различные греческие авторы, в том числе Птолемей (в XII книге «Альмагеста»), ссылаются на его результаты. Как астроном, Аполлоний пользовался такой известностью, что получил прозвище ε (эпсилон), поскольку он много занимался движением Луны, а Луну греческие астрономы обозначали буквой ε. До нас дошло лишь одно небольшое астрономическое сочинение Гиппарха, но в «Альмагесте» Птолемея мы находим ссылки на Гиппарха и восхваления в его адрес.

Основная схема того, что теперь принято называть птолемеевой системой мира, вошла в греческую астрономию в период между работами Евдокса и Аполлония. Согласно этой схеме, планета $P$ движется с постоянной скоростью по окружности с центром $S$, в то время как центр $S$ в свою очередь движется по окружности, центр которой совпадает с Землей $E$ (рис. 1.5). Окружность, по которой движется точка $S$, называется *деферентом*; окружность, которую описывает планета $P$, – *эпициклом*. Точка $S$ для некоторых планет совпадает с Солнцем, а в остальных случаях это просто математическая точка. Направления, в которых движутся точки $P$ и $S$, могут как совпадать, так и быть противоположными. Например, в случае Солнца и Луны точки $S$ и $P$ движутся по окружностям в противоположные стороны. Для описания движений некоторых планет Птолемей несколько видоизменил описанную схему. Подходящим образом выбирая радиусы эпицикла и деферента, скорости движения тела по эпициклу и скорости движения эпицикла по деференту, Гиппарх и Птолемей смогли получить описания движений небесных тел, хорошо согласующиеся с результатами астрономических наблюдений того времени. Со времен Гиппарха лунное затмение можно было бы предсказать с точностью до одного–двух часов, хотя солнечные затмения удавалось предсказывать менее точно. Такие предсказания стали возможными, потому что Птолемей применил тригонометрию, разработанную им, по его собственному признанию, для астрономии.

Как и Евдокс, Птолемей отчетливо сознавал (и это необходимо особо отметить, имея в виду нашу главную тему – поиск истин), что его теория представляет собой не более чем удобное математическое описание, согласующееся с наблюдениями, и не обязательно должна отражать истинный механизм движения планет. При описании движений некоторых планет Птолемею приходилось рассматривать несколько альтернативных схем, и он отдавал предпочтение той, которая была проще с точки зрения математики. В XIII книге «Альмагеста» Птолемей утверждает, что астрономия должна стремиться к возможно более простой математической модели. Но христианский мир принял математическую модель Птолемея за абсолютную истину.[38]

Теория Птолемея дала первое полное, в разумных пределах, подтверждение постоянства и неизменности природы и была воспринята как окончательное решение поставленной Платоном проблемы объяснения видимых движений небесных тел. Никакой другой из полученных в греческую эпоху результатов не может соперничать с «Альмагестом» по глубине влияния на представления о Вселенной, и ни одно сочинение, за исключением «Начал» Евклида, не обрело столь беспрекословного авторитета.

Разумеется, в нашем кратком очерке греческой астрономии не названы многие другие достижения античных астрономов и не дано полного представления о глубине и размахе свершений тех, кого мы здесь упомянули. Греческая астрономия достигла высокого уровня развития и наглядности и весьма широко применяла математику. Кроме того, почти каждый греческий математик, в том числе и такие мастера, как Евклид и Архимед, занимался астрономией.

Постижение физических истин не закончилось на геометрии пространства и астрономии. Греки заложили также основы механики. Механика изучает движение тел, которые можно рассматривать как материальные точки, движение протяженных тел и силы, вызывающие эти движения. В своей «Физике» ([6][39], т.3, с. 59–262) Аристотель свел воедино все высшие достижения греческой механики. Как и вся аристотелева физика, его механика опирается на рациональные самоочевидные принципы, согласующиеся с наблюдениями. Хотя эта теория сохранила влияние на протяжении почти двух тысячелетий, мы не останавливаемся на ее изложении, так как она была полностью вытеснена механикой Ньютона. Существенными дополнениями к аристотелевой теории движения стали работы Архимеда по определению центров тяжести тел и его теория рычага. Во всей этой деятельности для нас наиболее существенна ведущая роль математики; тем самым получило подтверждение всеобщее убеждение в том, что в постижении законов природы первостепенное значение имеет математика.

Не меньший интерес, чем астрономия и механика, вызвала оптика. Основы этой науки также были заложены греками. Почти все греческие философы, начиная с пифагорейцев, строили умозрительные заключения о природе света, зрения и цвета, но нас интересуют математические достижения в этой области. Первым было априорное утверждение Эмпедокла (около 490 г. до н.э.) из Агригента – города на острове Сицилия – о том, что свет распространяется с конечной скоростью. Хронологически первыми систематическими исследованиями света, сохранившимися до нашего времени, стали сочинения Евклида «Оптика» и «Катоптрика»[40]. В «Оптике» Евклид рассматривает проблемы зрения и использования зрения для определения размеров различных предметов, В «Катоптрике» (теории зеркал) показано, как ведут себя лучи света при отражении от плоских, выпуклых и вогнутых зеркал и как ход лучей сказывается на том, что мы видим. Как и «Оптика», «Катоптрика» начинается с определений, которые в действительности являются

[38] **В.Э.:** «Христианский мир» сначала полностью отверг учение Птолемея вместе со всей «языческой наукой», а потом – через примерно 11 столетий – принял и канонизировал ее так, что еще через 5–6 столетий новой науке пришлось с этим каноном бороться.

[39] Аристотель. Сочинения в 4-х томах. – М.: Мысль, 1976 (т.1), 1981 (т. 3).

[40] Возможно, что вариант «Катоптрики», которым мы располагаем сегодня, в действительности представляет собой компиляцию работ нескольких авторов, в том числе и Евклида.

постулатами. Теорема I (аксиома в современных учебниках и монографиях), играющая основополагающую роль в геометрической оптике известна как **закон отражения**. Она утверждает, что угол α образуемый с поверхностью зеркала лучом света, падающим на зеркало из точки *P*, равен углу, образуемому с поверхностью зеркала отраженным лучом (рис. 1.6). Евклид также установил закон падения для луча, падающего на выпуклое и вогнутое зеркала: в точке касания Евклид заменил зеркало касательной плоскостью *R* (рис 1.7) «Оптика» и «Катоптрика» – сочинения математические не только по содержанию, но и по своей структуре. Основное место в них, как и в «Началах» Евклида, отводится определениям, аксиомам и теоремам.

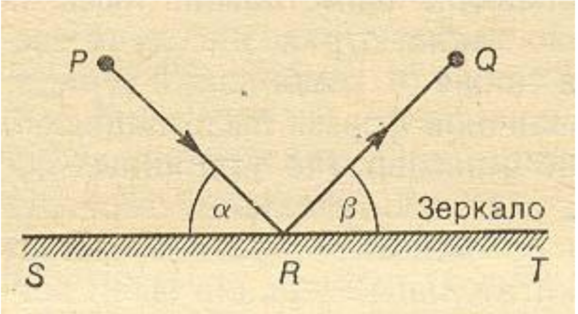



**Рис. 1.6.** Отражение от плоского зеркала

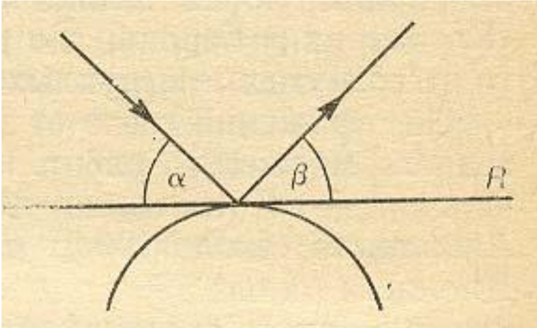



**Рис. 1.7.** Отражение от выпуклого зеркала

Математик и инженер Герон (I в.) вывел из закона отражения важное следствие. Если *P* и *Q* на рис. 1.6 – любые две точки, расположенные по одну сторону от прямой *ST*, то из всех путей, ведущих из точки *P* к прямой *ST*, а затем к точке *Q*, кратчайший соответствует такому положению точки *R*, при котором отрезки прямых *PR* и *QR* образуют с прямой *ST* равные углы. Следовательно, луч света, идущий из точки *P* к зеркалу и затем к точке *Q*, распространяется по кратчайшему пути. Отсюда ясно, что природа весьма «сведуща» в геометрии и использует ее с наибольшей пользой. Теорема, которую мы только что воспроизвели, заимствована нами из «Катоптрики» Герона, где рассмотрено также отражение луча света от вогнутых и выпуклых зеркал, а также от комбинаций зеркал.

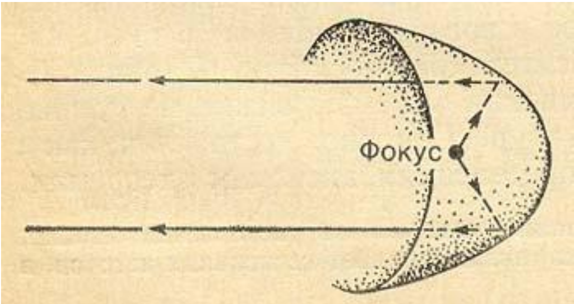



**Рис. 1.8.** Отражение от параболического зеркала.

Об отражении света от зеркал различной формы было написано великое множество работ. Среди ныне безвозвратно утерянных сочинений – «Катоптрика» Архимеда, «О зажигательном зеркале» Аполлония (около 190 г. до н.э.) и «О зажигательных зеркалах» Диоклеса (около 190 г. до н.э.). Зажигательные зеркала были вогнутыми и имели форму сферического сегмента параболоида вращения (поверхности, образованной вращением параболы вокруг ее оси) и эллипсоидов вращения. Аполлонию было известно, а в книге Диоклеса содержалось доказательство, что параболическое зеркало, отражая свет от источника света, помещенного в его фокусе, собирает лучи в пучок, параллельный оси зеркала (рис. 1.8). Наоборот, если пучок падающих лучей направить параллельно оси параболического зеркала, то после отражения лучи соберутся в фокусе. Собранные в фокусе солнечные лучи вызывают резкий разогрев и способны зажечь помещенный в фокусе горючий материал, откуда и название – зажигательное зеркало. По преданию, Архимед, воспользовавшись этим свойством зажигательных зеркал, сконцентрировал солнечные лучи на римских судах, блокировавших с моря его родной город Сиракузы, и поджег неприятельский флот. Аполлонию были известны отражательные свойства и других конических сечений. Он знал, например, что все лучи, выходящие из одного фокуса эллиптического зеркала, после отражения собираются в другом фокусе. В книге III «Конических сечений» приведены соответствующие геометрические свойства эллипса и гиперболы.

Греки заложили основы многих других наук. Особенно велика их роль как основоположников географии и гидростатики. Эратосфен из Кирены (около 284–192 гг. до н.э.), один из наиболее образованных людей античности, директор Александрийской библиотеки, вычислил расстояния между многими населенными пунктами на той части Земли, которая была известна древним грекам. Ему также принадлежит широко известное ныне вычисление длины окружности Земли.[41] В своей «Географии» Эратосфен помимо описаний используемых им математических методов объяснил причины изменений, происходящих на поверхности Земли.

Самым обширным сочинением по географии была «География» Птолемея в восьми книгах. В ней Птолемей не только дополнил и расширил труд Эратосфена, но и определил положение на поверхности Земли восьми тысяч мест, указав те самые их широты и долготы, которыми мы пользуемся и поныне.[42] Птолемей изложил также методы составления карт, применяемые и в современной картографии, в частности метод стереографической проекции. Во всех трудах по географии основную роль играла сферическая геометрия, которую греки применяли с IV в. до н.э.

Гидростатика занимается изучением давления, оказываемого жидкостью на погруженное в нее тело. Здесь основополагающим трудом по праву считается сочинение Архимеда «О плавающих телах». Как и все остальные сочинения, о которых мы упоминали, оно чисто математическое как по своему подходу, так и по способу получения результатов. В частности, именно в этом сочинении сформулирован знаменитый принцип, известный ныне под названием **закона Архимеда**, который гласит, что на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости. Таким образом, мы обязаны Архимеду объяснением того, каким образом человек может остаться на плаву в мире сил, стремящихся утопить его.

Хотя в александрийский период дедуктивный подход к математике и математическому изложению законов природы играет главенствующую роль, следует отметить, что в отличие от своих предшественников классического периода александрийцы не отказывались от экспериментов и наблюдений. Так, александрийцы использовали результаты высокоточных астрономиических наблюдений, которые в течение двух тысячелетий производили вавилоняне. Гиппарх составил каталог звезд, наблюдавшихся в его время. Среди изобретений александрийцев (сделанных главным образом Архимедом, а также математиком и инженером Героном) мы находим солнечные часы, астролябии и устройства для использования энергии пара и воды.

Особую известность приобрел Александрийский музей, основанный непосредственным преемником Александра Македонского в Египте – Птолемеем Сотером. Музей стал родным домом ученых; его библиотека насчитывала около 400 тыс. томов. Поскольку ее хранилища не могли вместить все рукописи, еще 300 тыс. томов были размещены в храме Сераписа. Ученые не только занимались наукой, но и проводили занятия с учениками.

Своими математическими трудами и многочисленными исследованиями греки существенно подкрепили тезис о том, что Вселенная зиждется на математических принципах. Математика внутренне присуща природе, является истиной о структуре природы, или, если воспользоваться выражением Платона, реальностью о физическом мире. Закон и порядок существует в природе, и математика – ключ к пониманию этого порядка. Более того, человеческий разум способен проникнуть в сокровенный план природы и открыть математическую структуру Вселенной.

Толчком к созданию концепции логического, математического подхода к познанию природы послужили, по-видимому, «Начала» Евклида. Хотя сочинение Евклида предназначалось для изучения физического пространства, структура самого сочинения, его необычайное остроумие и ясность изложения стимулировали аксиоматическо-дедуктивный подход не только к остальным областям математики, например к теории чисел, но и ко всем естественным наукам. Через «Начала» Евклида понятие логической структуры всего физического знания, основанного на математике, стало достоянием интеллектуального мира.

Тем самым греки установили союз математики и изучения явлений природы, который стал фундаментом всей современной науки. Вплоть до конца XIX в. поиск математических принципов, лежащих в основе природы, был поиском истины. Глубокое убеждение в том, что

---

[41] **В.Э.:** Лично меня больше всего поражает <u>ТОЧНОСТЬ</u> этого вычисления (252˙000 стадий или 39˙690 км против действительной длины 40˙007 км; ошибка 0,8%). Однако потом в Средние века расчет Эратосфена был оспорен, и считалось, что окружность Земли в 1,5 раза меньше. Именно это позволяло Христофору Колумбу надеяться легко достигнуть Индии, плывя в западном направлении. Если бы Колумб в своих расчетах основывался на результат Эратосфена, то он никогда не предпринял бы экспедицию на запад через Океан.

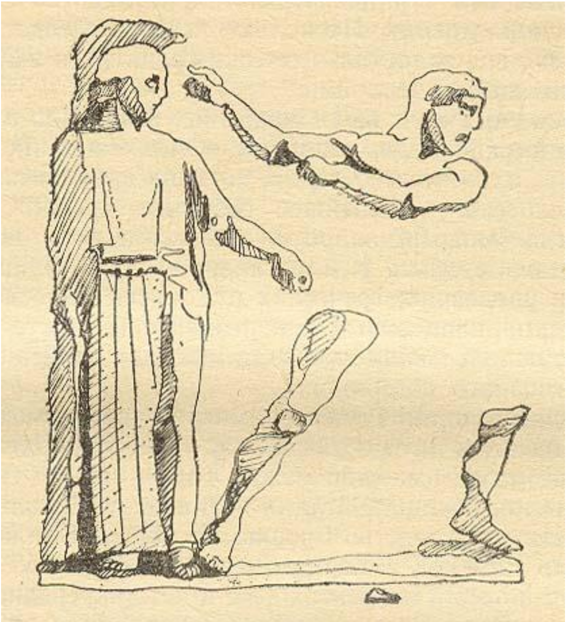
[42] **В.Э.:** То есть, пользуемся принципом, но числа долготы-то другие: не от Гринвича же Птолемей считал градусы. (Широта, конечно, всегда считалась от экватора).

математические законы открывают истины о природе, привлекало к математике самых глубоких и возвышенных мыслителей.

## *II. Расцвет математических истин*

Главной целью всех исследований внешнего мира должно быть открытие рационального порядка и гармонии, которые бог ниспослал миру и открыл нам на языке математики.

*Иоганн Кеплер*



Созданная греками великая цивилизация распалась по нескольким причинам. Первой причиной ее заката было постепенное завоевание римлянами Греции, Египта и Ближнего Востока. Распространяя свое владычество, римляне не ставили целью распространение своей культуры. Завоеванные территории римляне быстро превращали в колонии, из которых грабежом и поборами выкачивали колоссальные богатства.

Другой удар языческой культуре греков нанесло возникновение христианства. Создатели новой религии включили в нее множество греческих и восточных мифов и обычаев с очевидным намерением сделать христианство более доступным для новообращенных, но в то же время заняли непримиримую позицию по отношению к языческой науке и даже осмеивали математику, астрономию и естественные науки. Несмотря на жестокие преследования со стороны римлян, христианство продолжало распространяться и достигло такого могущества, что римский император Константин Великий Миланским эдиктом 313 г. провозгласил христианство официальной религией Римской империи. Несколько позднее Феодосий (правивший в 379–392 гг.) запретил языческие религии и в 392 г. приказал разрушить языческие храмы.[43]

Тысячи греческих книг были сожжены. В 47 г. до н.э. римляне подожгли египетские суда, стоявшие в Александрийской гавани. В огне пожара, охватившего город, погибла знаменитая Александрийская библиотека – ценнейшее собрание древних рукописей. В тот год, когда Феодосий запретил языческие религии, христиане разрушили храм Сераписа в Александрии – хранилище уникального собрания уцелевших греческих рукописей. Многие сочинения греческих авторов, написанные на пергаменте, были стерты христианами, которые использовали этот пергамент для записи собственных текстов религиозного содержания.

Последующая история Римской империи также имеет непосредственное отношение к интересующей нас теме. Император Феодосий разделил необъятную империю между двумя своими сыновьями – Гонорием, которому отошла Италия и Западная Европа, и Аркадием, получившим в наследство Грецию, Египет и Ближний Восток. Западная часть Римской империи была завоевана в V в. готами, и ее дальнейшая история относится уже к истории средневековой Европы. Восточная часть Римской империи сохранила независимость. В состав Восточной Римской империи, известной также под названием Византийской империи, входили собственно Греция и Египет, что в какой-то мере способствовало сохранению греческой культуры и сочинений греческих ученых.

Завоевание Египта (640 г.) сторонниками набиравшего силу ислама нанесло греческой культуре удар, от которого она уже не смогла оправиться. Все ранее уцелевшие книги были уничтожены; как говорит предание, халиф Омар провозгласил: «Либо в этих книгах написано то, что есть в Коране, и тогда нам незачем их читать, либо они утверждают то, что противоречит

---

[43] **Яглом:** В 529 г. византийский император Юстиниан приказал закрыть, как языческую, платоновскую Академию, существовавшую около 800 лет.

Корану, и тогда их не подобает читать». Почти полгода бани Александрии отапливались пергаментными свитками.

После захвата Александрии приверженцами пророка Мухаммеда (Магомета) большинство ученых уехали в Константинополь, ставший столицей Восточной Римской империи. И хотя традиционная греческая культура не могла процветать в неблагоприятной для нее атмосфере Византии, приток ученых и возможность продолжать научную работу в условиях относительной безопасности способствовали приумножению сокровищницы знаний, ставшей через 800 лет достоянием Европы.

Свой вклад в дальнейшее развитие математики как науки внесли индийцы и арабы. Некоторые идеи индийских и арабских математиков сыграли немалую роль в дальнейшем.[44] За тысячелетие (200–1200 гг.) индийцы (не без влияния греческих источников) получили важные результаты в области арифметики и алгебры. Арабы – созданный ими Арабский халифат в период расцвета простирался по всему побережью Средиземного моря, глубоко вторгался на Ближний Восток и объединял разноплеменные народы, исповедовавшие ислам, – усвоили лучшие достижения греческой и индийской математики и получили ряд новых результатов. Действуя в духе греков александрийского периода, арабы в своих трудах опирались и на дедуктивные рассуждения, и на эксперимент. Арабские ученые сказали свое слово в алгебре, географии, астрономии и оптике. Заботясь о передаче знаний грядущим поколениям, арабы создавали школы и даже высшие учебные заведения. К чести арабов следует заметить, что, будучи ревностными приверженцами своей религии, они тем не менее считали недопустимым ограничивать религиозными догмами математические и естественнонаучные исследования.

Хотя индийцы и арабы основывали свои исследования на прочном фундаменте, воздвигнутом греками, и внесли свой вклад в дальнейшее развитие эллинской математики и естествознания, они не смогли в такой мере, как греки, проникнуться пониманием структуры Вселенной. Арабы переводили труды греческих ученых и составляли к ним обширные комментарии, в том числе и критические, но их достижения не пополнили сокровищницу знаний, накопленных их предшественниками, сколько-нибудь существенно [см., впрочем, [9][45], гл. III]. К 1500 г. Арабский халифат распался, теснимый христианами на Западе и раздираемый междоусобицами на Востоке.

В то время как арабы строили и расширяли свою цивилизацию, в Западной Европе зарождалась новая цивилизация. В период средневековья (500–1500 гг.) в этой части мира был достигнут высокий уровень культуры. В европейской культуре того времени безраздельно господствовала христианская религия, а ее доктрины, при их определенных достоинствах, отнюдь не способствовали познанию физического мира. Вселенной, как утверждали отцы церкви, правит бог, и роль человека сводится к безропотному служению богу и снисканию милости божьей в надежде на спасение, дабы душа в загробном мире обрела радость и вечное блаженство. Земному существованию не следует придавать особого значения; трудности и страдания надлежит переносить с кротким терпением, ибо господь ниспосылает их, чтобы испытать, крепка ли вера человека. Нужно ли говорить, что в подобных условиях интерес к математике и естественным наукам, стимулом которого в античности служило изучение физического мира, переживал глубокий кризис. Мыслители средневековой Европы были ревностными искателями истин, но искали их в прилежном изучении Священного писания, а не в познании природы. Тем не менее в позднем средневековье философия поддерживала убеждение в правильности и постоянстве управляющих природой механизмов, хотя и считала, что в природе всё происходит по воле божьей.

В конце периода средневековья Европа испытала поистине революционные потрясения, которые привели к значительным изменениям. Среди многих причин, способствовавших превращению средневековой цивилизации в современную, самой важной с точки зрения интересующей нас темы было пробуждение интереса к трудам греческих авторов и вновь начавшееся изучение их. Сочинения античных ученых становились известными в арабских переводах и через

[44] Подробнее о достижениях арабских и индийских математиков рассказывается в гл. V. **В.Э.:** Надо только отдавать себе отчет в том, что под словом «арабы» следует понимать «авторы, писавшие на арабском языке». После завоеваний потомков Мухаммеда арабский язык стал официальным государственным языком на огромной территории, где проживали многочисленные народы, вынужденные всю общественную деятельность вести на арабском языке. Многие из «арабских» ученых были на самом деле персами, греками, тюрками и т.д.

[45] Юшкевич А.П. *История математики в средние века*. – М.: Физматгиз, 1961.

оригиналы, сохранившиеся в Византийской империи. После завоевания Византии турками в 1453 г. многие греческие ученые, захватив с собой книги, бежали на Запад. Именно из сочинений греков ведущие европейские мыслители того времени узнали, что природа построена на математических принципах и что план творения гармоничен, эстетически привлекателен и являет собой сокровенную истину о природе. Природа не только рациональна и упорядочена, но и действует в соответствии с неизбежными и неизменными законами. Европейские ученые приступили к исследованию природы как последователи древнегреческих философов.

Не подлежит сомнению, что многих европейских ученых побудило приступить к изучению природы возрождение греческих идеалов. Но темпы и широкий размах возрождения математики и естествознания были обусловлены и многими другими факторами. Силы, приводящие к крушению одной и вызывающие развитие другой культуры, многообразны и сложны. Процесс зарождения науки изучали многие ученые, и немало трудов по истории посвящено выяснению его причин. Мы ограничимся здесь кратким перечислением факторов, обусловивших тот интеллектуальный переворот, который ныне именуют Возрождением.

Возникновение класса свободных ремесленников небывало повысило интерес к материалам, способам их обработки и технологии, породив новые научные проблемы. Географические исследования, вызванные необходимостью поиска новых источников сырья и золота, способствовали распространению знаний о неведомых ранее странах и обычаях, бросавших своего рода вызов средневековой европейской культуре. В эпоху Реформации были отвергнуты многие католические доктрины, что усилило споры и даже скептицизм в отношении не только католицизма, но и протестантизма. Значение, которое пуритане придавали труду и полезности знаний, внедрение пороха, поставившее перед европейцами новые задачи военного характера (например, изучение траекторий пушечных ядер[46]), проблемы, связанные с плаванием в открытом море за тысячи миль от берега, – всё это создавало благоприятную атмосферу для исследования природы. Изобретение книгопечатания способствовало распространению знаний, за чем, однако, неусыпно следила церковь. И хотя специалисты расходятся во мнениях относительно того, в какой мере те или другие силы повлияли на изучение природы, для наших целей достаточно отметить одновременное влияние многих факторов и тот общепризнанный факт, что научные знания и стремления к их приобретению стали отличительной чертой современной европейской цивилизации.

В целом европейцы далеко не сразу откликнулись на новые веяния. В эпоху Возрождения для европейцев было более характерно изучение сочинений греческих авторов, чем следование греческим идеалам (см., например, [10][47]). Но к началу XVI в. провозглашенные греками цели научного исследования – изучение явлений природы на рациональной основе и поиск лежащего в их основе общего математического плана – проникли в умы европейцев. И тут европейцы столкнулись с серьезной проблемой: поставленные греками цели находились в противоречии с господствовавшей тогда в Европе культурной традицией. В то время как греки верили в математические принципы, лежащие в основе природы, в природу, неизменно и неукоснительно следующую некоторому идеальному плану, мыслители позднего средневековья приписывали и сотворение «плана», и всё происходящее в природе христианскому богу. Он был творцом и создателем – и всё в природе неукоснительно следовало его плану. Вселенная была творением бога и беспрекословно подчинялась его воле. Математики и представители естественных наук в эпоху Возрождения и на протяжении нескольких последующих столетий были правоверными христианами и полностью принимали эту доктрину. Но греческое учение о математических принципах устройства Вселенной противоречило догматам католической церкви. Каким же образом можно было примирить попытки понять Вселенную, сотворенную богом, с поисками математических законов мироздания? Примирить, казалось бы, непримиримое можно было, только создав новую доктрину, согласно которой христианский бог при сотворении Вселенной руководствовался математическими принципами. Так католическая доктрина, провозглашавшая первостепенной обязанностью постижение божьей воли и его творений, обрела форму поиска математического плана, по которому бог создал Вселенную. И действительно, как мы вскоре убедимся, работы математиков в XVI–XVII вв. и на протяжении большей части XVIII в. носили

[46] **Яглом:** Аристотель, с его чисто умозрительным подходом к физическим задачам, склонен был считать, что тяжелое тело, брошенное под углом к земной поверхности, движется по «простейшим линиям», т.е. описывает отрезок прямой, переходящий затем в дугу окружности; ясно, что столь грубое приближение к реальности никак не могло быть достаточным для артиллерийской практики.

[47] Баткин Л.М. Итальянские гуманисты: стиль жизни, стиль мышления. – М.: Наука, 1978.

характер религиозного поиска. Открытие математических законов природы было своего рода откровением, являвшим людям славу и величие божьего творения. Математическое знание (истина о замысле творца) было священным, как любая строка Библии. Разумеется, человек не мог надеяться постичь божественный план с такой же полнотой и ясностью, как сам господь бог, но человек мог по крайней мере со всей кротостью и смирением приблизиться к пониманию замысла творца и, следовательно, к пониманию созданного им мира.

Можно пойти дальше и утверждать, что математики того времени были уверены в существовании математических законов, лежащих в основе явлений природы, и настойчиво искали эти законы, будучи *a priori* убеждены в осмысленности своих поисков: ведь бог, создавая Вселенную, не мог не запечатлеть в ней математические законы. Каждое открытие закона природы провозглашалось еще одним подтверждением не столько мудрости исследователя, совершившего открытие, сколько божьей милости. Такие взгляды и убеждения математиков и естествоиспытателей являлись отражением всей интеллектуальной атмосферы, типичной для Европы эпохи Возрождения. Незадолго до того вновь открытые сочинения греческих авторов чем-то противоречили христианской культуре, пропитанной глубокой набожностью; однако духовные вожди эпохи Возрождения, взращенные в христианской традиции и одновременно испытавшие на себе притягательную силу греческой культуры, сумели соединить эти два течения, казалось бы противоречащие одно другому.

Наиболее ярким примером происходившего в Европе слияния греческого учения о «математизированной» Вселенной с характерной для эпохи Возрождения верой в божественное ее происхождение являются труды Николая Коперника и Иоганна Кеплера. Вплоть до XVI в. единственной надежной и практически применимой астрономической теорией была геоцентрическая система Гиппарха и Птолемея. Она была принята профессиональными астрономами и использовалась при составлении календарей и в навигационных расчетах. К работе над созданием новой астрономической теории приступил Коперник (1473–1543). Астрономию он изучал в Болонском университете, куда поступил в 1497 г. В 1512 г. Коперник приступил к исполнению обязанностей каноника Фромборкского собора в Вармии. Положение члена капитула оставляло Копернику немалый досуг для астрономических наблюдений и обдумывания будущей теории. После многолетних размышлений и наблюдений Коперник создал новую теорию движения планет, изложив ее в своем классическом труде «Об обращениях небесных сфер» [11][48]. Первый вариант рукописи Коперник закончил еще в 1507 г., но медлил с публикацией, опасаясь противодействия со стороны церкви. Книга Коперника вышла из печати в 1543 г. – в год его смерти.

В те времена, когда Коперник принялся размышлять на астрономические темы, теория Птолемея претерпела некоторые усовершенствования. К эпициклам, введенным Птолемеем, добавились новые эпициклы, которые понадобились для того, чтобы привести теорию в соответствие с новыми астрономическими данными, собранными главным образом арабами. Во времена Коперника для описания движений Солнца, Луны и пяти известных в тот период планет птолемеевой теории требовалось уже семьдесят семь кругов. Многие астрономы, как о том упоминает Коперник в предисловии к своему сочинению, стали считать теорию Птолемея чрезмерно сложной.

Изучение достижений греческих ученых привело Коперника к убеждению в существовании единого математического плана, по которому построена Вселенная и который обеспечивает ее гармонию. Эстетические соображения требовали наличия более изящной теории, чем то сложное нагромождение эпициклов, которое содержалось в позднем варианте теории Птолемея. Из прочитанных книг Коперник узнал, что некоторые греческие авторы, главным образом Аристарх Самосский (III в. до н.э.)[49], высказывали предположение, что Солнце покоится, а Земля обращается вокруг него и одновременно поворачивается вокруг своей оси, и он решил выяснить, к чему может привести подобная гипотеза.

Поворотный момент в размышлениях Коперника наступил тогда, когда он воспользовался для описания движений небесных тел птолемеевой схемой деферента и эпицикла (гл. I), с тем, однако, существенным различием, что в центре каждого деферента находилось Солнце. Земля также стала одной из планет, которая, вращаясь вокруг своей оси, движется по эпициклу. Такое

[48] Коперник Н. *О вращениях небесных сфер*. Серия «Классики науки». – М.: Наука, 1964.

[49] **Яглом:** Позицию Аристарха в этом вопросе разделял и столь глубоко ценимый всеми учеными эпохи Возрождения Архимед Сиракузский.

видоизменение позволило Копернику значительно упростить всю схему. В предложенной им гелиоцентрической системе оказалось возможным уменьшить общее число кругов (деферентов и эпициклов) до тридцати четырех вместо семидесяти семи кругов геоцентрической теории.

Еще более замечательное упрощение ввел Иоганн Кеплер (1571–1630) – одна из самых удивительных фигур в истории науки. Жизнь Кеплера омрачалась множеством личных несчастий и трудностей, вызванных религиозными и политическими событиями. В 1600 г. ему посчастливилось стать ассистентом знаменитого астронома Тихо Браге, производившего многочисленные астрономические наблюдения и систематизировавшего полученные результаты, – это была первая крупная попытка такого рода со времен античности. Наблюдения Тихо Браге и небольшое число наблюдений, произведенных самим Кеплером, оказались для последнего бесценными. После смерти Браге в 1601 г. Кеплер стал его преемником на посту придворного математика австрийского императора Рудольфа II.

Научные рассуждения Кеплера поражают необузданной фантазией. Подобно Копернику, Кеплер был склонен к мистике и разделял убеждение в том, что мир создан богом в соответствии с простым и исполненным красоты математическим планом. В своем сочинении «Космографическая тайна» (1596) Кеплер утверждал ([12][50], с. 176), что «сущность трех вещей... а именно: число, размеры и движения небесных орбит» – заключена в гармонии замысла, которым всеблагой и всемогущий бог руководствовался при сотворении мира. Мысль о гармонии мира стала у Кеплера доминантой. Но Кеплер был наделен всеми качествами, которыми, по нашим критериям, должен обладать ученый. Он умел, если было нужно, обуздывать свою неуемную фантазию, подчиняя ее холодному рационализму. Хотя его богатое воображение живо откликалось на любые новые теоретические концепции, обладающие эстетической привлекательностью, Кеплер сознавал, что теория должна находиться в согласии с наблюдениями, а к концу жизни с еще большей отчетливостью понял, что эмпирические данные могут подсказать исследователю фундаментальные принципы науки. Кеплер безжалостно отбрасывал самые привлекательные и многообещающие математические гипотезы, если оказывалось, что они не согласуются с наблюдениями, и именно это невероятное упорство в неприятии даже самых незначительных расхождений между теорией и наблюдениями, с которыми легко смирился бы любой другой ученый того времени, позволило Кеплеру стать творцом новых научных идей, решительно порывающих с многовековой традицией. К тому же Кеплер обладал скромностью, терпением и энергией, т.е. всеми теми качествами, которые позволяют великим людям выполнять возложенную на них нелегкую миссию.

Предпринятый Кеплером поиск математических законов природы, в существовании которых он был глубоко убежден, поначалу складывался неудачно: не один год ушел на проверку неверных гипотез. В предисловии к «Космографической тайне» Кеплер так формулирует программу своего сочинения:

> Я вознамерился доказать, что всеблагой и всемогущий бог при сотворении нашего движущегося мира и при расположении небесных орбит избрал за основу пять правильных тел, которые со времен Пифагора и Платона и до наших дней снискали столь громкую славу, выбрал число и пропорции небесных орбит, а также отношения между движениями в соответствии с природой правильных тел [имеются в виду так называемые платоновы тела – правильные тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. – *Ред*.] ([12][51], с. 176.)

Однако попытка раскрыть «тайну мироздания» на этой основе оказалась безуспешной: выводы теории, построенной на свойствах пяти правильных тел, расходились с результатами наблюдений, и, перепробовав множество вариантов в надежде спасти полюбившуюся ему идею, Кеплер был вынужден отказаться от намеченного подхода.

Зато необычайным успехом увенчались более поздние попытки Кеплера найти в природе гармонические математические отношения. Наиболее известные и значительные из полученных им результатов известны ныне под названием **три закона Кеплера** (законы движения планет). Первые два закона были опубликованы Кеплером в сочинении, вышедшем в 1609 г. под весьма длинным названием, так что обычно при ссылках на эту работу приводят либо начало названия –

---

[50] Данилов Ю.А., Смородинский Я.А. *Иоганн Кеплер: от «Мистерии» до «Гармонии»*. – УФН, 109, 1973, вып; 1, 175–209.

[51] Данилов Ю.А., Смородинский Я.А. *Иоганн Кеплер: от «Мистерии» до «Гармонии»*. – УФН, 109, 1973, вып; 1, 175–209.

«Новая астрономия», либо его заключительную часть – «Комментарии о движении планеты Марс». Особенно замечателен первый закон Кеплера, ибо, сформулировав его, Кеплер порвал с двухтысячелетней традицией, согласно которой небесные тела должны обязательно двигаться по кругам или сферам. Кеплер отказался от деферента и нескольких эпициклов, к которым прибегали при описании движения любой планеты и Птолемей, и Коперник, и показал, что для описания движения планеты достаточно указать один-единственный эллипс. Первый закон Кеплера гласит: каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце (рис. 2.1). Другой фокус любой эллиптической орбиты представляет собой «пустую» математическую точку, в которой ничего не находится. Первый закон Кеплера имеет первостепенное значение, поскольку позволяет легко и просто представить орбиты планет. Разумеется, Кеплер, как и Коперник, добавляет, что, описывая свою эллиптическую траекторию, Земля одновременно вращается и вокруг своей оси.

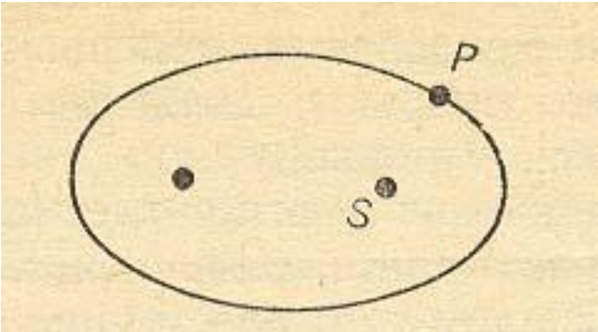



**Рис. 2.1.** Первый закон Кеплера. Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце

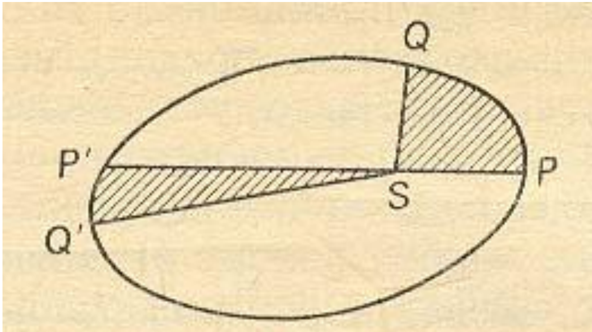



**Рис. 2.2.** Второй закон Кеплера: если дуги $PQ$ и $P'Q'$ орбиты планета проходит за одно и то же время, то площади секторов $PSQ$ и $P'SQ'$ равны

Но чтобы быть полезной, астрономии следует идти гораздо дальше: она должна уметь **предсказывать** положения планет. Если мы обнаружим, что какая-то планета в момент наблюдения находится, скажем, в точке $P$ (рис. 2.1), то нам может понадобиться узнать, когда она будет находиться в каком-либо другом положении, например в точке солнцестояния или равноденствия. А чтобы ответить на этот вопрос, необходимо знать, с какой скоростью планета движется по своей траектории.

Пытаясь найти скорость планеты, Кеплер сделал еще один решающий шаг. Коперник и греческие мыслители считали скорости планет постоянными. Планета у них двигалась по эпициклу равномерно, проходя равные дуги окружности за равные промежутки времени, а центр каждого эпицикла перемещался с постоянной скоростью по другому эпициклу или по деференту. Из наблюдений Кеплер знал, что планета движется по эллиптической орбите с изменяющейся скоростью, и в результате долгих и трудных поисков нашел правильный закон изменения скоростей. Кеплер открыл, что если планета, двигаясь по орбите, перемещается из точки $P$ в точку $Q$ (рис. 2.2), например, за один месяц, то на перемещение из точки $P'$ в точку $Q'$ ей также потребуется один месяц при условии, что площадь сектора $PSQ$ равна площади сектора $P'SQ'$. Так как точка $P$ расположена ближе к Солнцу, чем точка $P'$, то дуга $PQ$ должна быть длиннее дуги $P'Q'$, если площади секторов $PSQ$ и $P'SQ'$ равны. Следовательно, планеты движутся по орбитам с переменной скоростью: чем ближе к Солнцу, тем быстрее.

Открыв второй закон (равенства секториальных скоростей), Кеплер был необычайно рад. Хотя пользоваться вторым законом не так просто, как законом постоянства скоростей, совершенное открытие подкрепило глубочайшую убежденность Кеплера в том, что господь бог, создавая Вселенную, руководствовался математическими принципами. Бог действовал чуть более изощренно, чем предполагали предшественники Кеплера, но теперь со всей очевидностью было установлено, что скорости движения планет по орбитам подчиняются математическому закону.

Но еще одна важная проблема по-прежнему оставалась нерешенной: по какому закону изменяются расстояния, отделяющие планеты от Солнца? Проблема осложнялась тем, что расстояние от планеты до Солнца не постоянно. И Кеплер принялся за поиск нового принципа, учитывающего зависимость расстояния от времени. По его глубокому убеждению бог сотворил мир не только на основе математических принципов, но и гармонично, причем слово «гармония»

Кеплер понимал в самом прямом смысле. Так, он верил в существование музыки сфер, образующей гармонические созвучия, которые, хотя и невоспринимаемы на слух, но тем не менее их можно обнаружить при надлежащем «переводе» особенностей движения планет на ноты. Следуя этой путеводной идее и основываясь на поистине удивительной комбинации аргументов музыкального и математического характера, Кеплер устанавливает, что если $T$ – период обращения планеты вокруг Солнца, а $D$ – среднее расстояние от планеты до Солнца, то $T^2 = kD^3$, где $k$ – постоянная, одинаковая для всех планет. Это утверждение и есть третий закон Кеплера для движения планет, торжественно провозглашенный им в сочинении «Гармония мира» (1619).

Сформулировав третий закон, Кеплер разражается ликующим хвалебным гимном богу-творцу: «Вы, Солнце, Луна и планеты, восславьте его на своем неизъяснимом языке! Вы, небесные гармонии и все, кто постигает разумом его чудесные творения, воздайте ему хвалу! И ты, душа моя, восхвали создателя! Им всё сотворено, и в нем всё существует. Всё лучшее из того, что мы знаем, заключено в нем и в нашей жалкой науке».

О том, с какой силой Коперник и Кеплер верили, что бог сотворил мир гармоничным и простым, можно судить по тем возражениям, с которыми им приходилось сталкиваться. Даже по теории Птолемея все остальные планеты, кроме Земли, находились в движении, и это объяснялось особо легкой и потому легко приводимой в движение субстанцией, из которой якобы сотворены планеты. Но что могло привести в движение тяжелую Землю? Ни Коперник, ни Кеплер не могли ответить на этот вопрос. Не принимая идею о суточном вращении Земли вокруг собственной оси, противники ее ссылались на такой, казалось бы, очевидный факт: тела не могли бы удержаться на поверхности вращающейся Земли и, сорвавшись с нее, улетели бы в космическое пространство, подобно тому, как срываются предметы с вращающейся платформы. Против столь «неопровержимого» аргумента невозможно было возразить! Весьма неубедительным был ответ Коперника и на другой довод против суточного вращения Земли: вращающаяся Земля должна просто-напросто разлететься на части. На это Коперник возражал, что вращение Земли естественно и потому не может разрушить нашу планету. Должно быть, ощущая шаткость этого аргумента, Коперник, переходя в «контрнаступление», спрашивал, почему в таком-случае небо не разлетается на части в результате очень быстрого суточного вращения, предусматриваемого геоцентрической теорией. Еще один довод против суточного вращения Земли состоял в следующем: если бы Земля вращалась с запада на восток, то любой предмет, подброшенный в воздух, отклонялся бы к западу, так как Земля под ним успевала бы поворачиваться. А если бы Земля к тому же обращалась вокруг Солнца, то более легкие предметы на Земле отставали бы от более тяжелых, поскольку скорости падающих предметов, как утверждали греки и продолжали считать ученые эпохи Возрождения, пропорциональны их весу. На это Коперник возражал, что воздух обладает земной природой и поэтому движется в полном соответствии с движением Земли. Суть всех этих возражений против суточного вращения Земли и ее обращения вокруг Солнца сводилась к тому, что движение Земли не вписывалось в рамки общепринятой во времена Коперника и Кеплера теории движения, предложенной еще Аристотелем.

Ряд научных возражений против гелиоцентрической теории выдвигала и сама астрономия. Наиболее серьезное возражение вызывало то, что в гелиоцентрической теории звезды считались неподвижными. Но за полгода Земля перемещалась в пространстве на расстояние около 300 млн. км. Следовательно, если наблюдатель заметит направление на какую-нибудь звезду, то спустя полгода он должен обнаружить, что это направление изменилось. Во времена же Коперника и Кеплера такого рода изменения в направлениях на звезды обнаружены не были. На это возражение Коперник отвечал, что звезды расположены слишком далеко от Земли и поэтому направления на звезды изменяются незначительно. Его ответ не удовлетворил критиков, заметивших, что если бы звезды были так далеки, как утверждает Коперник, то их нельзя было бы наблюдать. Тем не менее ответ Коперника был правильным. Направление на ближайшую звезду изменяется за полгода всего лишь на 0,31", и впервые это было обнаружено в 1838 г. немецким астрономом Фридрихом Вильгельмом Бесселем, имевшим в своем распоряжении хороший телескоп.

Сторонники геоцентрической теории спрашивали также, почему мы не ощущаем движения Земли, если та обращается вокруг Солнца со скоростью около 30 км/с,[52] а скорость вращения вокруг собственной оси достигает на экваторе величины около 0,8 км/с? К тому же наши глаза убеждают нас в том, что Солнце обращается вокруг Земли. Для современников Кеплера ссылка на то, что мы не ощущаем движения с огромными скоростями, в котором сами участвуем, если верить новой астрономии, была неоспоримым контрдоводом. Все научные возражения против движения Земли были достаточно весомыми – от них нельзя было отмахнуться, как от брюзжания упрямцев, не желающих признать очевидную истину.

Коперник и Кеплер были людьми глубоко религиозными, и всё же они оба дерзнули отказаться от одной из основных догм христианства: человек есть центр Вселенной и средоточие всех помыслов божьих. Гелиоцентрическая теория, поместив в центре Вселенной Солнце, подорвала столь успокоительную догму церкви. Человек стал одним из множества «странников», влекомых Землей в холодных небесных просторах. Утверждение церковников о том, будто человек рожден для того, чтобы прожить славную жизнь и обрести райское блаженство после смерти, стало казаться весьма сомнительным. Утратило правдоподобие и утверждение о том, будто человек является объектом особого внимания со стороны господа бога. Коперник подорвал тезис о том, будто бы Земля является центром Вселенной, указав, что размеры Вселенной огромны и поэтому бессмысленно говорить о каком бы то ни было центре Вселенной. Но в глазах его современников это рассуждение вовсе не выглядело убедительным.

И всё же у Коперника и Кеплера был аргумент, перевешивавший все возражения против гелиоцентрической системы мира: им удалось построить более простую в математическом отношении, более гармоничную и эстетически более привлекательную теорию. Но если новая теория превосходит в математическом отношении старую, то для всякого, кто считал, что бог сотворил мир, используя при этом лучшую из теорий, любые сомнения в правильности гелиоцентрической теории должны были отпасть.

И в сочинении Коперника «О обращениях небесных сфер», и в многочисленных трудах Кеплера имеется немало высказываний, убедительно свидетельствующих, что Коперник и Кеплер были уверены в правильности построенной ими теории. Например, у Кеплера мы находим следующий отзыв о построенной им теории движения планет по эллиптическим орбитам: «Я клятвенно подтверждаю ее правильность и созерцаю ее красоту с неизъяснимым, переполняющим душу восторгом». Само название кеплеровского сочинения 1619 г. – «Гармония мира» и бесконечные дифирамбы богу, исполненные восхищения перед величием божественного математического плана, отражают убежденность Кеплера в правильности найденного им закона.

Сначала новая теория получила поддержку лишь у математиков. И это не было неожиданным. Только математики были убеждены в том, что Вселенная построена на простых математических принципах, только у математиков хватило интеллектуальной смелости, чтобы преступить через широко распространенные философские, религиозные и научные контраргументы и по достоинству оценить математические преимущества новой, революционной астрономии. Нужно было обладать неколебимой уверенностью в значимости математических принципов, на которых зиждется Вселенная, чтобы отстаивать новую теорию перед лицом сильнейшей оппозиции.

Однако затем гелиоцентрическая теория получила неожиданное подкрепление. В начале XVII в. был изобретен телескоп, и Галилей, прослышав об этом изобретении, сам построил телескоп и приступил к наблюдениям неба. Результаты наблюдений повергли в изумление современников Галилея. Он обнаружил у Юпитера четыре луны (в современные телескопы мы можем наблюдать 12 спутников Юпитера). Это открытие означало, что у движущейся планеты могут быть естественные спутники. Галилей наблюдал неровности и горы на поверхности Луны, пятна на Солнце, странные выступы по обе стороны экватора на Сатурне (сейчас мы знаем, что за выступы Галилей принял кольца Сатурна). Эти наблюдения явились еще одним свидетельством того, что планеты схожи с Землей и заведомо не являются идеальными телами, состоящими, как полагали греки и средневековые мыслители, из какого-то особого эфирного вещества. Млечный Путь, ранее казавшийся широкой светлой полосой, при наблюдении в телескоп «распался» на мириады звезд. В небесах были рассеяны множества других солнц и, возможно, другие планетные системы. Коперник предсказывал, что если бы человеческое зрение

[52] **В.Э.:** Размеры Земли были правильно найдены еще Эратосфеном, поэтому скорость суточного вращения Земли было нетрудно вычислить. Но разве во времена Коперника и Кеплера было уже известно расстояние до Солнца, чтобы можно было вычислить скорость годового обращения?

было более острым, то человек мог бы наблюдать фазы Венеры и Меркурия так же, как он может невооруженным глазом наблюдать различные фазы Луны.[53] С помощью телескопа Галилей обнаружил фазы Венеры. Произведенные наблюдения убедили Галилея в правильности теории Коперника, и в своем классическом труде «Диалог о двух главнейших системах мира – птолемеевой и коперниковой» (1632) он решительно выступает в защиту новой теории. Теория Коперника завоевала признание еще и потому, что позволяла астрономам, географам и мореплавателям упростить вычисления. К середине XVII в. научный мир принял гелиоцентрическую систему. Уверенность в истинности математических законов природы возросла неизмеримо.

Отстаивать тезисы об обращении Земли вокруг Солнца и о суточном вращении Земли вокруг своей оси в интеллектуальной атмосфере начала XVII в. было отнюдь не просто. Всем известно о процессе, который инквизиция устроила над Галилеем. Набожный католик Паскаль обнаружил свои сочинения в Индексе запрещенных книг за то, что в «Письмах к провинциалу» опрометчиво выразил порицание иезуитам:

> Напрасно также было с вашей стороны испрашивать в Риме декрет об осуждении мнения Галилея относительно движения Земли. Не этим будет доказано, что она стоит неподвижно; если бы имелись несомненные наблюдения, которые доказали бы, что именно она-то и вращается, то все люди в мире не помешали бы ей – вращаться, и себе – вращаться вместе с нею. ([13][54], с. 336.)

Коперник и Кеплер, не усомнившись, приняли синтез греческого учения о природе, основанной на математических принципах, и католического догмата о боге – творце и создателе Вселенной. Рене Декарт (1596–1650) вознамерился развить новую философию науки систематически, ясно и обоснованно. Декарт прежде всего был философом, во-вторых, он занимался проблемами космологии, в-третьих, был физиком, в-четвертых, – биологом и, только в-пятых, – математиком, хотя он и считается одним из основных творцов новой математики. Философия Декарта имеет весьма важное значение, поскольку именно она оказала решающее влияние на формирование самого стиля мышления, характерного для XVII в., и на таких гигантов, как Ньютон и Лейбниц.[55] Свою главную цель Декарт видел в нахождении способа, позволяющего устанавливать истину в любой области, и посвятил ей основной труд – «Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках» (1637) ([14][56], с. 5–66).

Создавая свою философию, Декарт начинает с того, что принимает лишь те факты, которые представляются ему несомненными. Каким же образом удается ему провести различие между приемлемыми и неприемлемыми фактами? В своих «Правилах для руководства ума» (написанных в 1628 г., но опубликованных лишь посмертно) Декарт утверждает: «В предметах нашего исследования надлежит отыскивать не то, что о них думают другие или что мы предполагаем о них сами, но то, что мы ясно и очевидно можем усмотреть или надежно дедуцировать, ибо знание не может быть достигнуто иначе» ([15][57], с. 55). Человеческий разум непосредственно, силой интуиции, воспринимает основные, ясные и очевидные истины, а вывод следствий составляет сущность философии знания. Таким образом, по Декарту, существуют лишь два акта мышления, позволяющих нам получать новое знание без опасения впасть в ошибку: интуиция и дедукция. Однако в своих «Правилах для руководства ума» Декарт отдает предпочтение интуиции:

> Под интуицией я разумею не веру в шаткое свидетельство чувств и не обманчивое суждение беспорядочного воображения, но понятие ясного и внимательного ума, настолько простое и

---

[53] **В.Э.:** Вообще существуют люди со зрением настолько острым, что они видят фазы Венеры невооруженным глазом; по-моему, это явление было известно еще в древности. Но фазы Венеры не доказывают, что Венера – тело, подобное Земле: фазы могут быть и у планеты, состоящей из «эфирного вещества».

[54] Паскаль Б. Письма к провинциалу, или Письма Людовика Монтальта к другу в провинцию и отцам иезуитам о морали и политике иезуитов. – Спб., 1898.

[55] **Яглом:** В то время как математика и философия древних греков были метафизичны – они ограничивались рассмотрением застывших состояний и игнорировали (текущие) процессы, – картезианская философия (этот термин идет от латинизированной формы фамилии Декарта – Картезий) была диалектична, что и сделало возможным возникновение дифференциального и интегрального исчислений.

[56] Декарт Р. *Рассуждение о методе с приложениями*. Серия «Классики науки». – М.: Наука, 1953.

[57] Декарт Р. *Правила для руководства ума*. – М.–Л.: Соцэкгиз, 1936.

> отчетливое, что оно не оставляет никакого сомнения в том, что мы мыслим, или, что одно и то же, прочное понятие ясного и внимательного ума, порождаемое лишь естественным светом разума и благодаря своей простоте более достоверное, чем сама дедукция, хотя последняя и не может быть плохо построена человеком ([15][58], с. 57).

В «Рассуждениях о методе» Декарт отстаивал существование разума и достоверного, надежного знания, которым разум обладает. Опираясь на первичную интуицию, Декарт пытается в «Размышлениях о методе» доказать существование бога. Затем с помощью рассуждений, явно образующих порочный круг, Декарт убеждает себя в том, что наша интуиция и метод дедукции должны приводить к верным заключениям, поскольку бог не стал бы вводить нас в заблуждение.[59] «Под словом «бог», – утверждает Декарт в «Метафизических размышлениях» (1641), – я подразумеваю субстанцию бесконечную, вечную, неизменную, независимую, всемогущую, создавшую и породившую меня и все остальные существующие вещи» ([16][60], с. 363).

Что же касается собственно математических истин, то в «Метафизических размышлениях» Декарт говорит следующее: «Я считал наиболее достоверными те истины, которые ясно воспринимал как относящиеся к фигурам, числам и другим материям,[61] принадлежащим арифметике, геометрии и вообще чистой и абстрактной математике... Только математикам дано достичь несомненности и ясности, ибо они исходят из того, что наиболее легко и просто». Источником математических понятий и истин являются не ощущения. Они носят врожденный характер и присущи нашему разуму от рождения; наделяет же ими наш разум сам бог. Чувственное восприятие материального треугольника не может помочь разуму составить представление об идеальном треугольнике. Для разума вполне очевидно, что сумма углов треугольника должна быть равна 180°.

Затем Декарт обращается к физическому миру. Можно не сомневаться, утверждает он, в том, что интуитивные представления, ясно сознаваемые разумом, и получаемые из них дедуктивные заключения применимы к физическому миру. Декарту было ясно, что бог при сотворении мира руководствовался математическими принципами. В «Рассуждениях о методе» он говорит о существовании «законов, установленных богом в природе, и понятий, запечатленных им в наших душах. Коль скоро мы достаточно поразмыслим над ними, то не станем более сомневаться в их проявлениях во всем, что существует и происходит в мире».

Далее Декарт утверждает, что законы природы неизменны, так как составляют неотъемлемую часть предустановленного богом математического плана. Еще до выхода в свет «Рассуждения о методе» Декарт в письме от 15 апреля 1630 г., адресованном отцу Марену Мерсенну, теологу и близкому другу математиков,[62] утверждал:

> Не бойтесь всюду провозглашать, что бог установил эти законы в природе так же, как суверен устанавливает законы в своем королевстве... И подобно тому, как король обретает тем большее величие, чем меньше знают его подданные, мы считаем величие бога непостижимым и не мыслим себя без небесного царя. Кто-нибудь возразит Вам, заметив, что если бог установил эти истины, то он же может изменить их, как изменяет король свои законы. На подобное возражение следует ответить, что такое действительно возможно, если может изменяться божья воля. Я не считаю эти истины вечными и неизменными по тем же причинам, по которым сужу о боге.

В приведенном отрывке из письма Декарт отрицает распространенное в его времена мнение о том, что бог непрестанно вмешивается во всё, что происходит в природе.[63]

---

[58] Декарт Р. *Правила для руководства ума*. – М.–Л.: Соцэкгиз, 1936.

[59] **Яглом:** Рационалисты Декарт и Лейбниц были глубоко верующими людьми, но в их философских и научных системах богу отводилось весьма ограниченное место. В частности, Декарт (а вслед за ним в еще более отчетливой форме Лейбниц) считал бога «гарантом истинности логики», так как ее аксиомы (как и любые другие математические аксиомы!) не доказываются, а принимаются на веру.

[60] Декарт Р. Избранные произведения. – М.: Госполитиздат, 1950.

[61] **В.Э.:** Лучше было бы переводить как «..другим сущностям».

[62] **Яглом:** Католический монах Марен Мерсенн (1588–1648) не был особенно крупным ученым (хоть его имя сохранилось в современной теории чисел); однако организующая роль его в науке XVII в. была огромной: в эту эпоху отсутствия научных журналов Мерсенн был своего рода центром оживленной переписки ученых и у него всегда можно было получить информацию о текущих успехах математиков разных стран.

[63] **Яглом:** В этом отношении позиции рационалистов Декарта и Лейбница, с одной стороны, и мистика Ньютона, с другой, были принципиально различными (ср. гл. III).

Для изучения физического мира Декарт хотел бы использовать только математику, ибо, по его собственному признанию в «Рассуждении о методе», «из всех, кто когда-либо занимался поиском истины в науках, только математикам удалось получить некие доказательства, т.е. указать причины, очевидные и достоверные». По мнению Декарта, одной лишь математики было бы вполне достаточно для изучения физического мира. В «Принципах философии» (1644) он пишет:

> Я прямо заявляю, что мне неизвестна иная материя телесных вещей, как только всячески делимая, могущая иметь фигуру и движимая, иначе говоря, только та, которую геометры обозначают названием величины и принимают за объект своих доказательств; я ничего в этой материи не рассматриваю, кроме ее делений, фигур и движения,[64] и, наконец, ничего не сочту достоверным относительно нее, что не будет выведено с очевидностью, равняющейся математическому доказательству. И так как этим путем, как обнаружится из последующего, могут быть объяснены все явления природы, то, мне думается, не следует в физике принимать других начал, кроме вышеизложенных, да и нет оснований желать их. ([16][65], с. 504–505.)

В «Принципах философии» Декарт прямо называет математику сущностью всех наук. По словам Декарта, он «не приемлет и не надеется найти в физике каких-либо принципов, отличных от тех, которые существуют в Геометрии или в Абстрактной Математике, потому, что они позволяют объяснить все явления природы и привести доказательства, не оставляющие сомнений». Объективный мир, по Декарту, есть не что иное, как материализованное пространство или воплощенная геометрия. Его свойства поэтому должны выводиться из первых принципов геометрии (термин «геометрия» Декарт и его современники употребляли практически как синоним математики, так как геометрия тогда составляла значительную часть всей математики)[66].

Размышлял Декарт и над вопросом, почему мир должен быть доступен анализу математическими средствами. По мнению Декарта, наиболее фундаментальными и надежными свойствами материи являются форма, протяженность и движение в пространстве и во времени. Все эти свойства поддаются математическому описанию. Так как форма сводится к протяженности, Декарт утверждал: «Дайте мне протяженность и движение, и я построю Вселенную». Все физические явления, добавляет Декарт, – результат механического действия молекул, приводимых в движение силами. Силы также подчиняются неизменным математическим законам.

Каким образом объяснял Декарт вкусы, запахи, краски, тембр, высоту и громкость звуков, если внешний мир, по его воззрениям, состоял лишь из движущейся материи? В этих вопросах Декарт принял точку зрения греков, а именно учение Демокрита о первичных и вторичных качествах. Первичные качества – материя и движение – существуют в физическом мире; вторичные качества – вкус, запах, цвет, тепло, приятность или резкость звука – не более чем результат воздействия первичных качеств на органы чувств человека, осуществляемого бомбардировкой этих органов внешними атомами. Реальный мир – совокупность допускающих математическое описание движений предметов в пространстве и во времени, а вся Вселенная в целом представляет собой огромную гармоничную машину, построенную на математической основе. Естественные науки (а в действительности любая дисциплина, пытающаяся установить порядок и меру) подчинены математике. Правило IV декартовских «Правил для руководства ума» гласит:

> К области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера, и совершенно несущественно, будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь

---

[64] **Яглом:** Заметим, что древнегреческие ученые классического и эллинистического периодов, следуя метафизическим установкам элейской школы и Аристотеля, стремились полностью изгнать из геометрии движение: если сам перечень доказанных Фалесом (или его последователями) теорем, приводимый последующими авторами, свидетельствует об определяющей роли соображений симметрии и движений в дедуктивной геометрической системе ионийцев, то у Евклида использование движений в геометрии было старательно сведено к возможному минимуму.

[65] Декарт Р. Избранные произведения. – М.: Госполитиздат, 1950.

[66] **Яглом:** Слово «геометрия» служило в античный период синонимом слова «математика» еще и в силу специфических условий развития науки в Древней Греции: ведь, не имея рациональной системы счисления и правил записи чисел (не говоря уж об алгебраической символике!), греки даже алгебраические теоремы и понятия часто вынуждены были излагать на геометрическом языке. Величайший авторитет греческой науки привел к тому, что в течение тысячелетий, когда первоначальные причины отождествления геометрии со всей математикой уже отпали, люди по-прежнему зачастую именовали математику геометрией (ср. также ниже прим.12).

другое, в чем отыскивается эта мера, таким образом, должна существовать некая общая наука, объясняющая всё относящееся к порядку и мере, не входя в исследование никаких частных предметов, и эта наука должна называться не иностранным, но старым, уже вошедшим в употребление именем всеобщей математики, ибо она содержит в себе всё то, благодаря чему другие науки называются частями математики. Насколько она превосходит своей легкостью и доступностью все эти подчиненные ей науки, видно из того, что она простирается на предметы всех этих наук, так же как и многих других, и если она заключает в себе некоторые трудности, то такие же трудности содержатся и в последних, имеющих сверх того и другие ... . ([15][67], с. 68.)

Вклад Декарта собственно в математику сводится не к открытию новых истин, а к введению мощного метода, который мы ныне называем аналитической геометрией (гл. V)[68]. Появление аналитической геометрии технически революционизировало методологию математики.

Декарт внес заметный вклад и в естествознание, хотя по величине и значимости он несравним с достижениями Коперника, Кеплера или Ньютона. Теория вихрей Декарта (гл. III) была ведущей космологической теорией XVII в. Декарт стал основоположником философии механицизма, согласно которой все явления природы, в том числе все отправления человеческого тела (но не душа), сводятся к движениям частиц, подчиняющимся законам механики. В самой механике Декарт сформулировал закон инерции, ныне известный как первый закон Ньютона: если на тело не действуют никакие силы и оно находится в состоянии покоя, то оно будет и дальше пребывать в состоянии покоя, а если тело движется, то оно будет продолжать прямолинейно двигаться с постоянной скоростью.

Еще одним увлечением Декарта была оптика (расчет линз). Часть «Геометрии» Декарта и вся «Диоптрика», задуманная им как приложение к «Рассуждению о методе», посвящены оптике. Вместе с Виллебродом Снеллиусом Декарт разделяет честь открытия **закона преломления света**, описывающего, что происходит со светом при резком изменении свойств среды, в которой он распространяется, например, при переходе из воздуха в стекло или воду. Начало математизации оптики положили еще греки, но первым, кто систематически изложил оптику как математический предмет, был Декарт. Он внес также важный вклад в географию, метеорологию, ботанику, анатомию (он собственноручно производил вскрытия трупов животных), зоологию, психологию и даже медицину.

Хотя картезианская философия, т.е. философские и естественнонаучные взгляды Декарта и его последователей, в чем-то и противоречила учению Аристотеля и средневековой схоластике, в одном важном отношении Декарт всё же был схоластом: все утверждения о природе сущего и реальности он строил на основе чистого разума. Декарт верил в априорные истины и в то, что разум своей силой может выработать полное знание обо всем. Так, Декарт на основе априорных рассуждений сформулировал законы движения. (Работая над биологическими и некоторыми другими проблемами, Декарт в действительности производил эксперименты и делал важные выводы из своих наблюдений. Но даже сводя явления природы к их чисто механическим проявлениям, Декарт многое сделал, чтобы избавить науку от мистицизма и оккультизма.)

Свою лепту в общее убеждение в истинности математики и математического фундамента естествознания внес и великий математик XVII в. (хотя и не столь влиятельный философ, как Декарт) Блез Паскаль (1623–1662). В отличие от Декарта, говорившего о самоочевидных для разума интуитивных понятиях, Паскаль говорил об истинах, воспринимаемых душой. Истина должна быть либо «самоочевидной» для души, либо логическим следствием подобных истин. В своих «Мыслях» Паскаль сообщает нам следующее:

Наше знание первых принципов, таких, как пространство, время, движение, число, достоверно, как всякое знание, получаемое нами путем умозаключений. В действительности же это знание дает нам душа, и инстинкт есть необходимый фундамент, на котором наш разум строит свои заключения. Требовать от души доказательства первых принципов, прежде чем согласиться принять их, для разума столь же бессмысленно и абсурдно как для души требовать интуитивного представления о всех утверждениях, доказываемых разумом, прежде чем принять их.

[67] Декарт Р. *Правила для руководства ума*. – М.–Л.: Соцэкгиз, 1936.

[68] **Яглом:** Декарт также преобразовал и модернизировал алгебраическую символику, придав математическому языку ту форму, которой придерживались элементарные учебники чуть ли не до самых последних десятилетий; это демократизировало всю математическую науку и облегчило приобщение к ней большего количества людей.

Для Паскаля наука – это исследование сотворенного богом мира. Заниматься наукой ради удовольствия дурно. Видеть конечную цель науки в удовольствии означает совращать исследование с истинного пути, ибо при таком подходе тот, кто занимается наукой, обретает «голод или тягу к учению, ненасытную жажду знаний»[69]. «Такое занятие наукой проистекает из априорного взгляда на себя как на центр всего, а не из стремления искать во всех окружающих явлениях природы присутствие бога и его славу».

Среди выдающихся мыслителей, стоявших у колыбели современной математики и естествознания, Галилео Галилей (1564–1642) занимает столь же почетное место, как и Декарт. Разумеется, Галилей также разделял убеждение, что природа сотворена по математическому плану и что творцом плана был сам господь бог. Широкую известность получил следующий отрывок из небольшого сочинения Галилея «Пробирных дел мастер» (1623):

> Философия природы написана в величайшей книге, которая всегда открыта перед нашими глазами, – я разумею Вселенную, но понять ее сможет лишь тот, кто сначала выучит язык и постигнет письмена, которыми она начертана. А написана эта книга на языке математики, и письмена ее – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без коих нельзя понять по-человечески ее слова: без них – тщетное кружение в темном лабиринте.[70]

Итак, природа проста и упорядоченна, и всё происходящее в ней закономерно и необходимо. Природа действует в соответствии с совершенными и неизменными математическими законами. Источником всего рационального в природе является божественный разум. Бог вложил в мир строгую математическую необходимость, которую люди постигают лишь с большим трудом, хотя их разум устроен по образу и подобию божественного разума. Следовательно, математическое знание не только представляет собой абсолютную истину, но и священно, как любая строка Священного писания. Исследование природы – занятие столь же благочестивое, как и изучение Библии. «В действиях Природы господь бог является нам не менее достойным восхищения образом, чем в божественных стихах Писания».

В «Диалоге о двух главнейших системах мира – птолемеевой и коперниковой» (1632) Галилей утверждал, что в математике человек достигает вершины всякого знания, ничуть не уступающего тому знанию, которое является уделом божественного разума. Конечно, божественный разум знает и воспринимает бесконечно больше математических истин, чем человек, но если говорить о достоверности, то те немногие истины, которые доступны человеческому разуму, известны человеку с такой же полнотой, как и богу.

Хотя Галилей был профессором математики и придворным математиком, его главным вкладом в европейскую культуру стали не математические теоремы, а те многочисленные усовершенствования, которые он внес в научный метод. Наиболее значительным из них явился его отказ от поисков физического объяснения, которое Аристотель считал истинной целью естествознания, и переход к поиску математического описания. Различие между этими двумя принципиальными методологическими установками отчетливо видно на следующем примере. Брошенное тело падает на землю, причем падение происходит со всё возрастающей скоростью. Аристотель и следовавшие его методологии средневековые ученые пытались найти причину падения тела, предположительно механическую. Вместо поиска причины Галилей описал свободное падение математическим законом, имеющим в современных обозначениях вид $s = 4{,}9t^2$, где $s$ – расстояние (в метрах), которое тело в свободном падении пролетает за $t$ секунд. Эта формула ничего не говорит о том, почему тело падает, и, казалось бы, дает гораздо меньше того,

---

[69] **Яглом:** Характерно, что в последние годы своей жизни Паскаль (как позже и Ньютон) полностью оставил науку, целиком обратившись к теологии и моральной философии. Нам кажется, что равный вклад, внесенный в науку XVII в. рационалистами (Галилей, Декарт, Гюйгенс, Лейбниц), верящими во всемогущество человеческого разума, и мистиками (Кеплер, Паскаль, Ньютон), более полагающимися на озарение, чем на строгую логику, напоминает об ограниченности формально-логического подхода к природе и о существовании двух взаимно-дополнительных путей постижения истины: дискурсивного и интуитивного (по этому поводу см., например, [32: Фейнберг Е.Л. Кибернетика, логика, искусство. – М.: Радио и связь, 1981).

[70] **Яглом:** Сегодня нас может удивить, что Галилей считал «буквами» того языка, на котором записаны все законы природы, «треугольники, окружности и другие геометрические фигуры». Но ведь единственной математикой, доступной Галилею, была геометрия древних греков, а до открытия дифференциального и интегрального исчисления (в значительной степени стимулированного трудами Галилея) и возникновения концепции дифференциального уравнения оставалось еще больше полвека.

что хотелось бы знать о явлении. Но Галилей был уверен, что знание природы, которого мы стремимся достичь, должно быть описательным. В своей книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки» Галилей устами своего героя Сальвиати утверждал:

> Сейчас неподходящее время для занятий вопросом о причинах ускорения в естественном движении, по поводу которого различными философами было высказано столько различных мнений: одни приписывали его приближению к центру, другие – постепенному частичному уменьшению сопротивления среды, третьи – некоторому воздействию окружающей среды, которая смыкается позади падающего тела и оказывает на него давление, как бы постоянно его подталкивая; все эти предположения и еще многие другие следовало бы рассмотреть, что, однако, принесло бы мало пользы. Сейчас для нашего автора будет достаточно, если мы рассмотрим, как он исследует и излагает свойства ускоренного движения (какова бы ни была причина ускорения), приняв, что моменты скорости, начиная с перехода от состояния покоя, идут возрастая в том же простейшем отношении, как и время ([17][71], с. 243–244.)

Итак, по Галилею, содержательные научные вопросы следовало отделить от поиска «причины причин» и отказаться от чисто умозрительных рассуждений о физических предпосылках явлений. Галилей мог бы сформулировать свою идею в виде следующей максимы для ученых: ваше дело не рассуждать – почему, а устанавливать – сколько (т.е. находить количественные соотношения).

Весьма вероятно, что первая реакция на этот пункт намеченной Галилеем программы даже в наши дни была бы отрицательной. Описание явлений на языке формул не более чем первый шаг исследования, возразили критики. Истинная функция науки в действительности была осознана последователями Аристотеля и состоит в объяснении причин, по которым происходит явление. Даже Декарт возражал против установки Галилея на поиск описательных формул. «Всё, что Галилей говорит о телах, свободно падающих в пространстве, – утверждал Декарт, – лишено всякого основания, так как сначала ему надлежало бы установить природу тяжести». Кроме того, продолжал Декарт, Галилею следовало бы поразмыслить о первопричинах наблюдаемого явления. Но, как мы теперь знаем, принятое Галилеем решение ограничиться описанием явления было наиболее глубоким и наиболее плодотворным новшеством, когда-либо внесенным в методологию естествознания. Как станет ясно из дальнейшего, значение этого нововведения состояло в том, что оно более четко и определенно, чем ранее, поставило естествознание под эгиду математики.

Еще один методологический принцип, выдвинутый Галилеем, состоял в том, что любая область естествознания должна быть построена по образу и подобию математики. Здесь необходимо выделить два существенных момента. Математика начинает с аксиом, т.е. самоочевидных, ясных истин. Из них с помощью дедуктивного вывода она устанавливает новые истины. Следовательно, любая область естественных наук также должна начинать с аксиом, или принципов, и строиться дедуктивно. Кроме того, из исходных аксиом надлежит извлекать как можно больше следствий. Такой же план, по существу, был предложен еще Аристотелем, видевшим конечную цель в дедуктивной структуре естественных наук, образцом для которых должна служить математика.

Но в том, что касается способа получения первых принципов, Галилей решительно отошел от греков, мыслителей средневековья и Декарта. Предшественники Галилея и Декарт усматривали источник первых принципов в человеческом разуме. Стоит лишь разуму поразмыслить над любым кругом явлений, как он тотчас же постигнет фундаментальные истины. При этом в качестве примера, подтверждающего всесилие человеческого разума, обычно ссылались на математику. Такие аксиомы, как «Если к равным [частям] прибавить равные, то получатся равные же [части]» или «Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну», якобы самопроизвольно возникают, когда мы начинаем размышлять о числах или о фигурах, – и они считались неоспоримыми истинами. Греки установили несколько физических принципов, которые в их глазах были столь же привлекательными, как математические аксиомы. Так, они считали вполне очевидным, что все тела во Вселенной должны занимать определенное (естественное) место. Не менее очевидным казалось и то, что состояние покоя более согласуется с сутью вещей, чем состояние движения. Не подлежало сомнению и утверждение о том, что, для

---

[71] Галилей Г. Избранные труды в 2-х томах. Т. 2. – М.: Наука, 1964.

того, чтобы привести тело в состояние движения и далее поддерживать это состояние, к нему необходимо приложить определенную силу. Вера в то, что человеческий разум способен сам по себе выработать фундаментальные принципы, не отрицает пользу наблюдений для установления первых принципов. Но наблюдения как бы помогают разуму припомнить первые принципы, подобно тому, как при взгляде на знакомое лицо в памяти всплывают различные сведения о нем.

Все эти ученые, по мнению Галилея, сначала решали, как должен был бы функционировать мир в соответствии с предустановленными первыми принципами. Галилей же считал, что в физике, в отличие от математики, источником первых принципов должны быть эксперимент и анализ его результатов. Чтобы получать правильные и фундаментальные первые принципы, физику надлежит с бóльшим вниманием прислушиваться к голосу природы, а не к тому, чему отдает предпочтение разум. Галилей открыто критиковал естествоиспытателей и философов, принимавших те или иные «законы» только потому, что те согласовывались с их априорными представлениями относительно того, как должна была бы вести себя природа. Природа, утверждал Галилей, не сотворила сначала мозг человека, а затем мир так, чтобы он был воспринимаем человеческим разумом. В адрес средневековых схоластов, вторивших Аристотелю и занимавшихся толкованием различных суждений в его сочинениях, Галилей язвительно заметил, что знание берется из наблюдений, а не из книг. Бесполезно спорить об Аристотеле. Те, кого он называл бумажными учеными, хотели бы уподобить естественнонаучные исследования изучению «Энеиды» или «Одиссеи» и превратить науку о природе в свод текстов. «Перед законом природы бессильны любые авторитеты».

Некоторые ученые эпохи Возрождения и современник Галилея Фрэнсис Бэкон (1561–1626) также пришли к выводу о необходимости экспериментального подхода к изучению природы. В этом пункте своей программы Галилей не намного опередил других.[72] Тем не менее, Декарт не смог по достоинству оценить мудрость галилеевского подхода с его упором на эксперимент. Наши органы чувств, утверждал Декарт, способны лишь вводить в заблуждение. Только разум может развеять туман подобных заблуждений и постичь истину. Из врожденных первых принципов, постигаемых разумом, мы можем выводить явления природы и понимать их. В действительности, как мы уже упоминали, Декарт в своей научной работе широко использовал эксперимент и требовал, чтобы теория находилась в согласии с экспериментом, однако в своей философии он продолжал связывать истины исключительно разумом.

Мнение Галилея о том, что один лишь разум не может служить источником правильных физических представлений, разделяли лишь немногие физики. Так, взгляды Декарта критиковал Христиан Гюйгенс. С критикой чистого рационализма выступали и английские физики. Обращаясь к членам Королевского общества, Роберт Гук (1635–1705) заявил: «Имея перед глазами так много фатальных примеров ошибок и заблуждений, совершенных большей частью человечества, когда она опиралась только на силу человеческого разума, мы начали теперь проверять все гипотезы свидетельством органов чувств».

Разумеется, Галилей понимал, что эксперимент может привести к неправильному принципу и что дедуктивный вывод из неверного принципа порождал бы ошибочные заключения. Он предлагал и, по-видимому, использовал эксперименты для проверки своих умозаключений и для отбора первых принципов. Но вопрос о том, сколь широко экспериментировал сам Галилей, остается открытым. Некоторые из предложенных им экспериментов иногда называют «мысленными»: Галилей лишь мысленно представлял, что должно получиться в результате такого эксперимента. Тем не менее, выдвинутый им принцип, согласно которому физические принципы должны опираться на эксперимент и наблюдение, был революционным и имел решающее значение. Сам Галилей не сомневался в том, что некоторые из принципов, использованных богом при сотворении мира, могут быть постигнуты чистым разумом, но, проложив путь эксперименту, Галилей одновременно заронил и сомнения. Если источником основных принципов естествознания должен быть эксперимент, то не должен ли эксперимент служить источником и математических аксиом? Этот вопрос не беспокоил ни самого Галилея, ни его преемников вплоть до начала XIX в. Математика продолжала наслаждаться своим привилегированным положением.

Свою естественнонаучную деятельность Галилей сосредоточил на проблемах материи и движения. Он независимо от Декарта установил принцип инерции, ныне известный как первый

[72] **Яглом:** В XIII в. решающее значение эксперимента для точного знания постулировал английский монах-францисканец Роджер Бэкон (ок. 1214–1299), взгляды которого, однако, полностью противоречили мировоззрению его времени, что определило трагический характер жизни Р. Бэкона.

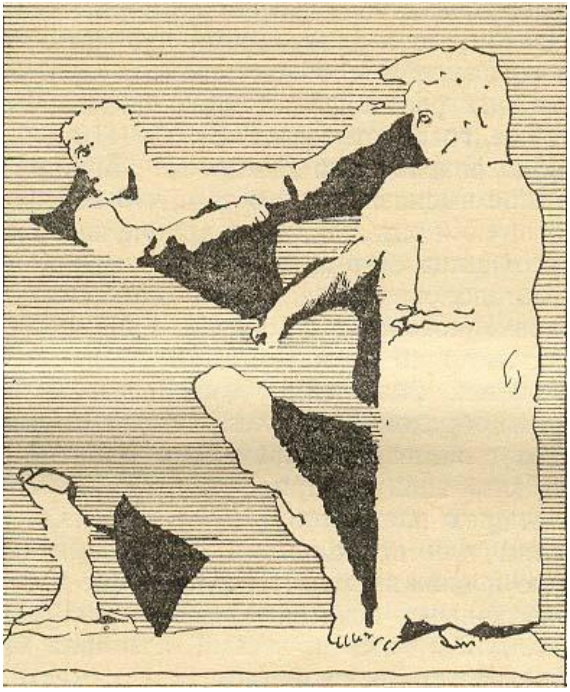
закон движения Ньютона. Галилею удалось также получить законы движения поднимающихся вертикально вверх и падающих тел, движения тел по наклонной плоскости, а также тел, брошенных под некоторым углом к горизонту. Галилей показал, что тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе. Резюмируя, можно сказать, что Галилей исследовал законы движения земных тел. И хотя, как во всяком большом открытии, у Галилея заведомо были предшественники, никто из них не сознавал с такой ясностью идеи и принципы, которым должно руководствоваться научное исследование, и не проводил эти принципы в жизнь столь просто и эффективно.

Будучи глубоко новаторской по духу, философия и методология науки Галилея подготовила почву для свершений Исаака Ньютона, который родился в тот самый год, когда ушел из жизни Галилей.

## *III. Математизация науки*

Так как во всяком учении о природе имеется науки в собственном смысле лишь столько, сколько имеется в ней априорного познания, то учение о природе будет содержать науку в собственном смысле лишь в той мере, в какой может быть применена в нем математика.[73]

*Иммануил Кант*



Если убеждение в том, что математические законы естествознания представляют собой истины, органически включенные господом богом в созданный им план Вселенной, и подвергалось каким-то сомнениям, то они были окончательно развеяны Исааком Ньютоном (1643–1727). Хотя Ньютон был профессором математики Кембриджского университета и по праву считается одним из величайших математиков всех времен, его значение как физика превосходит его математическую репутацию. Работы Ньютона положили начало новой эре и послужили основой новой методологии естествознания, отводившей математике более значительную и фундаментальную роль, чем это было прежде.

В трудах Коперника, Кеплера, Декарта, Галилея и Паскаля было доказано, что некоторые явления природы протекают в соответствии с математическими законами. Все эти ученые не только были глубоко убеждены в том, что бог сотворил Вселенную по математическому плану, но и утверждали, что математическое мышление человека согласуется с божественными предначертаниями и потому пригодно для расшифровки этого плана. Философия (или методология) науки, господствовавшая в XVIII в., была сформулирована и подробно разработана Декартом. Именно Декарту принадлежит известное высказывание о том, что вся физика сводится к геометрии, которую и сам Декарт, и другие авторы той поры рассматривали как синоним математики. В то же время картезианство – научная методология Декарта, разделяемая большинством предшественников Ньютона, в том числе Гюйгенсом, отводила естествознанию автономную от математики роль, вменяя в обязанность человеку поиск физических объяснений явлений природы.

Греки, главным образом Аристотель, также пытались объяснять явления природы с помощью физических понятий. Главенствующая в классическую эпоху теория утверждала, что вся материя построена из четырех элементов (земли, воздуха, огня и воды), наделенных одним или несколькими свойствами (тяжестью, легкостью, сухостью и влажностью). Наблюдаемое поведение материи объясняется различными сочетаниями этих свойств. Так, огонь стремится вверх, потому что он легкий, а земная материя падает, так как она наделена таким свойством, как тяжесть. К свойствам, которые греки приписывали четырем основным элементам, средневековые ученые добавили множество новых, например симпатию, вызывающую взаимное притяжение тел (железа и магнита), и антипатию, которой объяснялось взаимное отталкивание тел.

Декарт отверг все эти свойства и стал утверждать, что все физические явления могут быть объяснены материей и движением. Существенным признаком материи Декарт считал протяженность, а так как протяженность измерима, то она может быть сведена к математике. Более того,

[73] Кант И. Сочинения в 6-ти томах, т. 6. – М.: Мысль, 1966, с. 59.

протяженность не существует вне материи. Следовательно, пустота невозможна. Материя же взаимодействует с материей лишь при непосредственном соприкосновении и состоит из мельчайших невидимых частиц, различных по своим размерам, форме и другим свойствам. Так как частицы материи слишком малы и поэтому их невозможно наблюдать, для объяснения более крупных по своим масштабам явлений необходимо принять определенные гипотезы о поведении частиц. Всё пространство заполнено частицами, образующими иногда скопления значительных размеров, например планеты Солнечной системы. Такова сущность теории вихрей Декарта.

Декарт стал основоположником механистической теории. Его последователями были французский философ и священник Пьер Гассенди (1592–1655), английский философ Томас Гоббс (1588–1679) и голландский математик и физик Христиан Гюйгенс (1629–1695). Так, в «Трактате о свете» (1690) Гюйгенс попытался объяснить оптические явления, исходя из гипотезы, что всё пространство заполнено частицами эфира, по которым – от одной к другой – передается движение света. Полное название сочинения Гюйгенса – «Трактат о свете, в котором объяснены причины того, что с ним происходит при отражении и преломлении, в частности при странном преломлении исландского шпата» [19][74]. В первой главе «Трактата о свете» Гюйгенс утверждает, что в истинной философии «причину всех естественных явлений постигают при помощи соображений механического характера», и добавляет, что, по его мнению, «так и следует поступать, в противном случае приходится отказаться от всякой надежды когда-либо и что-нибудь понять в физике» ([19], с. 12). Гассенди расходится во мнении с Гюйгенсом лишь в одном: он считает, что атомы движутся в пустоте.

Физические гипотезы, касающиеся поведения мельчайших частиц, позволяли, по крайней мере, в общих чертах, объяснить крупномасштабные явления в природе; однако они имели чисто умозрительный характер. Кроме того, физические гипотезы Декарта и его последователей были не количественными, а лишь качественными. Они позволяли объяснять явления, но не давали возможности предсказывать: результаты наблюдения или экспериментов для картезианцев всегда оказывались неожиданными. Лейбниц назвал весь свод подобных физических гипотез не более чем прекрасной выдумкой.

Начало иной философии науки было положено Галилеем, который провозгласил, что наука должна стремиться к математическому описанию явления, а не к физическому объяснению его. Кроме того, физические принципы надлежит выводить из экспериментов и индуктивных умозаключений, сделанных на основании результатов опытов. Следуя этой философии, Ньютон под влиянием своего учителя Исаака Барроу изменил весь ход научного развития, приняв вместо физических гипотез математические посылки, что позволило делать достоверные предсказания, к которым призывал Фрэнсис Бэкон. Следует особо подчеркнуть, что свои математические посылки Ньютон выводил из экспериментов и наблюдений.

Предтечей Ньютона был Галилей, изучавший свободное падение тела и движение тел, брошенных под углом к горизонту. Исаак Ньютон рассмотрел гораздо более широкую проблему, занимавшую умы ученых в середине XVII в.: можно ли установить связь между законами движения земных тел, открытыми Галилеем, и законами движения небесных тел, открытыми Кеплером? Идея о том, что законы любого движения должны следовать из небольшого числа универсальных законов, может показаться грандиозной и необычной, хотя религиозным математикам XVII в. она представлялась весьма естественной. Бог сотворил Вселенную, и все явления природы не могут не подчиняться единому плану творца. А коль скоро Вселенную создавал единый разум, то весьма вероятно, что все явления в природе протекают в соответствии с одним и тем же сводом законов. Математикам и естествоиспытателям XVII в., занятым разгадыванием плана творца, поиск некоего общего, скрытого за внешним различием движений земных и небесных тел, казался вполне разумным.

Осуществляя свою программу поиска универсальных законов, Ньютон получил немало важных результатов в алгебре и геометрии. Особенно велик его вклад в создание дифференциального и интегрального исчисления (гл. VI). Но сколь ни значительны математические достижения Ньютона, все они были лишь средствами решения естественнонаучных проблем. Собственно математику Ньютон считал слишком сухой и скучной материей и видел в ней не более чем удобный способ выражения законов природы. Все свои помыслы Ньютон сосредоточил на поиске естественнонаучных принципов, которые можно было бы положить в

[74] Гюйгенс Х. *Трактат о свете*. – М.–Л.: ОГИЗ, 1935.

основу единой теории движения земных и небесных тел. К счастью, как выразился Дени Дидро, природа удостоила Ньютона своим доверием.

Разумеется, Ньютон был хорошо осведомлен о законах движения, установленных Галилеем. Но открытые Галилеем законы не могли служить сколько-нибудь надежным путеводителем. Из первого закона движения было ясно, что на планеты со стороны Солнца должна действовать какая-то сила притяжения, в противном случае каждая планета двигалась бы по прямой. Идея о силе притяжения, постоянно действующей на планеты со стороны Солнца, приходила в голову многим еще до того, как Ньютон приступил к своим исследованиям: Копернику, Кеплеру, знаменитому физику-экспериментатору Роберту Гуку, физику и известному архитектору Кристоферу Рену, астроному Эдмонду Галлею и другим. Предполагалось, что на дальние планеты эта сила действует слабее, чем на ближние, и что величина силы изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца до планеты. Но до Ньютона все размышления о силе тяготения не выходили за рамки чистого философствования.[75]

Ньютон принял гипотезу, высказанную его предшественниками, а именно: он предположил, что сила $F$ взаимного притяжения любых двух тел с массами $m$ и $M$, удаленных друг от друга на расстояние $r$, выражается формулой

$$F = G\frac{mM}{r^2}. \qquad (1)$$

В этой формуле $G$ – постоянная, т.е. имеет одно и то же значение при любых $m$, $M$ и $r$. Значение этой постоянной зависит от того, в каких единицах измеряются масса, сила и расстояние. Ньютон обобщил также установленные Галилеем законы движения земных тел. Эти обобщения известны под названием трех законов Ньютона.[76] Первый закон Ньютона, сформулированный еще Декартом и Галилеем, гласит: «Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не принуждается приложенными силами изменить это состояние». Второй закон утверждает, что «изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по той прямой, по которой эта сила действует». Согласно третьему закону, «действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны» ([20][77], с. 39–41). Опираясь на три закона движения и закон всемирного тяготения (1), Ньютон получил возможность описывать движения земных тел.

В теории движения небесных тел Ньютон одержал блестящую победу, доказав, что три закона Кеплера, полученные им методом проб и ошибок на основании результатов многолетних наблюдений Тихо Браге, представляют собой не что иное, как математические следствия из закона всемирного тяготения и трех законов движения. Тем самым Ньютон показал, что движение планет, которое, как полагали до него, не имеет ничего общего с движением земных тел, в действительности подчиняется тем же законам, что и движение земных тел. В этом смысле Ньютон «объяснил» законы движения планет. Кроме того, поскольку законы Кеплера согласуются с результатами наблюдений, их вывод из закона всемирного тяготения стал превосходным подтверждением правильности самого этого закона.

Те немногие следствия из законов движения и закона всемирного тяготения, о которых мы упомянули, – всего лишь небольшой пример того, что было дано свершить Ньютону. Закон

---

[75] **Яглом:** Резкая полемика между Ньютоном и Гуком по поводу приоритета в открытии закона (1) всемирного тяготения оставляет столь тягостное впечатление еще и потому, что целиком относящийся по своей научной идеологии к «доньютоновскому» периоду английский ученый Гук так, видимо, и не понял, что его претензии на это выдающееся открытие были неосновательными. Гук выписал формулу (1), исходя из чисто умозрительных соображений: «ясно», что гравитационная сила, создаваемая массой М, должка быть пропорциональна М; с другой стороны, поскольку на расстоянии $r$ от массы эта сила равномерно распространяется по сфере площади $4\pi r^2$, то сила в каждой точке этой сферы должна быть обратно пропорциональна $r^2$. То, что эти чисто эвристические соображения могут лишь подсказать ответ, но никак не доказать его, Гуку понять было не дано.

[76] **В.Э.:** Это теперь их называют «законами Ньютона». А в самой работе Ньютона нет даже слова «закон», не говоря уже о его имени. Там они называются просто теоремами («предложениями», как у Евклида).

[77] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т.7. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

всемирного тяготения он применил к объяснению непонятного ранее явления – океанских приливов. Их вызывают силы притяжения, действующие со стороны Луны и в меньшей степени со стороны Солнца на большие массы воды. По данным о высоте лунных приливов (приливов, вызываемых притяжением Луны) Ньютон вычислил массу Луны. Ньютон и Гюйгенс оценили величину экваториального утолщения Земли. Ньютон и другие показали, что движение комет также согласуется с законом всемирного тяготения. Тем самым кометы были признаны законными членами Солнечной системы; их перестали считать случайными пришельцами из космических глубин или знамениями, сулящими грозную кару и гибель. Ньютон показал, что вследствие экваториального утолщения Земли земная ось под действием притяжения Луны и Солнца не указывает неизменно на одну и ту же звезду, а описывает конус с периодом 26˙000 лет. Это долгопериодическое изменение направления земной оси приводит ежегодно к небольшим сдвигам в наступлении весеннего и осеннего равноденствий, отмеченным Гиппархом за 1800 лет до Ньютона. Так Ньютон объяснил смещение равноденствий.

Наконец, используя приближенные методы, Ньютон решил некоторые задачи, относящиеся к движению Луны. Например, известно, что плоскость, в которой происходит движение Луны, несколько наклонена к плоскости движения Земли. Как показал Ньютон, это обусловлено взаимным притяжением Солнца, Земли и Луны, описываемым законом всемирного тяготения. Ньютон и его непосредственные преемники в науке вывели из закона всемирного тяготения так много важных следствий о движениях планет, комет и Луны, а также о колебаниях уровня моря, что на протяжении последующих двух столетий считалось, что они дали полное объяснение системы мира.

В своей грандиозной деятельности Ньютон придерживался принципа, выдвинутого Галилеем, – искать не физическое объяснение, а математическое описание. Ньютон не только свел воедино огромное число экспериментальных данных и теоретических результатов Кеплера, Галилея и Гюйгенса, но и поставил математическое описание в основу всех своих естественно-научных трудов и предсказаний. В предисловии к первому изданию своего основного труда, носившего весьма примечательное название «Математические начала натуральной философии»[78], Ньютон говорит:

> Так как древние, по словам Паппуса, придавали большое значение механике при изучении природы, то новейшие авторы, отбросив субстанции и скрытые свойства, стараются подчинить явления природы законам математики.
>
> В этом сочинении имеется в виду тщательное развитие приложений математики к физике ... поэтому и сочинение это нами предлагается как математические основания физики. Вся трудность физики, как будет видно, состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления. Для этой цели предназначены общие предложения, изложенные в книгах первой и второй ... Затем по этим силам, также при помощи математических предложений, выводятся движения планет, комет, Луны и моря. ([20][79], с. 1–3.)

Мы видим, что математике в «Началах» Ньютона отводится главная роль.

У Ньютона имелись все основания отдавать количественным математическим законам предпочтение перед физическим объяснением: центральным физическим понятием ньютоновской небесной механики была сила тяготения, а действие этой силы он не мог объяснить с помощью физических понятий. Представление о силе тяготения, действующей между любыми двумя массами, даже если их разделяют сотни миллионов километров пустого пространства, казалось столь же невероятным, как и многие свойства, придуманные для объяснения физических явлений последователями Аристотеля и средневековыми схоластами. Представление о дальнодействующих силах было особенно неприемлемым для современников Ньютона, упорно настаивавших на механистических объяснениях и привыкших воспринимать силу как результат непосредственного соприкосновения тел, при котором одно тело «толкает» другое.[80] Отказ от

---

[78] **Яглом:** Надо иметь в виду, что под «натуральной философией природы» во времена Ньютона понимали *физику*, так что латинское название великого труда Ньютона можно перевести и как «Математические основы физики».

[79] Ньютон И. *Математические начала натуральной философии*. Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т.7. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

[80] **Яглом:** Напомним, что М. Фарадей (1791–1867) и даже Д.К. Максвелл (1831–1879) в аналогичной ситуации, а именно в своем истолковании электромагнитных явлений, исходили из механистических объяснений сил притяжения и отталкивания заряженных тел, опирающихся на фиктивные «силовые

физического объяснения и прямая замена его математическим описанием явления потрясли даже великих ученых. Гюйгенс считал идею гравитации «абсурдом», поскольку действие через пустое пространство исключало всякий механизм передачи силы; он поражался тем, что Ньютон взял на себя тяжкий труд и выполнил громоздкие вычисления, которые не обосновывались ничем, кроме математического принципа тяготения. Против чисто математического описания гравитации возражали и многие другие современники Ньютона, в том числе Лейбниц, который сразу, как только прочитал в 1690 г. ньютоновские «Начала», занял в отношении их резко критическую позицию и продолжал критиковать идею дальнодействия до самой своей смерти. Вольтер, возвратившись в 1727 г. с похорон Ньютона, с иронией заметил, что в Лондоне царит вакуум, тогда как в Париже ощущается пленум (пространство, заполненное тончайшей материей) – ведь во Франции всё еще царствовала картезианская философия. Попытки объяснения феномена дальнодействия не прекращались до начала XX в.

И всё же поразительные научные достижения Ньютона стали возможны только благодаря тому, что он всецело полагался на математическое описание даже в тех случаях, когда физическое понимание явления полностью отсутствовало. Вместо физического объяснения Ньютон дал количественную формулировку действия силы тяготения, полезную уже тем, что она имела поддававшийся проверке смысл. Именно поэтому Ньютон в первой книге «Начал» замечает: «Эти понятия должно рассматривать как математические, ибо я еще не обсуждаю физических причин и места нахождения сил». Ту же мысль он повторяет и в конце своего сочинения:

> В наши намерения входило только установить величину и свойства этой силы по явлениям и применить то, что нам удалось открыть в некоторых простейших случаях, как законы, позволяющие математически оценивать действия силы в более сложных случаях... Мы говорим *математически* (курсив Ньютона) во избежание всяких вопросов о природе этой силы, которую мы не понимаем достаточно для того, чтобы строить какие-либо гипотезы... ([20][81], с. 29.)

В письме Ньютона преподобному Ричарду Бентли от 25 февраля 1692 г. есть такие строки:

> То, что гравитация должна быть внутренним, неотъемлемым и существенным атрибутом материи, позволяя тем самым любому телу действовать на другое на расстоянии через вакуум, без какого-либо посредника, с помощью которого и через который действие и сила могли бы передаваться от одного тела к другому, представляется мне настолько вопиющей нелепостью, что, по моему глубокому убеждению, ни один человек, сколько-нибудь искушенный в философских материях и наделенный способностью мыслить, не согласится с ней. Вызывать тяготение должен некий агент, постоянно действующий по определенным законам, но материален он или нематериален, я предоставляю судить моим читателям.

Несмотря на успехи, достигнутые Ньютоном в математическом описании явлений гравитации, отсутствие понимания физического механизма этого явления продолжало волновать ученых, но все их усилия найти приемлемое объяснение не увенчались успехом. На это обстоятельство обращает внимание епископ Джордж Беркли в своем диалоге «Алсифрон, или Мелкий философ» (1732) ([21][82], с. 443–464):

> **Евфранор**. ... Прошу тебя, Алсифрон, не играй терминами: оставь слово *сила*, изринь всё прочее из своих мыслей, и ты увидишь, какова точная идея силы.
>
> **Алсифрон**. Под силой я понимаю в телах то, что вызывает движение и другие ощутимые действия.
>
> **Евфранор**. А не существует ли что-нибудь отличное от этих действий?
>
> **Алсифрон**. Существует.
>
> **Евфранор**. Тогда, будь добр, исключи всё, что отличается, и те действия, к которым оно приводит, и поразмысли над тем, что такое сила в собственной, точной идее.

---

трубки» в (несуществующем) эфире, что исключало необходимость апелляция к дальнодействию. [Впрочем, эти ошибочные объяснения физической природы явлений не помешали названым великим ученым прийти к правильным выводам, в частности к знаменитым уравнениям Максвелла, дающим исчерпывающее количественное описание рассматриваемых феноменов.]

[81] Ньютон И. *Математические начала натуральной философии*. Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т.7. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

[82] Беркли Дж. Сочинения. – М.: Мысль, 1978.

**Алсифрон**. Должен признаться, нелегкое это дело.

**Евфранор**. Поскольку ни ты, ни я не можем определить идею силы и поскольку, как ты сам заметил, разум и способности людей во многом схожи, мы можем предположить, что и у других людей нет ясного представления об идее силы.

Ньютон надеялся, что природу силы тяготения всё же удастся исследовать и изучить. Вопреки надеждам Ньютона и общепринятой точке зрения, что это действительно возможно, никому так и не удалось объяснить, как действует сила тяготения – физический смысл этой силы не был установлен. Сила тяготения оставалась научной фантастикой, навеянной способностью человека воздействовать на тела. Тем не менее, математические выводы из количественного закона оказались столь эффективными, что развитый Ньютоном подход стал неотъемлемой частью физической науки. Естествознание пожертвовало физическим объяснением ради математического описания и математического предсказания.

Развитие естествознания в XVII в. нередко резюмируют одной фразой, утверждая, что совместными усилиями физики и математики XVII в. построили механистическую картину мира, действующего как хорошо отлаженная машина. Разумеется, физика Аристотеля и средневековых ученых также была механистической, если под этим понимать описание движения под действием таких сил, как тяжесть, легкость, симпатия и т.п., действующих на частицы и протяженные тела. Но ученые XVII в., особенно картезианцы, отказались от множества свойств, придуманных их предшественниками для описания движения, и ограничили силу вполне материальным и очевидным: весом или силой, которую необходимо приложить к телу, чтобы бросить его. Такую доньютоновскую физику с полным основанием можно было бы назвать «материальной». Математика могла описывать явления, но решающей роли она не играла.

Существенное различие между механикой Ньютона и физикой его предшественников заключалось не в введении математики для описания движения тел. В ньютоновской механике математика была не только вспомогательным средством для физики, более удобным, кратким, ясным и общим языком, – она стала источником фундаментальных понятий. Гравитационная сила – не более чем название математического символа. Точно так же во втором законе Ньютона ($F = ma$: сила равна произведению массы на ускорение) под силой понимается всё, что сообщает массе ускорение. При этом устанавливать физическими методами природу силы больше не было нужды. Так Ньютон говорил о центростремительной и центробежной силах и использовал их, не задумываясь над механизмом их действия.

Даже понятие массы в ньютоновской механике не более чем фикция. Разумеется, масса – это материя, а материя, как «доказал», пнув камень, великий лексикограф Сэмюэл Джонсон,[83] реальна. Но для Ньютона первичным свойством массы является ее инерция, смысл которой выражен первым законом Ньютона, а именно; если на тело не действуют никакие силы, то оно сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения. Почему свободное тело движется по прямой, а не по окружности? Даже Галилей первоначально считал, что движение по инерции должно быть круговым. А почему свободное тело должно двигаться с постоянной скоростью? Почему в отсутствие сил масса не остается всегда в состоянии покоя или не движется с постоянным ускорением? Свойство инерции – чисто умозрительная (или, как сказал бы физик, фиктивная) концепция, а отнюдь не экспериментальный факт. Масса никогда не бывает свободной от действия сил. Единственный элемент физической реальности в ньютоновских законах движения – это ускорение. Ускорения тел можно наблюдать и измерять.

Хотя Ньютон неохотно отказался от физических объяснений, введением «математизированных» понятий, их количественных формулировок и чисто математическими выводами из выписываемых формул Ньютон преобразовал всю физику XVII в.[84] «Математические начала натуральной философии» открыли перед человечеством новый мир – Вселенную, управляемую единым сводом физических законов, допускающих точное математическое выражение. «Начала» содержали грандиозную схему, охватывающую падение камня, океанские приливы, движения

[83] **Яглом:** Классик английской литературы С. Джонсон (1709–1784) более всего прославился как составитель первого научного «Словаря английского языка» (1755), в силу чего его часто называют «великим лексикографом».

[84] В «Оптике» [22: Ньютон И. Оптика, или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света. – М.: Гостехиздат, 1954.] Ньютон всё же обратился к физическим объяснениям; однако, как мы знаем теперь, они не были адекватны реальным процессам и, кроме того, не охватывали весь комплекс оптических явлений.

планет и их естественных спутников, блуждания комет и величественное движение звездного свода. Ньютоновская схема стала решающим доводом, убедившим весь мир в том, что природа основана на математических принципах и что истинные законы природы – математические. «Начала» Ньютона означали в некотором роде конец физического объяснения. Лагранж однажды заметил, что Ньютон был счастливейшим из смертных, ибо существует только одна Вселенная, и именно Ньютону удалось открыть управляющие ею законы.

На протяжении всего XVIII в. математики, составлявшие тогда большинство ученых, неукоснительно следовали ньютоновской схеме. Первым научным трудом, строго выдержанным в духе математического подхода Ньютона, можно считать «Аналитическую механику» Лагранжа (1788). В этой книге механика рассматривалась с чисто математических позиций и упоминания о физических явлениях встречались крайне редко. Более того, Лагранж даже бравировал тем, что ему не были нужны ни ссылки на физические явления, ни геометрические чертежи. Когда начали формироваться новые разделы физики – гидродинамика, теория упругости, электромагнетизм, их создатели избрали тот же подход, какой использовал Ньютон применительно к механике и астрономии. Количественный, математический подход стал сущностью точного естествознания, и наиболее надежное убежище истина обрела в математике.

Бунтари XVII в. обнаружили качественный, физический мир, познанию которого служило математическое описание. В наследство своим потомкам они оставили математический, количественный мир, в котором конкретность физического мира была заменена математическими формулами. Именно их трудами было положено начало той математизации природы, которая процветает и поныне. Джеймс Джинс, заметивший в своей «Загадочной Вселенной» (1930), что «Великий архитектор Вселенной всё более представляется нам чистым математиком», опоздал со своей сентенцией по меньшей мере на два столетия.

Хотя, как уже говорилось, самому Ньютону было отнюдь не легко полагаться исключительно на математические формулы, не подкрепляемые никакими физическими объяснениями, он не только отстаивал свои математические начала натуральной философии (естествознания), но и был твердо убежден, что они правильно передают описываемые явления. На чем было основано такое убеждение? Как и все математики и естествоиспытатели того времени, Ньютон верил в то, что бог сотворил мир в соответствии с математическими принципами. В этом отношении весьма красноречивы доводы в подкрепление тезиса о боге как творце и создателе Вселенной, приводимые Ньютоном в «Оптике» (1704):

> Главная обязанность натуральной философии – делать заключения из явлений, не измышляя гипотез, и выводить причины из действий до тех пор, пока мы не придем к самой первой причине, конечно, не механической... Что находится в местах, почти лишенных материи, и почему Солнце и планеты тяготеют друг к другу, хотя между ними нет плотной материи? Почему природа не делает ничего понапрасну и откуда проистекает весь порядок и красота, которые мы видим в мире? Для какой цели существуют кометы и почему все планеты движутся в одном и том же направлении по концентрическим орбитам, в то время как кометы движутся по всевозможным направлениям по очень эксцентрическим орбитам, и что мешает падению неподвижных звезд одной на другую? Каким образом тела животных устроены с таким искусством и для какой цели служат их различные части? Был ли построен глаз без понимания оптики, а ухо без знания акустики? Каким образом движения тел следуют воле и откуда инстинкт у животных? ... И если эти вещи столь правильно устроены, не становится ли ясным из явлений, что есть бестелесное существо, живое, разумное, всемогущее, которое в бесконечном пространстве, как бы в своем чувствилище, видит все вещи вблизи, прозревает их насквозь и понимает их вполне благодаря их непосредственной близости к нему? ([22][85], с. 280–281.)

На свои вопросы Ньютон отвечает в третьем издании «Математических начал натуральной философии»:

> Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и власти могущественнейшего и премудрого существа... Сей управляет всем не как душа

[85] Ньютон И. *Оптика, или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света*. – М.: Гостехиздат, 1954.

мира, а как властитель Вселенной и по господству своему должен именоваться господь бог вседержитель. ([20][86], с. 659.)

Ньютон уверял также, что господь бог – искусный математик и физик. Эту мысль он высказывает в письме преподобному Ричарду Бентли от 10 декабря 1692 г.:

> Таким образом, чтобы сотворить эту [Солнечную] систему со всеми ее движениями, потребовалась причина, понимавшая и сравнивавшая количества материи в нескольких телах Солнца и планет и проистекавшие от этого силы тяготения; расстояния первичных планет от Солнца и вторичных планет [т.е. спутников] от Сатурна, Юпитера и Земли; скорости, с которыми эти планеты могли обращаться вокруг количеств материи в центральных телах. И то, что сравнить и согласовать всё это удалось в столь многих телах, свидетельствует, что причина эта была не слепой или случайной, а весьма искусной в механике и геометрии.

Задача науки состоит в том, чтобы раскрывать блистательные замыслы творца, отмечает в начале того же письма Ньютон, и далее: «Когда я писал свой трактат о нашей системе [«Математические начала натуральной философии»], мне хотелось найти такие начала, которые были бы совместимы с верой людей в бога; ничто не может доставить мне большее удовлетворение, чем сознание того, что мой труд оказался не напрасным». В эпистолярном наследии Ньютона имеется немало писем аналогичного содержания.

Истинными мотивами математической и естественнонаучной деятельности Ньютона были его религиозные воззрения. Все догмы христианского вероучения Ньютон считал божественными откровениями. В боге видел он причину всех естественных сил, всего существующего и происходящего. Божественное промышление, воля и контроль, по его мнению, присутствовали во всех явлениях. С юных лет и на протяжении всей жизни Ньютон критически изучал и интерпретировал религиозные произведения, а в конце жизни целиком посвятил себя теологии. Сохранились его книги «Замечания на книгу пророка Даниила и апокалипсис св. Иоанна» ([77][87]; опубл. 1733 г.) и «Хронология древних царств с исправлениями» (не опубликована), а также сотни рукописных страниц, в которых Ньютон пытался установить хронологию библейских событий. Занятие наукой было для него своего рода богослужением, хотя, по его убеждению, в собственно естествознании не должно быть места ни мистическим, ни сверхъестественным силам. Ньютон испытывал глубокое удовлетворение при мысли, что его «Начала» открыли, как далеко простирается десница всемогущего господа бога. Укрепление основ религии Ньютон считал гораздо более важным, чем развитие математики и естествознания, поскольку науки призваны лишь открывать тот план, руководствуясь которым бог создал Вселенную. Упорную и подчас утомительно однообразную научную работу Ньютон оправдывал тем, что она, по его мнению, укрепляет религию, открывая всё новые и новые доказательства божественного порядка во Вселенной. Занятие наукой Ньютон считал столь же богоугодным, как и изучение Священного писания. Мудрость творца можно постигать, открывая шаг за шагом структуру Вселенной. В боге Ньютон видел первопричину всего, что бы ни происходило. Так, чудеса объяснялись вмешательством бога в нормальный ход событий. Бог своим вмешательством мог также исправлять сбои и нарушения в природе, подобно тому, как часовой мастер чинит неисправный механизм.

Если вера в то, что бог сотворил Вселенную и что роль математики и естествознания сводится к восстановлению плана творения, нуждалась в подтверждении, то такое подтверждение дал Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716). Как и Декарт, Лейбниц был прежде всего философом, но отличался еще большей разносторонностью, чем Декарт. Ему принадлежат первоклассные работы в математике, физике, истории, логике. Отличался Лейбниц и на поприще юриспруденции, дипломатии и политики. Подобно Ньютону, Лейбниц рассматривал научную деятельность как религиозную миссию, возложенную на ученых. В одном недатированном письме (1699 или 1700 г.) Лейбниц писал: «Главную цель всего человечества я вижу в познании и развитии божьих чудес. Думаю, что именно для этого бог отдал под власть человека весь земной шар».

---

[86] Ньютон И. *Математические начала натуральной философии*. Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т.7. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

[87] Ньютон И. *Замечания на книгу пророка Даниила и апокалипсис св. Иоанна*. – Пгр.: изд. Суворина, 1915.

В «Теодицее» (1710) Лейбниц утверждал широко распространенную тогда идею о том, что бог есть тот разум, который сотворил наш тщательно спланированный мир. Гармония между реальным миром и миром математики, по Лейбницу, объясняется единством реального мира и бога. На этом же основании Лейбниц решительно отстаивал применимость математики к реальному миру. *Cum deus calculat, fit mundus* (как господь вычисляет, так мир и устроен). Между математикой и природой существует предустановленная гармония. Вселенная устроена наиболее разумным образом, наш мир – наилучший из всех возможных миров, и рациональное мышление открывает его законы.

Истинное знание внутренне присуще нашему разуму, хотя в отличие от Платона Лейбниц не склонен был ссылаться здесь на предшествующее существование человека. Наши органы чувств не могут научить нас таким необходимым истинам, как то, что бог существует или что все прямые углы равны. Математические аксиомы принадлежат к числу врожденных истин, поскольку являются принципами дедуктивных наук, таких, как механика и оптика, в которых «ощущения, разумеется, необходимы, дабы мы могли составить какое-то представление о чувственных вещах, равно как эксперименты необходимы для установления кое-каких фактов... Но сила доказательства зависит от разумности понятий и истин, которые только и способны научить нас распознавать то, что необходимо...»

Математическая и естественнонаучная деятельность Лейбница была весьма обширной и чрезвычайно ценной. В дальнейшем нам еще представится случай поговорить о ней. Но достижения Лейбница, как и Декарта, были направлены в основном на усовершенствование математического аппарата. Он внес значительный вклад в разработку основ математического анализа, теории дифференциальных уравнений, проницательно указал на важность некоторых зарождавшихся тогда научных понятий, например величины, называемой теперь кинетической энергией (которую он сам именовал живой силой). В то же время нельзя не отметить, что Лейбниц не открыл ни одного фундаментального закона природы. Его философия науки, отводившая первостепенную роль математике, скорее была направлена на то, чтобы побуждать человека к открытию истин.

Хотя ученые XVIII в. значительно расширили границы и математики, и естествознания, найденные ими аргументы в пользу истинности математики и математических законов естествознания в основном повторяли аргументы их предшественников. Несколько членов семейства Бернулли, особенно братья Якоб (1654–1705) и Иоганн (1667–1748), а также сын Иоганна Даниил (1700–1782), Леонард Эйлер (1707–1783), Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783), Жозеф Луи Лагранж (1736–1813), Пьер Симон Лаплас (1749–1827) и многие другие продолжили математическое исследование природы. Все они развивали методы математического анализа и разработали совершенно новые области, в частности теорию дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных, дифференциальную геометрию, вариационное исчисление, теорию бесконечных рядов и функций комплексного переменного. Все эти первоклассные математические результаты воспринимались как истины и служили более мощными инструментами исследования природы. Как сказал в 1741 г. Эйлер, «полезность математики, обычно известной своими элементарными разделами, не только не иссякает при переходе к высшим ее разделам, но и возрастает по мере развития этой науки».

Цель математических исследований блестящей плеяды ученых XVIII в. состояла в открытии новых законов природы, в более глубоком проникновении в ее основы. Достигнутые успехи были многочисленны и значительны. В астрономии особые усилия прилагались к тому, чтобы продолжить начатую Ньютоном работу по описанию и предсказанию движения небесных тел. Главный теоретический результат Ньютона (вывод эллиптичности орбиты планеты из закона всемирного тяготения), как хорошо сознавал он сам, был бы верен лишь в том случае, если бы вокруг Солнца обращалась только одна планета. Но во времена Ньютона и на протяжении большей части XVIII в. были известны шесть планет. Каждая из них притягивала остальные, а все планеты испытывали притяжение Солнца. Кроме того, у некоторых планет (Земли, Юпитера и Сатурна) были спутники. В результате под действием возмущений эллиптическая орбита искажалась. Какую форму имели истинные траектории планет? Над решением этой проблемы бились все выдающиеся математики XVIII в.

Суть проблемы сводилась к вопросу о взаимном притяжении трех тел. Если бы кому-нибудь удалось изобрести метод, позволяющий определять возмущающее действие третьего тела, то этим методом можно было бы воспользоваться и для определения возмущающего действия четвертого тела и так далее. Тем не менее, точное решение общей задачи движения даже трех тел не удалось получить и поныне. Вместо того, чтобы искать точное решение, математики стали создавать всё более совершенные приближенные методы.

Успехи, достигнутые в XVIII в. даже с помощью приближенных методов, были поистине замечательными. Одним из наиболее драматических событий, подтвердивших точность математических расчетов в астрономии, явилось предсказанное Алекси Клодом Клеро (1713–1765) возвращение кометы, ныне известной под названием кометы Галлея. Эту комету наблюдали несколько астрономов, и в 1682 г. Галлей предпринял попытку определить ее орбиту. Он предсказал, что комета вернется в 1758 г. На заседании Парижской академии наук 14 ноября 1768 г. Клеро объявил, что комета Галлея пройдет ближайшую к Солнцу точку своей орбиты в середине апреля 1759 г. с возможной ошибкой в тридцать дней. Комета появилась на месяц раньше предсказанного срока. Ошибка в один месяц может показаться чудовищной. Не следует забывать, однако, что кометы обычно доступны наблюдениям лишь в течение нескольких дней, а комета Галлея не наблюдалась семьдесят семь лет.

Другими выдающимися успехами астрономия обязана трудам Лагранжа и Лапласа. В движениях Луны и планет наблюдались некоторые нерегулярности. Они могли означать, что планета удаляется от Солнца на всё большее расстояние. Лагранж и Лаплас доказали, что нерегулярности, наблюдаемые в скоростях Юпитера и Сатурна, имеют периодический характер, поэтому движения этих двух планет являются устойчивыми. Научные достижения XVIII в. воплощены в одном из шедевров науки – пятитомной «Небесной механике»[88] Лапласа, печатавшейся в 1799–1825 гг.

Всю свою жизнь Лаплас посвятил астрономии, и, какой бы областью математики он ни занимался, его прежде всего интересовало применение полученных результатов к астрономии. Рассказывают, будто в своих рукописях Лаплас нередко опускал трудные этапы доказательств, заменяя их кратким замечанием: «Нетрудно видеть, что...» Одно не вызывает сомнения в этих рассказах: Лапласу действительно было не до детальной отделки доказательств, он торопился поскорее перейти к астрономическим приложениям. Многочисленные фундаментальные результаты, полученные Лапласом в математике, были не более чем побочными продуктами его титанической деятельности в области естествознания. Дальнейшим развитием их занимались другие.

Не менее драматична и широкоизвестная история открытия Нептуна. Хотя Нептун был открыт в 1846 г., в основе его открытия лежали достижения математики XVIII в. В 1781 г. Уильям Гершель с помощью нового мощного телескопа открыл планету Уран. Но движение Урана оказалось плохо предсказуемым. Алекси Бувар высказал предположение, что движение Урана возмущает какая-то неизвестная планета. Было предпринято много попыток обнаружить положение новой планеты и путем наблюдений, и путем теоретических расчетов ее размеров и орбиты. В 1841 г. двадцатидвухлетнему студенту Кембриджского университета Джону Каучу

[88] **В.Э.:** В 1982 году в СССР вышла книга Лаплас П.С. *Изложение системы мира*. «Наука», Л., 1982, которую я тогда, в начале 1980-х, читал, пусть не «от корки до корки», но достаточно, чтобы знать, что в ней. Это очень толстое академическое издание, и это книга астрономическая: внутри там точные расчеты орбит и масс планет Солнечной системы и т.п. В справочной информации к этой книге утверждалось, что это русский перевод французской книги: Laplace Pierre-Simon. «Exposition du système du monde». Paris, 1796–1824, и так я на нее ссылался повсюду в своих сочинениях. Появление у Клайна какой-то «Небесной механики» Лапласа, издаваемой почти в те же самые годы (1799–1825), смутило меня: не мог же Лаплас выпускать одновременно два многотомных издания с одним и тем же (астрономическим) содержанием, стало быть, речь, видимо, идет об одной и той же книге. Но почему тогда такая путаница в названиях и в годах выпуска? Я попытался в этом разобраться, но не очень успешно. В советской БСЭ-3 «Изложение системы мира» фигурирует как «т. 1–2, 1796», а «Трактат о небесной механике» как «т. 1–5, 1798–1825», и также сказано, что двухтомный русский перевод «Изложения системы мира» был издан в Санкт-Петербурге в 1861 г. Английский перевод «The System of the World» вышел в Лондоне в 1809 году (т.е. за 15 лет до того, как Лаплас ее закончил – если верить датам, указанным в переводе 1982 года). В 1829 году на английском языке вышли 4 тома под названием «Mécanique céleste» (хотя текст на английском, название на французском). Но во французской Википедии в статье «Лаплас» упоминается только «Mécanique céleste» (1799–1825), а «Exposition du système du monde» вообще не фигурирует. В общем, полная неразбериха... Видимо, Лаплас в 1796–1825 годах выпускал серию томов об астрономии, первые из которых назывались «Exposition du système du monde», а дальнейшие «Mécanique céleste», но которые в литературе часто не различаются (например, знаменитый диалог Наполеона и Лапласа о боге относят то к «Exposition du système du monde», то к «Mécanique céleste»), а в советском издании 1982 года все эти астрономические тома Лапласа были объединены под общим названием «Изложение системы мира».

Адамсу (1811–1892) удалось довольно точно рассчитать массу, размеры и орбиту предполагаемой планеты. О результатах своих вычислений Адамс сообщил знаменитому Джорджу Эйри, занимавшему тогда пост директора Королевской астрономической обсерватории в Гринвиче, но тот не придал расчетам студента особого значения. Одновременно с Адамсом примерно такие же расчеты независимо выполнил еще один молодой астроном – француз Урбен Жан Жозеф Леверье (1811–1877). О том, где следует искать новую планету, он сообщил немецкому астроному Иоганну Галле. Письмо от Леверье Галле получил 23 сентября 1846 г. и в тот же вечер обнаружил Нептун всего в 52 дуговых секундах от места, указанного Леверье. Как можно было сомневаться в правильности астрономической теории, позволяющей делать столь поразительные предсказания? (Точность предсказаний составляла одну десятитысячную процента!)

Помимо астрономии математизации еще во времена греков подверглась оптика. Изобретение в начале XVII в. микроскопа и телескопа очень стимулировало интерес к оптике, и, подобно ученым древней Греции, ни один математик XVII–XVIII в. не обошел оптику своим вниманием. Как мы уже упоминали, Снеллиусу и Декарту удалось открыть в XVIII в. то, что тщетно пытался сделать Птолемей, – закон преломления света; они ответили на вопрос, как ведет себя свет, распространяясь в среде с резко изменяющимися свойствами, например при переходе из воздуха в воду. Оле Рёмер (1644–1710) обнаружил, что свет распространяется с конечной скоростью. Интерес к оптике значительно возрос после того, как Ньютон установил, что белый свет представляет собой смесь всех цветов – от красного до фиолетового. Выход в свет ньютоновской «Оптики» (1704) во многом способствовал прогрессу этой науки и усовершенствованию микроскопов и телескопов. Важнейшим инструментом исследования и на этот раз явилась математика. Оптические исследования продолжали интенсивно развиваться и в XVIII в. Новой значительной вехой в становлении оптики как науки стало трехтомное сочинение Эйлера.

Физическая природа света оставалась по-прежнему неясной. В то время как Ньютон считал, что свет представляет собой движение частиц (корпускул), а Гюйгенс говорил о волновом движении (хотя у него этот термин вряд ли означал волны), Эйлер первым подошел к анализу световых колебаний с позиций математики и вывел уравнения движения. Отстаивая волновую природу света, Эйлер был единственным ученым XVIII в., осмелившимся выступить против ньютоновской корпускулярной теории света. Правильность взглядов Эйлера получила в начале XIX в. подтверждение в трудах Огюстена Жана Френеля и Томаса Юнга. Но природа света по-прежнему оставалась невыясненной, и основную надежду оптики продолжали возлагать на математические законы. До возникновения принятой ныне электромагнитной теории света должно было пройти еще полвека.

В XVIII в. перед естествоиспытателями открылись новые области исследований, и в некоторых из них им удалось достичь по крайней мере частичных успехов. Одной из новых областей физики стало математическое описание и анализ музыкальных звуков – акустика. Этот раздел физики имеет довольно длинную историю. Акустика началась с исследования звуков, издаваемых колеблющейся (скрипичной) струной. Свое веское слово о законах колебания струны сказали Даниил Бернулли, Д'Аламбер, Эйлер и Лагранж, существенно расходившиеся во мнениях по некоторым вопросам математического анализа.[89] И хотя спор удалось разрешить лишь в начале XIX в., после появления трудов Жана Батиста Жозефа Фурье (1768–1830), тем не менее и в XVIII в. был достигнут колоссальный прогресс. Наши современные представления о том, что каждый музыкальный звук состоит из основного тона (первой гармоники) и обертонов (высших гармоник) с частотами, равными целым кратным частоты первой гармоники, созданы трудами великих ученых XVIII в. Такое представление о звуке лежит в основе разработки всей современной звукозаписывающей и передающей аппаратуры: телефона, фонографа, радио и телевидения.

С XVIII в. берет начало еще одна область математической физики – гидродинамика, занимающаяся изучением течений жидкостей и газов, а также изучением движения тел в жидкости. Еще Ньютон рассмотрел и решил задачу о форме, которую должно иметь тело, чтобы при движении в жидкости оно испытывало наименьшее сопротивление. Классическим трудом в этой области математической физики по праву считается «Гидродинамика» Даниила Бернулли

---

[89] **Яглом:** Оживленная дискуссия между Д. Бернулли, Эйлером и Д’Аламбером по поводу исследования колебаний струны (в которой каждый яз этих трех выдающихся ученых был несогласен с двумя другими) связана с тем, что в XVIII в. не было еще полной ясности относительно определения понятия *функции*: дискуссия весьма способствовала внесению ясности в этот важный вопрос.

(1738). В этой работе Бернулли, в частности, отметил, что гидродинамику можно было бы использовать для описания тока крови по артериям и венам человеческого тела. Вслед за сочинением Бернулли вышел в свет основополагающий труд Эйлера (1755), в котором он вывел уравнения движения несжимаемой жидкости. В этой работе Эйлер писал:

> Если нам не дано достичь полного знания о движении жидкости, то причину неудачи надлежит приписывать не механике и не недостаточности известных законов движения. Нам недостает [математического] анализа, поскольку вся теория движения жидкости теперь свелась к исследованию аналитических формул.

В действительности гидродинамика в том виде, в каком ее рассматривал Эйлер, была существенно неполной, и за последующие семьдесят лет в нее было внесено немало поправок и дополнений. Так, например, Эйлер полностью пренебрегал вязкостью. (Вода течет быстро и может считаться невязкой жидкостью, тогда как, скажем, масло течет медленно и обладает заметной вязкостью.[90]) Тем не менее, мы можем с полным правом утверждать, что именно Эйлер стал основателем гидродинамики, применимой к движению судов и самолетов.

Если ученые XVIII в. нуждались в дополнительном подтверждении того, что мир основан на математических принципах и устроен наилучшим образом и что все творения природы созданы по замыслу единого архитектора – господа бога, то они обрели это подтверждение в одном математическом открытии. Герон (гл. I) доказал, что свет, двигаясь из точки *P* в точку *Q* и отражаясь в зеркале, распространяется по кратчайшему пути. Так как скорость света при этом постоянна, то кратчайший путь означает и кратчайшее время распространения света.

Один из величайших математиков XVIII в. Пьер Ферма (1601–1665), опираясь на весьма скудные экспериментальные данные, сформулировал принцип наименьшего времени: свет, идущий из одной точки в другую, распространяется по такому пути, на преодоление которого уходит наименьшее время. Очевидно, что таким сотворил свет господь бог, наделив его способностью не только неукоснительно следовать математическим законам, но и распространяться по пути, требующему минимальных затрат времени. Ферма окончательно уверовал в правильность своего принципа, когда ему удалось вывести из него закон преломления света, открытый ранее Снеллиусом и Декартом.

К началу XVIII в. математики располагали уже несколькими впечатляющими примерами того, как природа пытается «максимизировать» или «минимизировать» те или иные важные характеристики физических процессов. Христиан Гюйгенс, первоначальноо возражавший против принципа Ферма, доказал, что тот же самый принцип верен и для света, распространяющегося в среде с непрерывно изменяющимися свойствами. Даже первый закон Ньютона, утверждающий, что всякое находящееся в состоянии движения тело, если на него не действуют никакие силы, движется по прямой, стали рассматривать как еще одно свидетельство «принципа экономии», выполняющегося в природе.

Ученые XVIII в. были убеждены в том, что совершенная Вселенная не терпит напрасных затрат, – и потому каждое действие природы для достижения конечного результата должно быть наименьшим из возможных; на этой основе они принялись за поиск общего принципа. Первую формулировку такого принципа предложил Пьер Луи Моро де Мопертюи (1698–1759), математик, возглавлявший экспедицию в Лапландию, цель которой заключалась в измерении по меридиану длины дуги в один градус. Произведенные экспедицией измерения показали, что Земля сплюснута у полюсов, как предсказывали на основе теоретических соображений Ньютон и Гюйгенс. Открытие Мопертюи устранило возражения против теории Ньютона, выдвинутые Жаном Домиником Кассини и его сыном Жаком. Мопертюи был удостоен почетного титула «сплюснувший Землю». По меткому выражению Вольтера, Мопертюи сплющил Землю и обоих Кассини.

В 1740 г., занимаясь теорией света, Мопертюи провозгласил свой знаменитый **принцип наименьшего действия**, опубликовав статью под названием «О различных законах природы, казавшихся несовместимыми». Мопертюи исходил из принципа Ферма, но, поскольку не

[90] **Яглом:** Ясно, что создатели гидродинамики Эйлер и Д'Аламбер ничего не знали о так называемых *турбулентных* течениях с нерегулярным, случайным характером движений отдельных частиц жидкости (для создания теории таких течений тогда еще же существовало подходящего математического аппарата); игнорирование этого обстоятельства приводило их даже к некоторым парадоксам, в то время неразрешимым.

существовало единого мнения относительно того, в какой среде скорость света больше – в воде (как считали Декарт и Ньютон) или в воздухе (как полагал Ферма), Мопертюи отказался от наименьшего времени и заменил его новым понятием – действием. Под действием Мопертюи понимал интеграл (определяемый в математическом анализе) от произведения массы, скорости и пройденного расстояния. Согласно принципу наименьшего действия, все явления природы происходят так, что действие оказывается минимальным. Предложенное Мопертюи определение действия нуждается в некоторых уточнениях: Мопертюи не указал, по какому интервалу времени надлежит вычислять интеграл, и в каждом из найденных им приложений принципа в оптике и в некоторых задачах механики придавал действию разный смысл.

Хотя в обоснование своего принципа Мопертюи привел несколько физических примеров, он отстаивал принцип наименьшего действия и по теологическим мотивам. Законы движения материи должны обладать совершенством, достойным божьего замысла, и принцип наименьшего действия удовлетворял этому критерию, так как показывал, что природа действует наиболее экономным образом. Свой принцип Мопертюи провозгласил универсальным законом природы и первым научным доказательством существования и мудрости бога.

Величайший из математиков XVIII в. Леонард Эйлер, состоявший с Мопертюи в переписке (1740–1744) по поводу принципа наименьшего действия, согласился с ним в том, что бог, должно быть, построил Вселенную в соответствии с каким-то фундаментальным принципом и что существование такого принципа свидетельствует о направляющем персте божьем. Свое мнение Эйлер выразил так: «Поскольку наш мир устроен наисовершеннейшим образом и является творением всеведущего творца, во всем мире не происходит ничего такого, в чем не было бы воплощено какое-либо правило максимума или минимума».

В своем убеждении, что все явления природы происходят таким образом, что максимизируют или минимизируют некоторую функцию, вследствие чего и основные физические принципы должны содержать какую-то максимизируемую или минимизируемую функцию, Эйлер пошел еще дальше Мопертюи. Бог, несомненно, более искусный математик, чем могли себе представить ученые XVI–XVII вв., считал он. Религиозные убеждения также укрепляли Эйлера во мнении, что бог возложил на человека миссию познавать божественные законы, используя ниспосланный ему дар мышления. Книга природы открыта перед нами, но написана она на языке, который мы понимаем не сразу, а лишь после того, как ценой немалых усилий и страданий с любовью выучим его. Язык этот – математика. А поскольку наш мир – наилучший из всех возможных миров, его законы также должны блистать красотой.

Более точную и общую форму принципу наименьшего действия придал Лагранж. Действие фактически свелось к энергии. Из обобщенного принципа наименьшего действия удалось получить решения многих новых задач механики. (Принцип наименьшего действия по существу стал центральным принципом вариационного исчисления – новой области математического анализа, основателем которой стал Лагранж, опиравшийся на труды Эйлера.) Дальнейшее обобщение принципа наименьшего действия было предложено «вторым Ньютоном» Британии – Уильямом Роуаном Гамильтоном (1805–1865). Этот принцип и поныне является одним из наиболее универсальных принципов, лежащих в основе механики. По образу и подобию принципа наименьшего действия аналогичные принципы, получившие название вариационных, были сформулированы и в приложении к другим областям физики. Однако, как мы увидим, во времена Гамильтона ученые уже отказались от заключений Мопертюи и Эйлера, считавших, что принцип наименьшего действия включен божественным провидением в схему природы. Некоторое представление об изменениях, происшедших в толковании принципа наименьшего действия, можно составить по «Истории доктора Акакия», в которой высмеивается этот принцип, рассматриваемый как доказательство существования бога. Но ученые XVIII в. всё еще были глубоко убеждены в том, что наличие столь всеобъемлющего принципа может означать одно: мир сотворен (разумеется, господом богом) в соответствии с этим принципом.

Величайшие мыслители XVIII в. отнюдь не двусмысленно утверждали господство математики. Вот, например, как сформулировал тезис о примате математики выдающийся математик Жан Лерон Д'Аламбер, главный сотрудник Дени Дидро (1718–1784), в своей статье, написанной для знаменитой французской «Энциклопедии»: «Истинная система мира познана, развита и усовершенствована». Нужно ли говорить, что естественный закон был законом математическим?

Более известно высказывание Лапласа:

> Состояние Вселенной в данный момент можно рассматривать как результат ее прошлого и как причину ее будущего. Разумное существо, которое в любой момент знало бы все движущие силы природы и взаимное расположение образующих ее существ, могло бы – если бы его разум был достаточно обширен для того, чтобы проанализировать все эти данные, – выразить одним уравнением движение и самых больших тел во Вселенной, и мельчайших атомов. Ничто не осталось бы сокрытым от него – оно могло бы охватить единым взглядом как будущее, так и прошлое.

Уильям Джеймс в своем «Прагматизме» следующим образом описывает умонастроение математиков того времени:

> Когда были открыты первые математические, логические и физические закономерности, первые законы, проистекавшие из этих открытий, ясность, красота и упрощение настолько захватили людей, что они уверовали в то, будто им удалось доподлинно расшифровать непреходящие мысли Всемогущего. Его разум громыхал громовыми раскатами и эхом отдавался в силлогизмах. Бог мыслил коническими сечениями, квадратами, корнями и отношениями и геометризовал, как Евклид. Бог предначертал законы Кеплера движению планет, заставил скорость падающих тел возрастать пропорционально времени, создал закон синусов, которому свет должен следовать при преломлении... Бог измыслил архетипы всех вещей и придумал их вариации, и когда мы открываем любое из его чудесных творений, то постигаем его замысел в самом точном предназначении.

Убеждение в том, что природа сотворена по математическому плану и творец ее – господь бог, выражали не только ученые, но и поэты, например английский поэт, эссеист и государственный деятель Джозеф Эддисон (1672–1712) в своем «Гимне»:

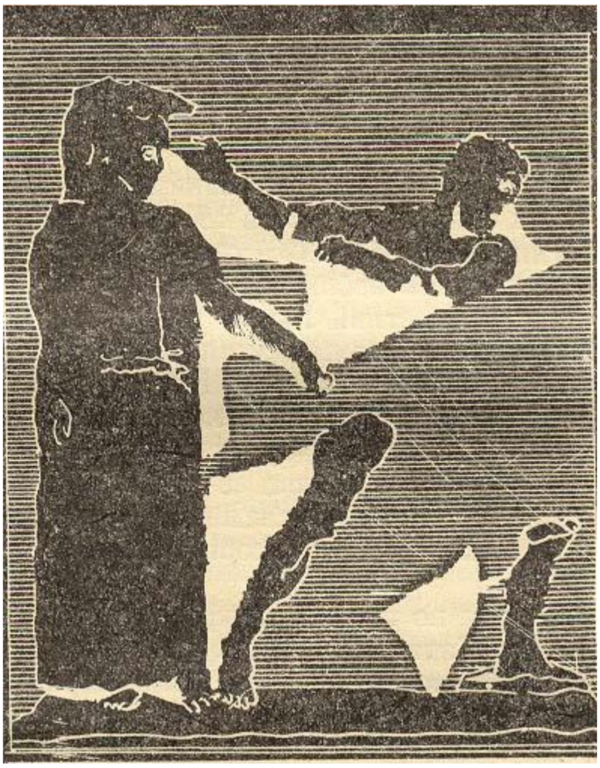
> Бескрайней чаши глубина,
> Небес эфирных синева,
> Звезд бесконечный хоровод
> Хвалу Создателю поет.
> Своей могучею десницей
> Бог правит солнца колесницей,
> И свет летит во все края,
> Хвалу Всевышнему творя.
> ...
> Планет кружащихся венец –
> Твое созданье, о Творец.
> Той вестью полны,
> Катят по океанам волны.

К концу XVIII в. математика была подобна гигантскому дереву, прочно стоявшему на почве реальности, с корнями двухтысячелетней давности, с раскидистыми ветвями. Высоко вздымалось древо математики над всеми областями человеческого знания. Никто не сомневался, что в таком виде это дерево будет жить вечно – разве что крона его будет становиться всё пышнее.

# *IV. Первое ниспровержение: увядание истины*

У каждого века есть свои мифы. Их принято называть высшими истинами.

*Неизвестный автор*



Девятнадцатый век начался для математики хорошо. Активно работал Лагранж. В зените славы и расцвете сил находился Лаплас. Фурье (1768–1830) упорно работал над статьей 1807 г., впоследствии включенной в его ставшую классической «Теорию теплоты» (1822). Карл Фридрих Гаусс опубликовал (1801) свои «Арифметические исследования» (*Disquisitiones arithmeticae*), ставшие знаменательной вехой в развитии теории чисел, и был на пороге множества новых достижений, снискавших ему титул «король математиков». А французский «конкурент» Гаусса Огюстен Луи Коши (1789–1857) продемонстрировал свои незаурядные способности в обширной статье, опубликованной в 1814 г.

Несколько слов о деятельности этих замечательных ученых позволят читателю составить более полное представление о колоссальном шаге, который сделала наука в первой половине XIX в. в направлении более полного раскрытия единой схемы природы. Хотя Гаусс обогатил открытиями эпохального значения (об одном из них мы в дальнейшем расскажем) чистую математику, значительную часть своей жизни он посвятил естественнонаучным исследованиям. Гаусс даже не числился профессором математики – более пятидесяти лет он состоял профессором астрономии и директором Гёттингенской обсерватории. Интерес к астрономии пробудился у Гаусса еще в студенческие годы (1795–1798), проведенные в Гёттингене, и она, пожалуй, более всего занимала его мысли. Первый значительный успех пришел к нему в 1801 г. Первого января того года Джузеппе Пиацци (1746–1826) открыл малую планету Цереру. Хотя планету удалось наблюдать лишь в течение нескольких недель, двадцатичетырехлетний Гаусс, применив для анализа результатов наблюдений новую математическую теорию, вычислил орбиту планеты. В конце того же года Церера действительно была обнаружена примерно там, где и предсказывал Гаусс. Когда Вильгельм Ольберс в 1802 г. открыл другую малую планету – Палладу, Гаусс снова весьма точно определил ее орбиту. Весь этот первоначальный этап астрономических исследований Гаусс изложил в одном из своих главных трудов – «Теории движения небесных тел» (1809).

Позднее, производя по просьбе курфюрста Ганноверского топографическую съемку Ганновера, Гаусс заложил основы геодезии; из этих занятий он извлек ряд весьма плодотворных идей, касающихся дифференциальной геометрии.[91] Особо были отмечены проведенные Гауссом

---

[91] **Яглом:** В расчетах, относящихся к большим областям земном поверхности (каковой можно считать и княжество Ганновер), приходится учитывать отличие поверхности Земли от плоскости; продумывая это обстоятельство, Гаусс пришел к глубокой концепции *внутренней геометрии* поверхности, задаваемой ее метрикой, т.е. измеряемым по поверхности расстояниям. Соответствующая теория была изложена Гауссом в обширном труде «Общие исследования о кривых поверхностях» [*Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1828; русский перевод см. ([24: Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. – М.–Л.: Гостехиздат, 1956.], с. 123–161)], давно считающемся математической классикой.

в 1830–1840 гг. теоретические и экспериментальные исследования магнетизма. Он разработал метод измерения магнитного поля Земли. Создатель теории электромагнитного поля Джеймс Клеркс Максвелл в своем «Трактате по электричеству и магнетизму» признает, что исследования Гаусса по магнетизму преобразили всю науку: приборы и инструменты, методы наблюдений и обработки результатов. Работы Гаусса по земному магнетизму являются образцом естественно-научного исследования. В знак признания заслуг Гаусса единица магнитной индукции (в системе единиц СГС) получила впоследствии название «гаусс».

Хотя идея создания телеграфа принадлежит не Гауссу и не его другу и коллеге Вильгельму Веберу (1804–1891) (многочисленные попытки предпринимались и раньше), именно они предложили в 1833 г. практическое устройство для приема сигналов. Были у Гаусса и другие изобретения. Он успешно работал в области оптики, которая после Эйлера переживала глубокий упадок. Исследования, проведенные Гауссом в 1838–1841 гг., заложили принципиально новую основу для решения оптических проблем.

Другой величайшей фигурой в математике начала XIX в., сравнимой по своей значимости с Гауссом, был Коши.[92] Его интересы отличались необычайной разносторонностью. Он написал более семисот математических работ, уступив по числу их лишь Эйлеру. Современное издание трудов Коши вышло в двадцати шести томах и охватывает все разделы математики. Коши был основоположником теории функций комплексного переменного (гл. VII и VIII). Но не меньше внимания Коши уделял физическим проблемам. В 1815 г. он получил премию Французской академии наук за работу по теории волн на воде. Ему принадлежат фундаментальные исследования по равновесию стержней и упругих (в частности, металлических) пластин, а также по теории волн в упругой среде. Своими трудами Коши заложил основы математической теории упругости. Коши развил теорию световых волн, начало которой было положено Огюстеном Жаном Френелем (1788–1827), и распространил ее на явления дисперсии и поляризации света. Коши был превосходнейшим специалистом по математической физике.

Хотя в качестве математика Фурье и уступал таким корифеям, как Гаусс и Коши, полученные им результаты заслуживают особого упоминания, поскольку именно ему удалось распространить могущество математики на еще одно явление природы – теплопроводность. Изучение теплопроводности Земли Фурье считал одной из важнейших проблем космогонии, так как надеялся таким образом показать, что первоначально земной шар находился в расплавленном состоянии. Занимаясь решением этой задачи, Фурье довел до высокой степени совершенства теорию бесконечных тригонометрических рядов (называемых ныне рядами Фурье). Ряды Фурье стали широко применяться в различных областях прикладной математики – значение созданной Фурье теории таких рядов трудно переоценить.

Выдающиеся результаты Гаусса, Коши, Фурье и сотен других математиков, казалось бы, неоспоримо подтверждали, что наука всё точнее описывает истинные законы природы. На протяжении столетия самые выдающиеся математики продолжали идти путем, проложенным их предшественниками, разрабатывая всё более мощные математические методы и с успехом применяя их к новым разделам естествознания. В неудержимом порыве устремились математики на поиск математических законов природы, словно загипнотизированные убеждением, что именно они призваны раскрыть схему, избранную богом при сотворении мира.

Если бы математики XIX в. прислушались к словам своих собратьев по духу, то разразившаяся вскоре катастрофа не застала бы их врасплох. Еще на заре нового времени Фрэнсис Бэкон отмечал в своем «Новом органоне» («Новый инструмент познания», 1630 г.)[93]:

> Идолы рода находят основание в самой природе человека, в племени или самом роде людей, ибо можно утверждать, что чувства человека есть мера вещей. Наоборот, все восприятия, как

---

[92] **Яглом:** Следует сказать, что наряду е определенным сходством между Гауссом и Коши существовало и резкое различие, определившее психологическое «отталкивание» этих выдающихся ученых. Бесконечно требовательный к себе, Гаусс публиковал сравнительно мало работ. Напротив, Коши публиковал свои работы, порой не отделывая их достаточно тщательно, так что в его книгах и статьях нередко встречались ошибки (обычно легко исправимые, но иногда и более серьезные), крайне раздражавшие Гаусса.

[93] **Яглом:** Андроник Родосский, выпустивший в I в. до н.э. собрание сочинений Аристотеля, назвал «Органоном» свод работ последнего по логике и строению наук, написанных независимо одна от другой и, видимо, в разное время; названием «Новый органон» Бэкон подчеркивал и близость свою к Аристотелю (по теме), и резкое различие (по установкам).

чувства, так и ума, покоятся на аналогии человека, а не на аналогии мира. Ум человека уподобляется неровному зеркалу, которое, примешивая к природе вещей свою природу, отражает вещи в искривленном и обезображенном виде. ([23][94], т. 2, с. 18.)

В том же «Новом органоне» Бэкон утверждает, что наблюдение и экспериментирование являются основой всякого знания:

Никоим образом не может быть, чтобы аксиомы, установленные рассуждением, имели силу для открытия новых дел, ибо тонкость природы во много раз превосходит тонкость рассуждений. ([23], т. 2, с. 15.)

Даже самые верующие ученые начали постепенно приходить к отрицанию роли бога как творца «единого плана» природы.

Труды Коперника и Кеплера по созданию гелиоцентрической системы мира, которую они оба рассматривали как свидетельство «математической мудрости» бога, противоречили Священному писанию, ибо они лишали человека избранного положения во Вселенной. Галилей, Роберт Бойль и Ньютон видели цель своей научной работы в доказательстве существования божественного плана и божественного вмешательства во всё происходящее в мире, но в их научных исследованиях бог явно не участвовал. Более того, в одном из своих писем Галилей даже утверждал, что «от любого толкования Священного писания проку немного, ибо ни один астроном или естествоиспытатель, действуя в надлежащих рамках, не входит в подобные вопросы». Разумеется, сам Галилей, как мы уже видели, был глубоко убежден в существовании математического плана Вселенной, творцом которого был бог, но приведенный отрывок из его письма показывает, что для объяснения природных явлений Галилей считал недопустимым прибегать к мистике или привлекать сверхъестественные силы. Во времена Галилея всё еще бытовало мнение, что всемогущий бог способен произвольно изменять план творения. Декарт же, при всей своей набожности, провозгласил тезис о неизменности законов природы и тем самым неявно ограничил могущество господа бога. Ньютон также считал порядок в мире неизменным, однако поддержание порядка он возлагал на бога, которого сравнивал с часовым мастером, готовым устранить любую неисправность в часовом механизме. У Ньютона были веские основания уповать на божественное провидение. Хотя он знал, что из-за возмущений, вносимых другими планетами, орбита любой планеты отличается от идеального эллипса, ему никак не удавалось доказать математически, что наблюдаемые отклонения вызваны притяжением других планет, и Ньютон считал, что без вмешательства бога, неусыпно следящего за работой мирового механизма, устойчивость Солнечной системы могла бы нарушиться.[95]

Против подобных взглядов Ньютона выступил Лейбниц в своей (предсмертной) переписке с английским священником и философом Сэмюэлем Кларком, которая велась через посредство принцессы Уэльской. В своем первом письме (ноябрь 1715 г.) по поводу ньютоновских представлений о боге, вынужденном время от времени заводить мировые «часы» и устранять неисправности в их механизме, Лейбниц писал:

Г-н Ньютон и его сторонники придерживаются довольно странного мнения о действиях бога... У него не было достаточно предусмотрительности, чтобы придать им [«часам»] беспрерывное движение... По моему представлению, в мире постоянно существует одна и та же сила, энергия, и она переходит лишь от одной части материи к другой, следуя законам природы и прекрасному предусмотренному порядку. ([24][96], с. 430.)

Лейбниц открыто упрекает Ньютона в том, что тот отрицает всемогущество бога. Лейбниц действительно считал Ньютона повинным в упадке религии в Англии.

И здесь Лейбниц не был так уже далек от истины. В идеологии мистика Ньютона бог и религия занимали гораздо больше места, чем у рационалиста Лейбница, но объективно труды Ньютона способствовали освобождению натурфилософии от влияния теологии. Галилей, как мы

[94] Бэкон Ф. Сочинения в 2-х томах. – М.: Мысль, 1977 (т.1); 1978 (т.2).

[95] **Яглом:** Мистик Ньютон был уверен (без всяких оснований, разумеется, – ср. сказанное (с. 76) о так называемой «проблеме трех тел») в *неустойчивости* Солнечной системы, тогда как в XVIII в. атеист и крайний рационалист Лаплас столь же безосновательно утверждал, что он может доказать ее устойчивость.

[96] *Об основаниях геометрии*. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. – М.–Л.: Гостехиздат, 1956.

уже отмечали, также считал, что физика должна развиваться независимо от религии. С этих же позиций написаны и «Математические начала натуральной философии» Ньютона, ставшие значительным шагом на пути к чисто математическому описанию явлений природы. В математических схемах физических теорий богу отводилось всё меньше места. Возмущения в траекториях планет, которые составляли загадку для Ньютона, получили почти полное теоретическое обоснование в трудах ученых последующих поколений.

На передний план выступили универсальные законы, чье действие распространялось на движение как небесных, так и земных тел; при этом обнаружилось полное соответствие между предсказаниями и результатами наблюдений, что свидетельствовало о высоком совершенстве таких законов. И после Ньютона было немало ученых, которые усматривали в совершенстве законов природы неоспоримое доказательство мудрости творца, но мало-помалу бог отошел на задний план, а в центр внимания попали математические законы Вселенной. Лейбниц предвидел некоторые следствия из ньютоновских «Начал» – картины мира, функционирующего, с помощью бога или вовсе без него, по единому плану, – и критиковал сочинение Ньютона как антихристианское. На смену стремлению раскрыть замыслы творца пришло стремление получить чисто математические результаты. Хотя многие математики после Эйлера продолжали верить во всемогущего бога, в божественный план мира и главное предназначение математики видели в расшифровке замыслов творца, по мере того, как в XVIII в. развивалась математика и множились ее успехи, религиозные мотивы в научном творчестве всё более отступали на задний план и присутствие бога становилось всё менее ощутимым.

Воспитанные в духе католицизма, Лагранж и Лаплас были агностиками. Лаплас решительно отвергал идею о боге – создателе математического плана Вселенной. О Лапласе рассказывали такую историю. Когда он преподнес в подарок Наполеону экземпляр своей «Небесной механики», тот заметил: «Месье Лаплас, говорят, вы написали эту толстую книгу о системе мира, не упомянув создателя ни единым словом». На что Лаплас якобы ответил: «Мне не понадобилась эта гипотеза».[97] Природа заняла место бога; как сказал Гаусс: «Ты, природа, моя богиня, твоим законам я слуга покорный». Гаусс верил в вечного, всеведущего и всемогущего бога, но мысли о боге он никак не связывал с математикой и исследованием математических законов природы.

Изменения, происшедшие во взглядах на мир, отчетливо ощущаются в следующем замечании Гамильтона по поводу принципа наименьшего действия [гл. III], которое он высказал в статье 1833 г.:

> Хотя принцип наименьшего действия считается одной из величайших теорем физики, претензии на его космологическую неизбежность, обоснованные ссылками на экономию в природе, ныне в общем отвергаются. Нежелание признать эти претензии объясняется среди прочего тем, что величина, которая якобы экономится, в действительности нередко расходуется расточительно[98]... Мы не можем поэтому предположить, что экономия предусмотрена в божественной идее нашего мира, хотя можно допустить, что эта идея должна исходить из простоты какого-то высшего рода.

Оглядываясь на прошлое, нетрудно заметить, как постепенно творческая работа самих математиков оттеснила на задний план идею о мире, сотворенном богом на математической основе. Мыслители всё более убеждались в том, что человеческий разум способен на многое, – и лучшим тому подтверждением были успехи математики. Почему бы в таком случае не попытаться использовать могущество человеческого разума для обоснования господствующих религиозных и этических учений? И это желательно сделать из самых что ни на есть благих намерений – дабы упрочить эти учения. К счастью или к несчастью, но рационализация основ

---

[97] **Яглом:** Это принадлежащее (или приписываемое) Лапласу высказывание выразительно демонстрирует успехи, которые к тому времени сделал «галилеев подход» к естественнонаучным проблемам, (математическая формула, а не физическое описание). Ньютону бог был необходим для того, чтобы объяснить гравитационное «дальнодействие» (можно полагать, что паскалевское «определение» бога: «сфера, центр которой находится всюду, а периферия нигде», полностью снимающее вопрос об «агенте», передающем гравитационное воздействие, было достаточно близко Ньютону); именно этот «теологический» характер теории Ньютона делал ее неприемлемой для рационалистов Лейбница и Гюйгенса. Лаплас же полностью принял завет Галилея: никогда не спрашивать «как?», если мы можем ответить на вопрос «на сколько?»; поэтому для него бог в ньютоновской системе мира оказался уже вовсе ненужным.

[98] **Яглом:** Здесь имеется в виду, что в более полной (и совершенной) трактовке принципа наименьшего действия и иных вариационных принципов механики н физики речь идет не о наименьшем, а об «экстремальном» (т.е. наименьшем или наибольшем) значении рассматриваемой величины.

религиозных вероучений подорвала ортодоксальность многих из них. Религиозные верования, утратив присущую им некогда ортодоксальность, приняли новые формы: рационалистический супернатурализм, деизм, агностицизм – вплоть до воинствующего атеизма. Эти течения оказали влияние на математиков XVIII в., бывших людьми широкой культуры. Происшедшие перемены выразил властитель дум того времени, рационалист и антиклерикал, Дени Дидро: «Если вы хотите, чтобы я поверил в бога, сделайте так, чтобы я мог дотронуться до него рукой». Не все математики XIX в. отрицали роль бога. Правоверный католик Коши утверждал, например, что человек «без колебаний отвергнет любую гипотезу, противоречащую открывшейся ему истине». Тем не менее, вера в бога как создателя математического плана Вселенной явно шла на убыль.

Перед мыслителями встал вопрос: почему математические законы природы непременно должны выражать абсолютные истины? Дидро в своих «Мыслях об объяснении природы» (1753) одним из первых отрицал абсолютность математических законов. Математик, утверждал он, подобен игроку: и тот, и другой играет в игры, руководствуясь ими же самими созданными абстрактными правилами. Предмет математического исследования – условность, не имеющая опоры в реальности. Столь же критическую позицию занял в своей работе «Беседы о множественности миров» писатель Бернар Ле Бовье де Фонтэнель (1657–1757). Он подверг критике веру в неизменность законов движения небесных тел, заметив: «Розы тоже не припомнят, чтобы умер хоть один садовник».

Математики предпочитают верить, что именно они создают пищу, которой кормятся философы. Но в XVIII в. в авангарде тех, кто отрицал истины о физическом мире, шли философы. Мы обходим молчанием учения Томаса Гоббса (1588–1679), Джона Локка (1632–1704) и епископа Джорджа Беркли (1685–1753) не потому, что их трудно было бы опровергнуть, а лишь по той причине, что они оказали меньшее влияние на развитие мысли, чем теории более радикально мыслящего Дэвида Юма (1711–1776), который не только воспринял идеи Беркли, но и развил их дальше. В своем «Трактате о человеческой природе» (1739–1740)[99] Юм утверждал, что мы не знаем ни разума, ни материи, и то, и другое – фикции. Мы воспринимаем только ощущения. Простые идеи, такие, как образы, воспоминания и мысли, представляют собой слабый отзвук ощущений. Любая сложная идея есть не что иное, как набор простых идей. Наш разум тождествен имеющемуся у нас набору ощущений и идей. Не следует предполагать существование каких-либо субстанций, кроме тех, которые мы воспринимаем непосредственно на опыте. Всякий опыт порождает только ощущения.

Юм равным образом сомневался и в существовании материи. Кто гарантирует, что перманентно существующий мир материальных предметов не фикция? Всё, что мы о нем знаем, – это наши ощущения (впечатления). Из того, что ощущения стула неоднократно воспроизводимы, еще не следует, что стул реально существует. Пространство и время, по Юму, – это способ и порядок постижения идей, а причинность – привычная взаимосвязь идей. Ни пространство, ни время, ни причинность не есть объективная реальность. Сила и яркость наших ощущений вводят нас в заблуждение, заставляя верить в реальность окружающего мира. В действительности же существование окружающего мира с заданными свойствами не более чем умозаключение, в истинности которого мы не можем быть уверенными. Происхождение наших ощущений

---

[99] **В.Э.:** Через 8 лет (в 1748 г.) Юм выпустил новую книгу «Исследование о человеческом разумении», а в ее новом издании (1777 г.), которое готовилось предсмертно, а вышло из печати уже посмертно, он добавил следующее «Вступительное замечание»: «Большинство принципов и рассуждений, содержащихся в этом томе, были преданы гласности в трехтомном труде, озаглавленном «Трактат о человеческой природе», труде, который был задуман автором еще до оставления им колледжа, а написан и опубликован вскоре после этого. Но, видя неуспех названного труда, автор осознал свою ошибку, заключавшуюся в преждевременном выступлении в печати, переработал всё заново в нижеследующих сочинениях, где, как он надеется, исправлены некоторые небрежности в его прежних рассуждениях или, вернее, выражениях. Однако некоторые писатели, почтившие философию автора разбором, постарались направить огонь всех своих батарей против этого юношеского произведения, никогда не признававшегося автором, и высказали претензию на победу, которую, как они воображали, им удалось одержать над ним. Это образ действий, весьма противоречащий всем правилам чистосердечия и прямоты в поступках и являющийся разительным примером тех полемических ухищрений, к которым считают себя вправе прибегать в своем рвении фанатики. Отныне автор желает, чтобы только нижеследующие работы рассматривались как изложение его философских взглядов и принципов.» {R-HUME} Я не исследовал, что именно отличает первый трактат от второго, но, во всяком случае, Клайн говорит здесь о книге, которую Юм «официально отозвал», обозначив ее «юношеским произведением».

необъяснимо; мы не можем сказать, что является их источником: реально существующие внешние объекты, разум или бог.

Сам человек, по Юму, – это обособленный набор восприятий, т.е. впечатлений и идей. Он существует только в себе. Субъект суть набор различных восприятий. Любая попытка познать самого себя приводит только к некоторому восприятию. Все остальные люди и предполагаемый внешний мир также являются лишь восприятиями данного субъекта – и нет уверенности, что они действительно существуют.

Следовательно, нет и не может быть научных законов, относящихся к перманентному, объективно существующему физическому миру. Кроме того, поскольку в основе идеи причинности лежит не научное доказательство, а лишь привычка ума, рожденная многократным повторением обычного порядка «событий», мы не можем знать, всегда ли последовательности событий, наблюдавшиеся в прошлом, будут повторяться в будущем. Тем самым Юм отрицал неизбежность, вечность и неизменность законов природы.

Разрушив догмат о существовании внешнего мира, следующего неизменным математическим законам, Юм тем самым разрушил ценность логической дедуктивной схемы, которая представляла реальность для мыслителей последующих поколений. Но математика содержит также и теоремы о числах и геометрию, неоспоримо вытекающие из тех истин о числах и геометрических фигурах, которые положены в основу их изучения. Юм не отвергал аксиом, но их выбор, а значит и результаты, получаемые из них методом дедукции, он ставил под сомнение. Что касается аксиом, то они возникают из тех ощущений, которые мы получаем от предполагаемого физического мира. Теоремы действительно с необходимостью следуют из аксиом, но они представляют собой не более чем усложненные перепевы аксиом. Теоремы являются дедукциями, но дедукциями утверждений, неявно содержащихся в аксиомах. Теоремы не что иное, как тавтологии. Следовательно, ни аксиомы, ни теоремы не могут рассматриваться как абсолютные истины.[100]

Итак, на фундаментальный вопрос о том, каким образом человек постигает истины, Юм отвечает, отрицая само существование истин: к истинам человек прийти не может. Теория Юма не только объявляла несостоятельным всё, что было достигнуто в математике и естествознании ранее, но и поставила под сомнение ценность самого разума. Столь откровенное отрицание высшей способности человека было отвергнуто большинством мыслителей XVIII в. Как в математике, так и в других областях человеческой деятельности было слишком много накоплено, чтобы этим безболезненно поступиться, объявив бесполезным грузом весь приобретенный человечеством интеллектуальный багаж. Философия Юма встретила такое резкое неприятие у большинства мыслителей XVIII в., показалась им столь неприемлемой и противоречащей выдающимся успехам математики и естествознания, что возникла острая необходимость в ее опровержении.

Выполнить эту задачу взялся один из наиболее чтимых и глубоких философов всех времен – Иммануил Кант. Но при внимательном рассмотрении выяснилось, что итог его размышлений лишь немного более утешителен, чем философия Юма. В «Пролегоменах ко всякой будущей метафизике, могущей появиться как наука» (1783), Кант, казалось, встал на сторону математиков и естествоиспытателей:

> Мы можем с достоверностью сказать, что некоторые чистые априорные синтетические познания имеются и нам даны, а именно чистая математика и чистое естествознание, потому что оба содержат положения, частью аподиктически достоверные на основе одного только разума, частью же на основе общего согласия из опыта и тем не менее повсеместно признанные независимыми от опыта. ([18][101], т. 4, ч. 1, с. 89.)

---

[100] **В.Э.:** В том виде, как взгляды Юма здесь изложены Клайном, они, если и требовали бы комментариев, то не в плане философском, а в плане психологическом или психиатрическом: какие психические особенности личности могут вызвать к жизни такие утверждения (я говорю «утверждения», а не «взгляды», потому что взгляды-то наверняка отличались от утверждений), и главный мотив тогда составляли бы слова «истерическая личность» и «стремление в наиболее вызывающей форме блеснуть крайней оригинальностью». Но так как сам Юм всё это назвал «некоторыми небрежностями в его прежних рассуждениях или, вернее, выражениях», отказался от этой своей книги и просил, чтобы впредь другая работа «рассматривалась как изложение его философских взглядов и принципов», то и такие комментарии давать не стоит. А эту «другую работу я разобрал в книге {R-HUME}, и она в общем-то довольно тонка и вызывает возражений не больше, чем любая другая работа из разобранных мною.

[101] Кант И. Сочинения в 6-ти томах. – М.: Мысль, 1964 (т.3), 1965 (т.4), 1966 (т.6).

«Критика чистого разума» (1781) Канта начинается еще более обнадеживающими словами. Кант утверждает, что все аксиомы и теоремы математики истинны. Но почему, спрашивает Кант, мы так охотно принимаем эти истины? Ясно, что опыт сам по себе не делает математические утверждения истинными. На интересующий нас вопрос можно было бы ответить, если бы мы знали ответ на более общий вопрос: возможна ли сама наука математика? На этот вопрос Кант ответил так: наш разум сам по себе владеет формами пространства и времени. Пространство и время представляют собой разновидности восприятия (Кант называл их интуитивными представлениями), посредством которых разум созерцает опыт. Мы воспринимаем, организуем и осознаем опыт в соответствии с этими формами созерцания. Опыт входит в них, как тесто в формочки для печенья. Разум накладывает формы созерцания на полученные им чувственные восприятия, вынуждая те подстраиваться под заложенные в нем схемы. Так как интуитивное представление о пространстве берет свое начало в разуме, некоторые свойства пространства разум воспринимает автоматически.[102] Такие утверждения, как «прямая – кратчайший путь между двумя точками», «через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну», или как аксиома Евклида о параллельных, Кант называет априорными искусственными истинами. Они составляют неотъемлемую часть нашего умственного багажа. Геометрия занимается изучением лишь логических следствий из таких утверждений. Уже одно то, что наш разум созерцает опыт через изначально присущие ему «пространственные структуры», означает, что опыт согласуется с априорными синтетическими истинами и теоремами. Порядок и рациональность, которые мы, как нам кажется, воспринимаем во внешнем мире, в действительности проецируются на внешний мир нашим разумом и формами нашего мышления.[103]

Конструируя пространство на основе работы клеток головного мозга человека, Кант не видел причин для отказа от евклидова пространства. Собственную неспособность представить другие геометрии Кант счел достаточным основанием, чтобы утверждать, что другие геометрии не могут существовать. Таким образом, нельзя утверждать, что законы евклидовой геометрии изначально присущи миру или что мир создан богом на основе евклидовой геометрии: законы евклидовой геометрии представляют собой лишь механизм, с помощью которого человек организует и рационализирует свои ощущения. Что же касается бога, то, по мнению Канта, природа божественного лежит за пределами рационального знания, хоть он и считал веру в бога обязательной. Глубина философских воззрений Канта, пожалуй, была превзойдена лишь ограниченностью его геометрических представлений. Прожив всю жизнь в Кенигсберге, в Восточной Пруссии, и не выезжая из него далее чем на шестьдесят километров, Кант тем не менее считал себя способным мысленно представить геометрию Вселенной[104].[105]

---

[102] **В.Э.:** Можно удивляться (и восхищаться) той глубине, с какой Кант (в своем XVIII веке!) постиг и понял взаимные отношения «разума» и «опыта». Конечно же, «разум» имеет свои «априорные формы» (а мы теперь знаем, что это: врожденные мозговые программы), и при помощи этих «форм» (программ) он «упорядочивает опыт»; восприятие пространства определяется врожденным топокодером, который всей полученной из внешнего мира информации присваивает свои пространственные координаты – и т.д.

[103] **В.Э.:** Да, несомненно проецируется. Однако «порядок» внешнего мира не является одним только результатом нашей «проекции». Там есть свой объективный «порядок». А точные взаимоотношения «внешнего порядка» и «нашего порядка» – это вопрос тонкий, сложный и не до конца еще понятный. Например: Как выглядел бы видимый нами мир, если бы наш топокодер работал бы на основе не трехмерного, а четырехмерного отображения пространства?

[104] **Яглом:** Не особенно эрудированному в области геометрии, но глубоко мыслящему Канту были, впрочем, свойственны и глубоко нетривиальные прозрения. Так, в 1846 г. он писал [Кант жил с 1724 по 1804 год – *В.Э.* – писал это в 1746 году? – тогда 22-летним?], что трехмерность нашего пространства вытекает из характера закона всемирного тяготения Ньютона; это совершенно верно, но было строго доказано лишь много позже. Далее Кант, утверждал, что из другого закона притяжения сил вытекала бы иная структура пространства, иное число измерений, причем если иные пространства возможны, то весьма вероятно, что бог их где-то действительно разместил.

[105] **В.Э.:** То, что форма Закона всемирного тяготения (а также закона Кулона и всех остальных случаев обратной пропорциональности квадрату расстояния) тесно связана с трехмерностью пространства, это ясно – еще Гук же объяснил причину {Hooke}: «поскольку на расстоянии $r$ от массы сила (энергия, воздействие и т.д.) равномерно распространяется по сфере площади $4\pi r^2$, то сила в каждой точке этой сферы должна быть обратно пропорциональна $r^2$». Но фундаментальный вопрос состоит в следующем: «А что здесь первично?» Закон гравитации определяет трехмерность пространства? – или трехмерность

А как обстояло дело с математическими законами естествознания? Так как весь наш опыт вкладывается в формы чистого созерцания – пространство и время, математика должна быть применима ко всякому опыту. В «Метафизических начальных основаниях естествознания» (1786) Кант признал законы Ньютона и следствия из них самоочевидными. По утверждению Канта, ему удалось доказать, что законы Ньютона выводятся на основании чистого разума и что они не более чем допущения, позволяющие понять природу. Ньютон, по словам Канта, «позволил нам составить ясное представление о структуре Вселенной, которая во все времена будет одной и той же».

В более общем плане рассуждения Канта сводились к следующему. Мир науки – это мир чувственных ощущений, упорядоченных и управляемых разумом в соответствии с такими врожденными категориями, как пространство, время, причина и следствие, субстанция. Разум содержит своего рода «ложа», на которые должны укладываться «гости» извне. Чувственные ощущения рождаются в реальном мире, но, к сожалению, этот мир непознаваем. Реальность может быть познана только в субъективных категориях, создаваемых воспринимающим ее разумом. Следовательно, к организации опыта нет иного пути, кроме евклидовой геометрии и ньютоновской механики.[106] По мере возникновения новых наук опыт расширяется, но разум формулирует новые принципы, не обобщая новые опытные данные, а используя для их интерпретации ранее бездействующие «ложа». Способность разума созерцать раскрывается только в том случае, если ее питает опыт. Этим объясняется относительно позднее познание некоторых истин, например законов механики, по сравнению с другими истинами, известными на протяжении многих столетий.

Философия Канта, которую мы здесь едва затронули, воздавала хвалу человеческому разуму, но отводила ему роль инструмента познания не природы, а тайников человеческого ума. Опыт получил должное признание как необходимый элемент познания, так как ощущения, поступающие из внешнего мира, Кант считал сырым материалом, который упорядочивается и организуется разумом. Математика обрела свое место, став открывателем необходимых законов разума.

Представление о математике как о своде априорных истин было созвучно умонастроениям математиков. Но большинство из них не обратило внимания на то, каким образом Кант пришел к своим заключениям. По теории Канта, все утверждения математики не являются неотъемлемыми признаками физического мира, а создаются человеческим разумом. Такой вывод должен был бы насторожить математиков. Откуда известно, что разум всех людей устроен так, что организует ощущения совершенно одинаково и что организация пространственных ощущений непременно должна быть евклидовой? Какие мы имеем основания это утверждать? В отличие от Канта математики и физики продолжали верить во внешний мир, подчиняющийся законам, **не зависящим** от человеческого разума. Мир устроен рационально, считали они, и человек лишь раскрывает план, лежащий в основе мироздания, а далее, пользуясь этим планом, пытается предсказывать то, что происходит во внешнем мире.

Философия Канта и его авторитет раскрепостили и одновременно ограничили научно-философскую мысль. Подчеркивая силу разума как организующего начала в упорядочении чувственного опыта о мире, который нам не дано узнать доподлинно, Кант проложил путь к новым представлениям, в корне противоположным тем, которые в его время считались твердо установленными. Но упорно подчеркивая, что наш разум с необходимостью организует пространственные ощущения в соответствии с законами евклидовой геометрии, Кант тем самым

---

человеческого отображающего пространство аппарата определяет математическую форму Закона гравитации? Если бы человеческий топокодер использовал не три независимые величины, а четыре (и тем самым пространство для нас было бы четырехмерным), то, возможно, Закон всемирного тяготения принял бы форму, содержащую обратную пропорциональность уже **кубу** расстояния (поскольку площадь трехмерной сферы в четырехмерном пространстве вычисляется по формуле $S = 2\pi^2 R^3$). Сам физический закон (как изоморфизм между явлениями), конечно же, не зависит от человеческой отображающей системы, но та математическая форма, которую он приобретает, возможно, – зависит!

[106] **В.Э.:** В принципе это правильно: даже когда математики рассуждают о пространствах Лобачевского, Римана, Минковского и т.п., то всё равно все эти пространства рассматриваются на фоне и по отношению к Евклидовому пространству. Всё равно всё «проходит через него»; даже основные их понятия, такие как «искривление пространства» осмысленны только в сравнении с евклидовым пространством, иного «искривления» просто быть не может.

тормозил формирование иных взглядов.[107] Если бы Кант с большим вниманием следил за тем, как развивались события в современной ему математике, то, возможно, он не стал бы настаивать на том, что упорядочивание пространственных ощущений по образу и подобию евклидовой геометрии является единственным, которое может допустить наш разум.[108]

Безразличие к богу и даже лишение его роли творца законов мироздания, а также кантианские взгляды на эти законы как якобы присущие самой природе человеческого разума «вызвали реакцию» со стороны творца всего сущего. Бог решил наказать кантианцев, и особенно этих самодовольных, погрязших в гордыне и чрезмерно самоуверенных математиков, и «подбросил» им неевклидову геометрию, возникновение которой нанесло сокрушительный удар по достижениям человеческого разума, всемогущего и, казалось бы, не нуждающегося ни в чьей помощи.

Хотя к началу XIX в. роль бога становилась всё менее ощутимой и некоторые радикально настроенные философы, например Юм, отрицали все истины, математики того времени по-прежнему продолжали верить в истинность собственно математики и математических законов природы. Евклидова геометрия была наиболее почитаемым разделом математики не только потому, что именно с нее началось дедуктивное построение математических дисциплин, но и по той причине, что ее теоремы, как было установлено на протяжении более двух тысячелетий, полностью соответствовали результатам физических исследований. И именно евклидову геометрию «бог» избрал объектом нападения.

Одна из аксиом евклидовой геометрии издавна беспокоила математиков, однако совсем не потому, что они сомневались в ее истинности. Сомнения вызывала у них лишь формулировка аксиомы. Мы имеем в виду аксиому о параллельных, или, как ее часто называют, пятый постулат Евклида. Сам Евклид сформулировал пятый постулат следующим образом:

> Если прямая, падающая на две прямые [рис. 4.1], образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых. ([25][109], книги I–VI, с. 15.)

Иначе говоря, если углы 1 и 2 в сумме меньше 180°, то прямые $a$ и $b$, продолженные достаточно далеко, пересекутся.

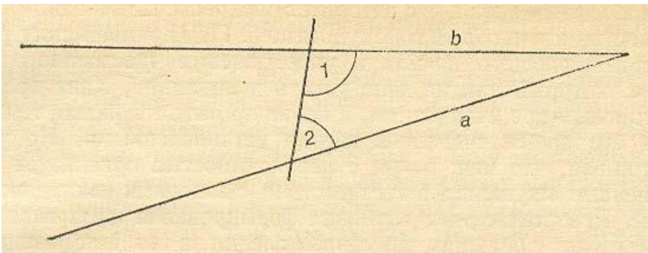



**Рис. 4.1.** Пятый постулат Евклида

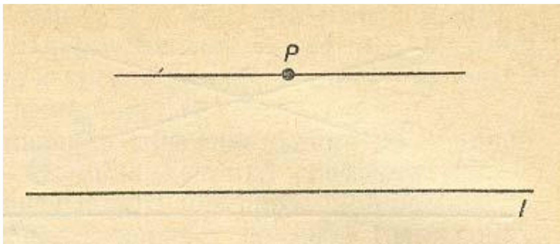



**Рис. 4.2.** Вариант аксиомы о параллельных, предложенный Джоном Плейфером

У Евклида были веские основания сформулировать аксиому о параллельных именно так, а не иначе. Он мог бы утверждать, например, что если сумма углов 1 и 2 равна 180°, то прямые $a$ и $b$ параллельны. Но Евклид явно боялся предположить, что могут существовать бесконечные прямые, которые никогда не пересекаются: любое утверждение о бесконечных прямых не подкреплялось опытом, в то время как аксиомы по определению должны были быть самоочевид-

---

[107] **Яглом:** Понятия *пространства*, *времени* и *геометрии* Кант считал априорными, заранее вложенными в наш разум и не подлежащими критике или замене какими-либо иными представлениями; высокий авторитет Канта закрепил эти ложные установки. Весьма вероятно, что именно нежелание вступать в конфликт с позицией столь высокочтимого в Германии философа побудили Гаусса не только воздержаться от публикации своих открытий в области неевклидовой геометрии, но и категорически запретить знающим об этом друзьям рассказывать кому-либо об его истинных воззрениях. **В.Э.:** Ср. Приложение № 4 к статье «Аксиоматический метод».

[108] **В.Э.:** Тут Клайн все-таки не понимает ни Канта, ни истинного положения дел. От того, что Лобачевский или кто-то другой придумает иную геометрию, она еще не станет врожденной и встроенной в человеческой голове. **Там** как была Евклидовая геометрия, так и осталась.

[109] Начала Евклида. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948 (книги I–VI), 1949 (книги VII–X).

ными истинами о физическом мире. Но опираясь на свою аксиому о параллельных и другие аксиомы, Евклид доказал существование параллельных.

Математики считали, что аксиома о параллельных в том виде, как ее сформулировал Евклид, слишком сложна. Ей недоставало простоты других аксиом. Должно быть, и сам Евклид был недоволен своим вариантом аксиомы о параллельных, ибо обратился к ней, лишь доказав все теоремы, какие только смог вывести без ее использования.

Со временем стала жизненно важной сходная проблема, над которой поначалу задумывались лишь немногие. Она сводилась к вопросу о том, существуют ли в физическом пространстве бесконечные прямые. Евклид достаточно осторожно постулировал лишь, что конечный отрезок прямой можно продолжить сколь угодно далеко, – но ведь даже и продолженный отрезок всё равно оставался конечным. Тем не менее, из рассуждений Евклида следовало, что бесконечные прямые существуют: если бы прямые были конечными, то их нельзя было бы продолжать сколь угодно далеко.

Первые попытки решить проблему, связанную с аксиомой Евклида о параллельных, были предприняты еще математиками Древней Греции. Эти попытки имели двоякую природу. Одни из них сводились к замене аксиомы о параллельных какой-нибудь более очевидной аксиомой. Другие были направлены на то, чтобы вывести аксиому о параллельных из девяти остальных аксиом Евклида: если бы удалось доказать, что пятый постулат Евклида в действительности представляет собой теорему, то все трудности отпали бы сами собой. На протяжении более двух тысячелетий многие десятки крупнейших математиков, не говоря уже о математиках меньшего ранга, безуспешно пытались решить проблему параллельных, предпринимая бессчетные попытки как первого, так и второго рода. История этой проблемы уходит корнями в глубокую древность и изобилует деталями, понятными лишь профессионалу. Мы опустим здесь ее потому, что ей посвящена обширная литература,[110] и, кроме того, этот вопрос не имеет прямого отношения к интересующей нас теме.

Из многих аксиом, предлагавшихся в качестве замены пятого постулата, упомянем лишь об одной. Ее и поныне приводят в некоторых учебниках геометрии. Этот вариант аксиомы о параллельных принадлежит Джону Плейферу (1748–1819), предложившему ее в 1795 г. (в английском «школьном» варианте «Начал» Евклида). Аксиома Плейфера гласит: существует одна и только одна прямая, проходящая через данную точку $P$, лежащую вне прямой $l$ (рис. 4.2), в плоскости, задаваемой точкой $P$ и прямой $l$, которая не пересекается с прямой $l$. Все аксиомы, предлагавшиеся вместо пятого постулата, на первый взгляд казались проще аксиомы Евклида, но при более внимательном рассмотрении оказывались не более удовлетворительными. Многие из них, в том числе и аксиома Плейфера, содержали утверждения, касающиеся не ограниченной части плоскости или пространства, а всего (бесконечного!) пространства. С другой стороны, аксиомы, предлагавшиеся взамен пятого постулата, которые не содержали прямого упоминания о «бесконечности» – например, аксиома о том, что существует два подобных, но не равных треугольника, – были слишком сложными и, во всяком случае, не были более предпочтительными, чем аксиома о параллельных, приведенная в «Началах» Евклида.

Вместе с тем были предприняты попытки решить проблему параллельных, доказав пятый постулат Евклида, исходя из остальных девяти аксиом. Наиболее значительные результаты здесь получил Джироламо Саккери (1667–1733), священник, член ордена иезуитов и профессор университета в Павии. Идея Саккери состояла в том, чтобы, заменив аксиому Евклида о параллельных ее отрицанием, попытаться вывести теорему, которая бы противоречила одной из доказанных Евклидом теорем. Полученное противоречие означало бы, что аксиома, отрицающая аксиому Евклида о параллельных – единственную аксиому, вызывавшую сомнения, – ложна, а следовательно, аксиома о параллельных Евклида истинна и является следствием девяти остальных аксиом.[111]

---

[110] Истории проблематики, связанной с пятым постулатом Евклида, посвящена, в частности, книга Роберто Бонолы «Неевклидова геометрия», впервые вышедшая в 1906 г. на итальянском языке. Английский перевод: Bonola R, Non-euclidean geometry, – N.Y. Dover Publ., 1955 ([26: Бонола Р. Неевклидова геометрия. – Спб.: Общественная польза, 1910.]; см. также [27: Каган В.Ф. Лобачевский. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948]).

[111] **В.Э.:** Если Саккери действительно рассуждал так, как пишет Клайн, то он уже считает геометрию вытекающей из аксиом. Сам Евклид явно считал не так.

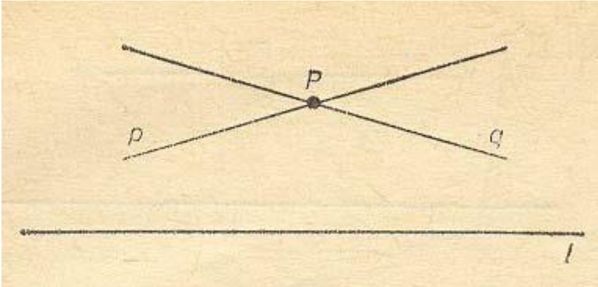



**Рис. 4.3.** Аксиома, принятая основоположниками неевклидовой геометрии (Саккери и др.)

Приняв за исходную аксиому Плейфера, эквивалентную аксиоме Евклида о параллельных, Саккери сначала предположил,[112] что через точку *P*, лежащую вне прямой *l* (рис. 4.3), не проходит ни одна прямая, параллельная прямой *l*. Из этой аксиомы и девяти остальных аксиом, принятых Евклидом, Саккери вывел противоречие. Затем Саккери испробовал вторую и единственно возможную альтернативу, предположив, что через точку *P* проходят по крайней мере две прямые *p* и *q*, не пересекающиеся с прямой *l*, сколько бы их ни продолжали. Исходя из этой аксиомы, Саккери удалось доказать много интересных утверждений, пока он не дошел до теоремы, показавшейся ему настолько странной, что он счел ее противоречащей ранее полученным результатам. Решив, что ему удалось тем самым доказать выводимость пятого постулата Евклида из девяти остальных аксиом, Саккери выпустил книгу под многозначительным названием «Евклид, избавленный от всяких пятен» (*Euclides ab omni naevo vindicatus,* 1733). Однако впоследствии математики выяснили, что во втором случае Саккери в действительности не пришел к противоречию и что, следовательно, проблема параллельных по-прежнему остается открытой. Попытки найти подходящую замену евклидовой аксиоме о параллельных или доказать, что она следует из девяти остальных аксиом, были столь многочисленны и тщетны, что в 1759 г. Д'Аламбер назвал проблему параллельных «скандалом в области оснований геометрии».

Постепенно математики начали приходить к правильному пониманию статуса аксиомы Евклида о параллельных. В своей докторской диссертации 1763 г. Георг С. Клюгель (1739–1812), впоследствии профессор университета в Хельмштадте, отлично осведомленный и о книге Саккери, и о многих других попытках «исправить» аксиому о параллельных, высказал весьма ценное соображение о том, что принятие большинством людей аксиомы Евклида о параллельных как истины, не подлежащей сомнению, основано на опыте. Так впервые была явно сформулирована идея о том, что весомость аксиом определяется их соответствием опыту, а не самоочевидностью.[113] Клюгель выразил сомнение в том, что пятый постулат Евклида можно вывести из остальных аксиом. Более того, Клюгель понял, что Саккери пришел не к противоречию, а лишь к результатам, поразившим его своей необычностью.

Диссертация Клюгеля привлекла внимание одного из крупнейших математиков XVIII в. – Иоганна Генриха Ламберта (1728–1777), и тот также принялся размышлять над проблемой параллельных. В своей книге «Теория параллельных прямых» (написанной в 1766 г. и опубликованной в 1786 г.) Ламберт, подобно Саккери, рассмотрел две альтернативные возможности. И он также обнаружил, что гипотеза, согласно которой через точку *P* вне прямой *l* (см. рис. 4.3) не проходит ни одна прямая, параллельная прямой *l*, приводит к противоречию. Но в отличие от Саккери Ламберт не считал, что альтернативная гипотеза (согласно которой через точку *P* проходят по крайней мере две прямые, параллельные прямой *l*) приводит к противоречию. Более того, Ламберт понял, что любой набор гипотез, который не приводит к противоречию, порождает некую геометрию. Такая геометрия логически непротиворечива, хотя и не имеет прямого отношения к реальным, физическим фигурам.[114]

Работа Ламберта и некоторых других авторов, в частности учителя Гаусса, профессора Гёттингенского университета Абрахама Г. Кестнера (1719–1800), заслуживают особого упомина-

---

[112] Приводимое ниже описание воспроизводит схему рассуждений Саккери с небольшими изменениями. [В частности, за исходный пункт своих рассуждений Саккери – как позже и Ламберт – принял не аксиому Плейфера, а предположение, равносильное утверждению о равенстве суммы углов треугольника 180°; в опровержение этого предположения утверждалось, что сумма углов треугольника меньше (соответственно больше) 180°. – *Ред*.]

[113] Аналогичную мысль в свое время высказывал, правда мимоходом, и Ньютон, но на нее не обратили внимания.

[114] **Яглом:** Окончательного признания возможности неевклидовой геометрии у Ламберта всё же не было; по-видимому, впервые решились на этот шаг упоминаемые ниже Ф.К. Швейкарт и его племянник Ф.А. Тауринус. Однако Ламберт высказал провидческую мысль о том, что неевклидова геометрия должна была бы выполняться на сфере мнимого радиуса, если бы такая сфера существовала; впоследствии эта, в то время казавшаяся бессодержательной, идея была реализована даже несколькими различными путями.

ния. Эти ученые были убеждены, что пятый постулат Евклида невозможно доказать, исходя из девяти остальных его аксиом, т.е. утверждали, что аксиома о параллельных независима от остальных аксиом. Кроме того, Ламберт был убежден, что, приняв альтернативную аксиому, противоречащую аксиоме Евклида, можно построить логически непротиворечивую геометрию, хотя и не высказал каких-либо утверждений о применимости такой геометрии. Все трое – Клюгель, Ламберт и Кестнер – близко подошли к признанию возможности неевклидовой геометрии.[115]

Самым выдающимся математиком среди тех, кто работал над решением проблемы, возникшей в связи с аксиомой Евклида о параллельных, был Гаусс. Он прекрасно знал о безуспешных попытках доказать или опровергнуть аксиому о параллельных, ибо такого рода сведения не составляли секрета для гёттингенских математиков. Историю проблемы параллельных досконально знал учитель Гаусса Кестнер. Много лет спустя (1831) Гаусс сообщил своему другу Шумахеру, что еще в 1792 г. (когда Гауссу было всего лишь 15 лет) он понял возможность существования логически непротиворечивой геометрии, в которой постулат Евклида о параллельных не выполняется. Но вплоть до 1799 г. Гаусс не прекращал попыток вывести постулат Евклида о параллельных из других, более правдоподобных допущений и считал евклидову геометрию истинной геометрией физического пространства, хотя и сознавал возможность существования других логически непротиворечивых – неевклидовых – геометрий. Однако в письме Гаусса к другу и собрату по профессии Фаркашу Бойаи от 16 декабря 1799 г. мы читаем:

> Я лично далеко продвинулся в моих работах (хотя другие занятия, совершенно не связанные с этой темой, оставляют мне для этого мало времени). Однако дорога, которую я выбрал, ведет скорее не к желательной цели, а к тому, чтобы сделать сомнительной истинность геометрии. Правда, я достиг многого, что для большинства могло бы сойти за доказательство, но это не доказывает в моих глазах ровно ничего; например, если бы кто-либо мог доказать, что возможен такой прямоугольный треугольник, площадь которого больше любой заданной, то я был бы в состоянии строго доказать всю геометрию.
>
> Большинство сочтет это за аксиому, я же нет. Так, могло бы быть, что площадь всегда будет ниже некоторого данного предела, сколь бы удаленными друг от друга в пространстве ни были предположены три вершины треугольника. ([24][116], с. 101–102.)

Примерно с 1813 г. Гаусс начал работать над своей неевклидовой геометрией, которую он называл сначала антиевклидовой, затем астральной (т.е. звездной – возможно, выполняющейся на далеких звездах; это название принадлежало Фердинанду Карлу Швейкарту (1780–1859), независимо от Гаусса пришедшему к тем же идеям) и, наконец, неевклидовой геометрией. Гаусс пришел к убеждению, что построенная им геометрия логически непротиворечива и применима к физическому миру.

В письме от 8 ноября 1824 г. к своему другу Францу Адольфу Тауринусу (1794–1874) Гаусс сообщал:

> Допущение, что сумма углов треугольника меньше 180°, приводит к своеобразной, отличной от нашей [евклидовой] геометрии; эта геометрия совершенно последовательна; я развил ее для себя совершенно удовлетворительно... Предложения этой геометрии отчасти кажутся парадоксальными и непривычными человеку, даже несуразными; но при строгом и спокойном размышлении оказывается, что они не содержат ничего невозможного. ([24][117], с. 105.)

---

[115] **В.Э.:** Ну вот, так они начинают рассматривать геометрии как совокупность теорем, вытекающих из аксиом. Объективный предмет геометрии (потенциальные продукты объектоконструкторов в пространстве топокодера), который хоть и не оговаривался Евклидом, но четко у него чувствуется, теперь уходит в тень и постепенно исчезает из поля зрения. Интересно, как Евклид определил бы, что такое геометрия? Вряд ли он сказал бы, что это учение о свойствах физического пространства (как мнение древних математиков передает Клайн), и мне представляется очевидным, что уж точно он не сказал бы, что это совокупность утверждений, вытекающих из аксиом. Скорее всего, он сказал бы, что геометрия – это учение о свойствах линий, фигур и тел (т.е., по-нашему: – продуктов объектоконструкторов).

[116] *Об основаниях геометрии*. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. – М.–Л.: Гостехиздат, 1956.

[117] *Об основаниях геометрии*. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. – М.–Л.: Гостехиздат, 1956.

В письме к математику и астроному Фридриху Вильгельму Бесселю, отправленному 27 января 1829 г., Гаусс еще раз высказал убеждение, что постулат о параллельных не может быть выведен из других аксиом Евклида.

Мы не будем подробно рассматривать специфические особенности того варианта неевклидовой геометрии, который был создан Гауссом [см., например, [28][118], с. 193–294]. Он не оставил полного дедуктивного изложения своей теории, а доказанные им теоремы во многом напоминали те, с которыми мы вскоре встретимся, когда перейдем к работам Лобачевского и Бойаи. В письме к Бесселю Гаусс признается, что вряд ли когда-нибудь опубликует свои открытия в этой области, опасаясь, как он выразился, вызвать крики беотийцев (беотийцы – древнегреческое племя, чья тупость вошла в поговорку). Не следует забывать, что в начале XIX в. лишь немногие математики постепенно подошли к заключительному этапу создания неевклидовой геометрии, а мыслящий мир в основном пребывал в уверенности, что евклидова геометрия – единственно возможная. То немногое, что нам известно о работах Гаусса по неевклидовой геометрии, собрано по крохам из его писем к друзьям, двух коротких заметок в *Göttingische gelehrte Anzeigen* за 1816 г. и 1822 г. и из нескольких записей, датированных 1831 г., найденных среди бумаг Гаусса после его смерти.

Но более значительный вклад, чем Гаусс, в создание неевклидовой геометрии внесли два других математика: Н.И. Лобачевский и Я. Бойаи (Я. Больяй). В действительности их работы явились как бы эпилогом длительного развития новаторских идей, высказанных их предшественниками, однако, поскольку Лобачевский и Бойаи первыми опубликовали дедуктивные изложения новой системы, их принято считать создателями неевклидовой геометрии. Русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) учился в Казанском университете, где впоследствии (1827–1846) он состоял профессором и ректором. Его взгляды на основании геометрии сложились к 1826 г., и он изложил их в цикле статей и двух книгах. Янош Бойаи (1802–1860), сын Фаркаша Бойаи, был офицером австро-венгерской армии. Свою работу (объемом в 26 страниц) по неевклидовой геометрии [29][119] под названием «Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида, что *a priori* никогда решено быть не может, с прибавлением, к случаю ложности, геометрической квадратуры круга» Бойаи опубликовал в качестве приложения к первому тому латинского сочинения своего отца «Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики» (*Tentatnen juventutem studiosam in elementa Matheoseos*). Хотя эта книга вышла в 1831–1832 гг.[120], т.е. после первых публикаций Лобачевского, вышедших в свет в 1829–1830 гг., Я. Бойаи, по-видимому, разработал свои идеи о неевклидовой геометрии уже в 1825 г. и убедился, что новая геометрия непротиворечива. В письме к отцу от 23 ноября 1823 г. Янош сообщает: «Я совершил столь чудесные открытия, что не могу прийти в себя от восторга».

Гаусс, Лобачевский и Бойаи поняли, что аксиома Евклида о параллельных не может быть доказана на основе девяти остальных аксиом и что для обоснования евклидовой геометрии необходимо принять какую-то дополнительную аксиому о параллельных. А поскольку дополнительная аксиома не зависит от остальных, то, во всяком случае, логически вполне допустимо принять противоположное ей утверждение – и далее выводить следствия из новой системы аксиом.

С чисто математической точки зрения содержание работ Гаусса, Лобачевского и Бойаи очень просто. Мы ограничимся здесь рассмотрением варианта неевклидовой геометрии, предложенного Лобачевским, так как все трое сделали по существу одно и то же. Лобачевский смело отверг аксиому Евклида о параллельных и принял допущение, высказанное еще Саккери. Пусть задана прямая $AB$ и точка $P$ вне ее (рис. 4.4). Тогда все прямые, проходящие через точку $P$, распадаются по отношению к прямой $AB$ на два класса: класс прямых, пересекающих $AB$, и класс прямых, которые $AB$ не пересекают. К числу последних принадлежат две прямые $p$ и $q$,

---

[118] Каган В.Ф. *Лобачевский и его геометрия*. – М.: Гостехиздат, 1956, с. 193–194.

[119] Больяи (Бойаи) Я. *Appendix*. Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида, что *a priori* никогда решено быть не может, с прибавлением, к случаю ложности, геометрической квадратуры круга. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950, 235 с.

[120] **Яглом:** Книга *Tentamen* вышла в свет в 1832 г., однако уже в 1831 г. Я. Бойаи имел на руках оттиски своего Приложения (*Appendix*) к книге, один из которых он сразу же отправил Гауссу. Впрочем, Гаусс не получил этой работы и ознакомился с ней, лишь прочитав экземпляр книги своего друга Фаркаша Бойаи.

разделяющие наши два класса прямых. Сказанному можно придать более точный смысл. Если $P$ – точка, находящаяся от прямой $AB$ на расстоянии $a$ ($a$ – длина перпендикуляра $PD$, опущенного из точки $P$ на прямую $AB$), то существует острый угол α, такой, что все прямые, составляющие с перпендикуляром $PD$ угол, меньший α, пересекаются с прямой $AB$, а все прямые, составляющие с $PD$ угол, больший или равный α, не пересекаются с $AB$. Две прямые $p$ и $q$, образующие с $PD$ угол α, называются параллельными по Лобачевскому прямой $AB$, а угол $\alpha = (\alpha(a))$ называется углом параллельности (отвечающим отрезку $PD = a$). Прямые, проходящие через точку $P$ (отличные от параллельных прямых $p$ и $q$) и не пересекающиеся с прямой $AB$, называются расходящимися с $AB$ прямыми (или сверхпараллельными ей; в евклидовой геометрии они были бы параллельны прямой $AB$). Если понимать параллелизм по Евклиду, т.е. называть параллельными любые две прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются между собой, то в геометрии Лобачевского через точку $P$ проходит **бесконечно много** прямых, параллельных $AB$.

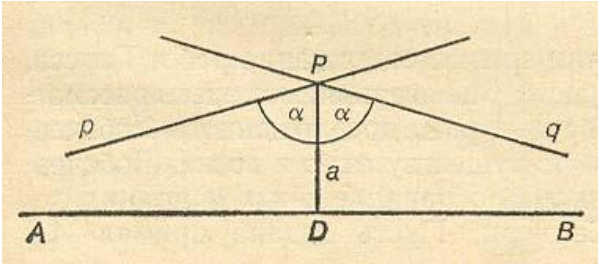


**Рис. 4. 4.** Угол параллельности

Затем Лобачевский доказывает несколько ключевых теорем. Если угол α равен π/2, то мы приходим к евклидовой аксиоме о параллельных. Если угол α острый, то при неограниченном росте $a$ он монотонно убывает и стремится к нулю. Сумма углов треугольника всегда меньше 180° и стремится к 180°, когда площадь треугольника неограниченно убывает. Два подобных треугольника, имеющих одинаковые углы, всегда конгруэнтны.

Ни один обширный раздел математики и даже ни один крупный математический результат никогда не были детищем лишь одного какого-либо человека. В лучшем случае кто-то один делал решающий шаг или высказывал ту или иную важную идею. Также и неевклидова геометрия развивалась совместными усилиями многих известных и неизвестных математиков. Если под неевклидовой геометрией понимать вывод следствий из системы аксиом, содержащей опровержение евклидовой аксиомы о параллельных, то честь ее создания следует приписать Саккери, причем даже он использовал результаты многих своих предшественников, пытавшихся найти подходящую замену аксиоме Евклида.[121] Если под неевклидовой геометрией понимать осознание возможности других геометрий, отличных от евклидовой, то пальму первенства в ее создании следует отдать Клюгелю и Ламберту. Но самое важное утверждение о неевклидовой геометрии состоит в том, что она точно так же, как и евклидова геометрия, позволяет описывать свойства физического пространства.[122] Геометрия физического пространства вовсе не обязательно должна быть евклидовой; более того, тот факт, что в физическом пространстве реализуется именно евклидова геометрия, нельзя гарантировать никакими априорными соображениями.[123] Осознание этого важного факта не требует никаких математических ухищрений, потому что всё необходимое уже было сделано раньше, и первым, кто постиг эту истину, был Гаусс.[124]

---

[121] **Яглом:** Саккери твердо считал, что доказал 5-й постулат Евклида; поэтому его никак нельзя считать создателем неевклидовой геометрии. Клюгеля и Ламберта в том контексте, в каком упоминает автор их имена, уместнее заменить Швейкартом и Тауринусом (ср. прим.9); однако малочисленность их публикаций на эту тему, которую они вскоре оставили (Ф.К. Швейкарт вообще был по специальности юристом, а не математиком), делает сомнительным их приоритет в создании неевклидовой геометрии. Более основательна стандартная точка зрения, приписывающая это выдающееся открытие Лобачевскому [первый публичный доклад на эту тему (1826); первая публикация (1829–1830)], Бойаи (явно независимая от Лобачевского публикация 1831–1832 гг.) и Гауссу.

[122] **В.Э.:** Но не человеческого топокодера!

[123] **Яглом:** И даже никакими экспериментами тоже; утверждение о существовании одной или многих прямых, проходящих через точку $P$ и не пересекающих $AB$, апеллирует к представлению о всем (бесконечном!) пространстве и потому непроверяемо; опыты же с измерением суммы углов треугольника в принципе могут помочь установить отличие этой суммы от 180°, но никогда – равенство 180°: ведь всегда можно опасаться, что полученное нами значение столь близко к 180° лишь потому, что выбранный треугольник слишком мал.

[124] **Яглом:** Лобачевский и Гаусс независимо осознали, что геометрия реального (физического) пространства может быть как евклидовой, так и неевклидовой. (Бойаи, заинтересованного в первую очередь в, так сказать, «логическом статусе» новой геометрии, эта постановка вопроса занимала меньше.)

Один из биографов Гаусса утверждает, что тот пытался проверить свой вывод о пригодности неевклидовой геометрии к описанию реального мира. Гаусс обратил внимание на то, что в евклидовой геометрии сумма углов треугольника равна 180°, а в неевклидовой – меньше 180°. В течение нескольких лет Гаусс занимался топографической съемкой Ганновера и имел доступ ко всем данным, полученным при съемке. Вполне возможно, что он воспользовался этими данными для проверки суммы углов треугольника. В знаменитой работе от 1827 г. Гаусс отметил, что сумма углов треугольника, образованного тремя горными вершинами, Брокеном, Хоэхагеном и Инзельбергом, превышает 180° примерно на 15". Этот результат сам по себе ничего не доказывал, так как ошибки измерения были гораздо больше 15"; поэтому правильное значение суммы углов вполне могло быть равно 180° или быть меньше 180°. Гаусс, по-видимому, понимал, что выбранный им треугольник слишком мал для решающей проверки, так как в его (Гаусса) неевклидовой геометрии отклонение суммы углов треугольника от 180° пропорционально площади треугольника. Существенное отклонение от 180° можно было бы обнаружить в треугольнике гигантских размеров, какие возможны разве что в астрономии. И всё же Гаусс был убежден, что новая геометрия применима к описанию физического мира ничуть не хуже, чем евклидова геометрия.

Лобачевского также интересовала проблема применимости его геометрии к физическому пространству – и он аргументировал ее применимость к геометрическим фигурам очень больших размеров. Таким образом, к 30-м годам XIX в. неевклидову геометрию не только признали в узком кругу математиков, но и сочли применимой к физическому пространству.

Вопрос о том, какая геометрия лучше всего соответствует физическому пространству (этот вопрос больше всего волновал Гаусса), способствовал появлению еще одного творения человеческого разума – новой геометрии, еще более склонившей математический мир к убеждению, что геометрия физического пространства может быть неевклидовой. Создателем новой геометрии стал Георг Барнхард Риман (1826–1866), ученик Гаусса, занявший впоследствии пост профессора математики в Гёттингене. Хотя работы Лобачевского и Бойаи не были в деталях известны Риману, о них был осведомлен Гаусс, и Риман, возможно, знал о сомнениях своего учителя относительно того, что геометрия реального мира непременно должна быть евклидовой.

Гаусс предложил Риману выбрать для пробной лекции, которую тот должен был прочитать для получения звания приват-доцента, тему об основаниях геометрии. Риман прочитал свою лекцию в 1854 г. на философском факультете Гёттингенского университета. На лекции присутствовал и Гаусс. В 1868 г. – уже после смерти Римана – его лекция была опубликована под названием «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» ([24][125], с. 309–325). В ней Риман подробно анализировал проблему структуры пространства. Сначала он рассмотрел вопрос о том, что достоверно известно о физическом пространстве. Риман поставил вопрос так: какие данные и условия заранее заложены в самом понятии пространства до того, как мы <u>опытным</u> путем устанавливаем, какими свойствами может обладать физическое пространство? Из этих данных и условий, приняв их за аксиомы, Риман намеревался вывести остальные свойства пространства. Аксиомы и логические следствия из них можно было бы считать априорными и необходимыми истинами. Все остальные свойства пространства подлежали эмпирическому исследованию. Риман попытался показать (и в этом состояла одна из главных целей его программы), что аксиомы Евклида в действительности имеют эмпирическое происхождение, а не являются самоочевидными истинами. Риман избрал аналитический подход (опирающийся на математический анализ и некоторые его высшие разделы) из опасения, что при геометрических доказательствах нас могут вводить в заблуждение чувственные восприятия и мы можем предположить такие свойства и факты, которые явно не участвуют в доказательстве.

Предложенный Риманом подход к анализу структуры пространства отличался большой общностью, и для наших целей нет необходимости входить здесь в его детали. Исследуя априорные свойства пространства, Риман ввел некое представление, которое впоследствии стало еще более важным, а именно различие между отсутствием границ («безграничностью») и бесконечностью пространства. (Например, поверхность сферы не имеет границ, но она не бесконечна.) Безграничность, подчеркнул Риман, на эмпирическом уровне воспринимается легче, чем бесконечная протяженность.

---

[125] *Об основаниях геометрии*. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. – М.–Л.: Гостехиздат, 1956.

Идея Римана о пространстве, не имеющем границ, но не бесконечно протяженном, послужила стимулом к созданию еще одной элементарной неевклидовой геометрии, известной ныне под названием удвоенной эллиптической геометрии.[126] Сначала и сам Риман и Эудженио Бельтрами (1835–1900) рассматривали новую геометрию как применимую к некоторым поверхностям, например таким, как сфера, на которой роль «прямых» играют дуги больших кругов. Но под влиянием работ Кэли и других авторов математикам пришлось примириться с мыслью, что удвоенная эллиптическая геометрия, как и геометрия Гаусса, Лобачевского и Бойаи, может описывать наше трехмерное физическое пространство, в котором роль прямой играет след, оставленный краем линейки.

В удвоенной эллиптической геометрии прямая не ограничена, хотя длина ее не бесконечна. Более того, в удвоенной эллиптической геометрии вообще нет параллельных. Так как в новой геометрии остается в силе часть аксиом евклидовой геометрии, некоторые ее теоремы сохраняют тот же вид, что и теоремы, известные нам из «Начал» Евклида. Например, теорема о том, что два треугольника конгруэнтны, если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, дословно переносится в удвоенную эллиптическую геометрию, как и другие признаки конгруэнтности треугольников. Но основная часть теорем удвоенной эллиптической геометрии отличается как от теорем евклидовой геометрии, так и от теорем геометрии Гаусса–Лобачевского–Бойаи. Так, одна из теорем этой необычной геометрии утверждает, что все прямые имеют одинаковую длину и каждые две из них пересекаются в двух точках. Другая теорема гласит, что все перпендикуляры к данной прямой пересекаются в двух точках. Сумма углов треугольника в удвоенной эллиптической геометрии всегда больше 180°, но она, убывая, стремится к 180°, когда площадь треугольника приближается к нулю. Два подобных треугольника обязательно конгруэнтны. Что же касается применимости удвоенной эллиптической геометрии к физическому миру, то все аргументы относительно применимости ранее созданной неевклидовой геометрии, впоследствии получившей название гиперболической геометрии, равным образом относятся и к ней.[127]

На первый взгляд мысль о том, что любая из этих странных геометрий могла бы соперничать с евклидовой геометрией и даже быть более ценной в приложениях к реальной Вселенной, кажется нелепой. Но Гаусс имел смелость рассмотреть и такую возможность. Независимо от того, использовал ли он результаты измерений, приведенные в его работе 1827 г., для проверки применимости неевклидовой геометрии к реальному миру, Гаусс был первым, кто не только с уверенностью заявил, что неевклидова геометрия применима к физическому пространству, но и осознал, что мы более не можем быть уверены в истинности евклидовой геометрии. Трудно утверждать, находился ли Гаусс под непосредственным влиянием идей Юма. Во всяком случае, предпринятую Кантом попытку опровергнуть Юма Гаусс не считал достаточно серьезной. Не следует забывать, однако, что Гаусс жил во времена, когда истинность математических законов была поставлена под сомнение, и он не мог не ощущать влияния той духовной атмосферы, в которой он жил, как все мы не можем не дышать воздухом, который нас окружает. Новые взгляды, пусть незаметно для него самого, проникали в сознание Гаусса. Если бы Саккери родился на сто лет позже, возможно, и он пришел бы к тем же выводам, что и Гаусс.

Насколько можно судить, сначала Гаусс сделал заключение, что во всей математике нет ничего истинного. В письме к Бесселю от 21 ноября 1811 г. он утверждал:

> Не следует забывать о том, что эти функции [комплексного переменного], подобно всем математическим конструкциям, являются всего лишь нашими творениями и что в тот момент, когда утрачивает смысл определение, с которого мы начали разработку их теории, следует спрашивать

---

[126] **Яглом:** Ее чаще называют *сферической* – трехмерную сферическую (или удвоенную эллиптическую) геометрию можно трактовать как геометрию (трехмерной) сферической поверхности шара четырехмерного евклидова пространства.

[127] Впоследствии Феликс Клейн рассмотрел еще одну простую неевклидову геометрию, родственную удвоенной эллиптической геометрии, но отличающуюся от нее тем, что здесь уже любые две прямые пересекаются в одной точке. Клейн назвал такую геометрию просто эллиптической. [Риман, который рассматривал строение геометрий лишь в «малом», в окрестности одной точки пространства, не ставил вопроса о глобальной структуре введенных им пространств; именно это и позволяет – как весьма часто делают – считать его создателем и эллиптической геометрии. – *Ред.*]

себя, не «что такое эти функции», а какое допущение удобнее принять, чтобы введенное нами понятие функции сохранило смысл.[128]

Но отказаться от сокровищ было не так-то легко. Гаусс, по-видимому, подверг пересмотру проблему истины в математике и счел, что он нашел твердую почву, на которой можно возводить фундамент. В письме Гаусса к Генриху Вильгельму Ольберсу (1758–1840), написанному в 1817 г., говорится:

> Я всё более убеждаюсь в том, что [физическая] необходимость нашей [евклидовой] геометрии не может быть доказана, по крайней мере человеческим разумом и для человеческого разума. Может быть, на том свете мы сможем постичь структуру пространства, пока непостижимую. А до тех пор геометрию надлежит помещать в один класс не с арифметикой, носящей чисто априорный характер, а с механикой, истины которой требуют экспериментальной проверки.[129]

Гаусс в отличие от Канта не считал законы механики истинами. Как и большинство ученых, Гаусс разделял взгляды Галилея, утверждавшего, что эти законы основаны на опыте. В письме Гаусса Бесселю от 9 апреля 1830 г. содержится следующее признание:

> По моему глубокому убеждению теория пространства занимает в нашем знании совершенно иное место, нежели чистая математика [оперирующая с числами]. Во всем нашем знании нет ничего такого, что сколько-нибудь убедительно доказывало бы абсолютную необходимость (и следовательно, абсолютную истинность), столь характерную для чистой математики. Нам остается лишь смиренно добавить, что если число – это продукт нашего разума, то пространство – это реальность, лежащая вне нашего разума, которой мы не можем предписывать свои законы.[130]

Гаусс считал носителем истины арифметику и, следовательно, основанные на арифметике алгебру и математический анализ (дифференциальное и интегральное исчисление и высшие разделы анализа), так как арифметические истины легко постигаются нашим разумом.[131]

Мысль о том, что евклидова геометрия – это геометрия реального пространства, т.е. абсолютная истина о пространстве, настолько глубоко вошла в сознание людей,[132] что любые идеи противоположного толка, в частности идеи Гаусса, на протяжении многих лет отвергались. Математик Георг Кантор говорил о законе сохранения невежества. Не так-то легко опровергнуть любое неверное заключение, коль скоро к нему пришли и оно получило достаточно широкое распространение, причем чем менее оно понятно, тем более упорно его придерживаются. На протяжении почти тридцати лет после выхода в свет работ Н.И. Лобачевского и Я. Бойаи математики, за редкими исключениями, игнорировали неевклидовы геометрии: их считали своего рода курьезом[133].[134] Некоторые математики не отрицали, что неевклидовы геометрии логически непротиворечивы; другие же были убеждены, что новые геометрии не могут не

---

[128] **В.Э.:** Ну правильно! И если бы Гаусс был знаком с Веданской теорией, то свои слова он мог бы переформулировать так: «Какие мозговые программы (алгоритмы) должны быть приняты (созданы), чтобы стало возможным изучать такие функции?».

[129] **В.Э.:** Это потому, что Гаусс не различал пространство топокодера и физическое пространство. Если их различать, то сразу понятно, что первое «носит чисто априорный характер», а второе «требуют экспериментальной проверки».

[130] **В.Э.:** Физическое пространство – но не пространство топокодера.

[131] **В.Э.:** Однако на самом деле арифметика и пространство топокодера очень тесно связаны, так как пространство топокодера (внутреннее пространство человека) создается свободным комбинированием трех независимых ВЕЛИЧИН, т.е. тех самых множеств, классификацией соотношений между которыми порождаются числа.

[132] **В.Э.:** Они не понимали разницу между физическим пространством и пространством топокодера; переносили свойства второго на первое.

[133] **Яглом:** Хорошо известно, как страдал Лобачевский от непризнания его работ в официальных кругах, в частности в Российской академии наук; не получил никакого признания и *Appendix* Я. Бойаи. Характерно также, что еще в 1869–1870 гг. видный французский математик, академик Жозеф Бертран (1822–1900) печатал в «Докладах» Парижской академии наук свои «опровержения» неевклидовой геометрии, к которым он относился с полной серьезностью.

[134] **В.Э.:** Менее известно, как страдал Валдис Эгле от того, что Веданскую теорию не то что не признавали более 30 лет, а просто вообще отказывались даже ее рассмотреть и хотя бы раскритиковать. Были даже попытки завести на него уголовное дело в ответ на требование это сделать (Лобачевского хотя бы в тюрьму не пытались посадить...).

содержать противоречий и потому бесполезны.[135] Почти все математики считали, что единственно верной геометрией физического пространства должна быть евклидова геометрия.

Однако математики забыли о боге – и всемогущий геометр не стал открывать им, какой из нескольких конкурирующих геометрий он руководствовался при сотворении мира. Математикам не оставалось ничего другого, как попытаться установить истинную геометрию мира своими силами. Но вот после смерти Гаусса в 1858 г., когда его репутация была необычайно высокой, становятся известными материалы, обнаруженные среди бумаг «короля математиков», а опубликованная в 1868 г. лекция Римана (1854) убеждает многих математиков в том, что и неевклидова геометрия может быть геометрией физического пространства и что любые априорные утверждения о том, какая из геометрий является истинной, лишены всяких оснований. Уже одно то, что появились несколько противоречащих друг другу геометрий, само по себе было ударом. Еще более сильный шок вызвала полная невозможность указать, какая из геометрий истинна,[136] и даже установить, истинна ли хоть какая-нибудь одна из них. Стало ясно, что математики сформулировали казавшиеся им правильными аксиомы геометрии, руководствуясь своим весьма ограниченным опытом,[137] и ошибочно сочли эти аксиомы самоочевидными истинами. Математики оказались в положении, о котором можно сказать словами Марка Твена: «Человек – животное религиозное. Только обретя сразу несколько религий, он приобщился к истинной религии».

Постепенно математики приняли неевклидову геометрию и вытекавшие из ее существования выводы о границах истинности геометрии; однако это произошло отнюдь не потому, что кому-то удалось каким-то образом подкрепить аргументы в пользу применимости неевклидовой геометрии к физическому пространству. Скорее всего, неевклидова геометрия была принята по той простой причине, о которой на заре XX в. говорил создатель квантовой механики Макс Планк: «Новая научная истина побеждает не потому, что ее противники убеждаются в ее правильности и прозревают, а лишь по той причине, что противники постепенно вымирают, а новое поколение усваивает эту истину буквально с молоком матери».

В вопросе об истинности всей математики в целом некоторые математики встали на сторону Гаусса. Они считали, что истина кроется в числах, составляющих основу арифметики, алгебры, дифференциального и интегрального исчисления, а также высших разделов математического анализа. Карлу Густаву Якоби (1804–1850) принадлежит высказывание: «Бог всегда арифметизует»[138]. В отличие от Платона Якоби не считал, что бог вечно геометризует.

То, что математикам удалось отвести смертельную опасность, приняв за абсолютную истину разделы математики, основанные на понятии числа, по-видимому, имело в середине XIX в. несравненно более далеко идущие последствия и было более жизненно важным для науки, чем существование нескольких геометрий. К сожалению, математике предстояло пережить новые потрясения. И чтобы разобраться в их истоках, нам придется вернуться немного назад.

---

[135] **Яглом:** Типичная для 2-й половины XX в. «арифметизация математики», попытка построить все математические дисциплины на, казалось бы, незыблемом фундаменте арифметики, обычно связывается с главой берлинской математической школы Карлом Вейерштрассом (1815–1897) и другими берлинскими математиками [Леопольдом Кронекером (1823–1891), Георгом Фробениусом (1849–1917), Эрнстом Куммером (1810–1893) и др.].

[136] **В.Э.:** Здесь надо только уточнить, что означает слово «истинна». Человеческий топокодер работает по (трехмерной) Евклидовой геометрии, и в ЭТОМ смысле она абсолютно «истинна». Что же касается «физического пространства», то у меня есть весьма сильные подозрения, что это понятие вообще недостаточно четко определено, чтобы о нем можно было рассуждать. Я подозреваю (но не утверждаю это категорично), что «физического пространства» вообще в природе нет, и оно не имеет нисколько размерностей – ни три, ни четыре, ни 12. Любое число $n$ размерностей физического пространства было бы вопиюще определенной космологической константой (каких вообще-то не бывает в природе). Мне представляется, что, скорее всего, объективные изоморфизмы физического мира (т.н. «законы природы») можно отображать в субъекте на любое $n$-мерное пространство топокодера; возможно при $n \leq 3$ (не зря же Естественный отбор выбрал именно 3 размерности для нашего топокодера; при меньшем $n$, видимо, отображения неэффективны).

[137] **В.Э.:** А точнее, не опытом, а параметрами своего топокодера. (Хотя, конечно, эти параметры им проявлялись как «опыт»).

[138] **В.Э.:** Здесь Яглом еще раз указывает на свое предыдущее примечание.

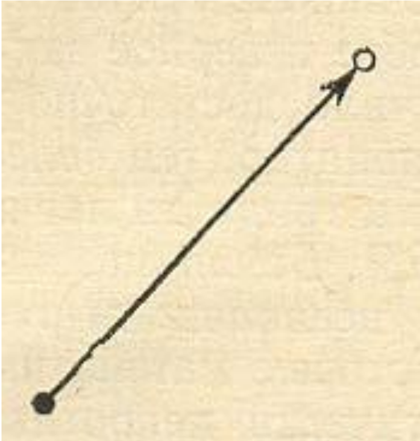


**Рис. 4.5.** Вектор

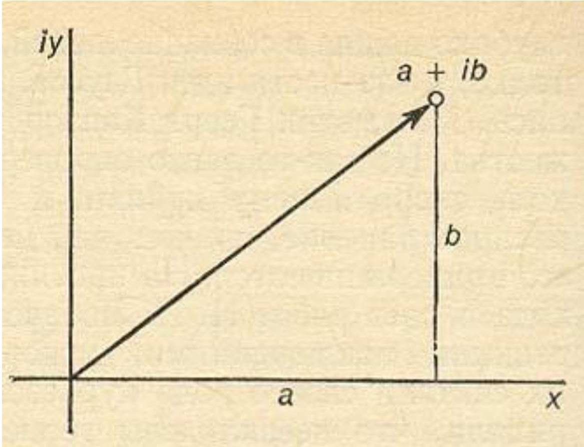



**Рис. 4.6.** Геометрическое представление комплексных чисел

Понятие вектора математики широко использовали начиная с XVI в.[139] Вектор, обычно изображаемый в виде направленного отрезка, обладает направлением и величиной (рис. 4.5). Он используется для описания таких физических величин, как сила, скорость и другие, которые характеризуются величиной и направлением. Векторы, лежащие в одной плоскости, можно комбинировать геометрически, производя над ними обычные операции сложения и вычитания и получая некий результирующий вектор. В том же XVI в. в математике появились комплексные числа, т.е. числа вида $a + b$i, где i = √–1, а $a$ и $b$ – вещественные числа. Даже математики считали комплексные числа весьма загадочными. Поэтому, когда около 1800 г. несколько математиков [Каспар Вессель (1745–1818), Жан Робер Арган (1786–1822) и Гаусс] поняли, что комплексным числам можно сопоставить направленные отрезки на плоскости (рис. 4.6), их открытие стало подлинной сенсацией. Эти математики сразу же осознали, что комплексные числа можно использовать не только для представления векторов на плоскости, но и для выполнения операций сложения, вычитания, умножения и деления векторов. Иначе говоря, комплексные числа позволяют представить векторную алгебру, подобно тому, как целые и дробные числа позволяют представить, например, коммерческую сделку. Следовательно, вместо того, чтобы производить операции над векторами геометрически, их можно осуществлять алгебраически. Так, сложение двух векторов *OA* и *OB* (рис. 4.7) по правилу параллелограмма приводит к сумме, или результирующему вектору *OC*. Ту же операцию можно выполнить алгебраически, представив вектор *OA* комплексным числом 3+2i, а вектор *OB* – комплексным числом 2+4i. Сумма этих комплексных чисел (комплексное число 5+6i) соответствует результирующему вектору *OC*.

К 30-м годам XIX в. идея использования комплексных чисел для представления векторов на плоскости и выполнения операций над ними получила достаточно широкое распространение. Но если на тело действуют несколько сил, то эти силы и представляющие их векторы не обязательно должны лежать в одной и той же плоскости – и даже обычно не лежат в ней. Условимся для удобства называть обычные вещественные числа <u>одномерными</u>, а комплексные – <u>двумерными</u>. Тогда для представления пространственных векторов и выполнения операций над ними было бы естественно ввести «трехмерные» числа. Как и в случае комплексных чисел, допустимые операции над трехмерными числами должны были бы включать сложение, вычитание, умножение и деление. Для того,

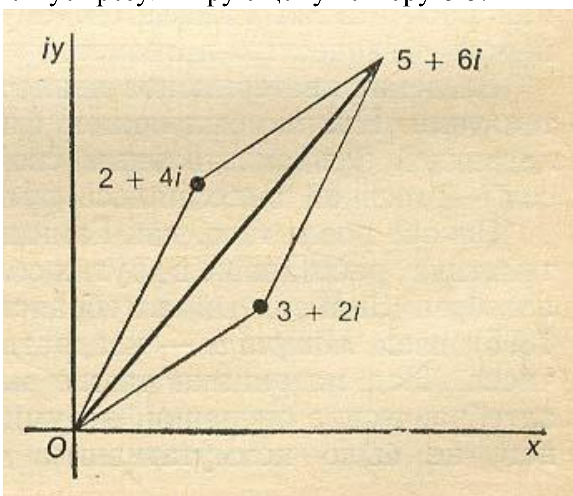



**Рис. 4.7.** Сложение комплексных чисел по правилу параллелограмма

[139] **Яглом:** И даже ранее: векторный характер перемещений, скоростей, сил был по существу знаком еще античным ученым; само это представление, как и «правило параллелограмма» сложения векторов, сложилось еще в школе Аристотеля; широко использовал это представление и Архимед.

чтобы над этими числами можно было беспрепятственно и эффективно производить алгебраические операции, они должны обладать обычными свойствами вещественных и комплексных чисел. Так математики принялись за поиски «трехмерных комплексных чисел».

Над решением этой проблемы бились многие. Полезный пространственный аналог комплексных чисел предложил в 1843 г. Уильям Роуан Гамильтон. Пятнадцать лет он непрестанно размышлял над этой проблемой. Умножение всех известных к тому времени чисел обладало свойством коммутативности, т.е. всегда было $ab = ba$, – и Гамильтон вполне естественно полагал,[140] что трехмерные, или трехкомпонентные, числа также должны обладать этим свойством, равно как и другими свойствами вещественных и комплексных чисел. Гамильтону удалось добиться успеха лишь ценой двух компромиссов: во-первых, его новые числа обладали четырьмя компонентами, а не тремя, как ему первоначально хотелось, и, во-вторых, ему пришлось пожертвовать свойством коммутативности умножения (сохранив, однако, ассоциативность: для любых трех кватернионов $p$, $q$ и $r$ всегда $(pq)r = p(qr)$. Оба необычных свойства введенных Гамильтоном чисел произвели подлинный переворот в алгебре. Гамильтон назвал найденные им новые числа кватернионами.

Если комплексное число представимо в виде $a + b\mathrm{i}$, где $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, то кватернион – это число, представимое в виде

$$a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k},$$

где i, j и k обладают таким же свойством, как и $\sqrt{-1}$, т.е.

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1.$$

Два кватерниона равны в том и только том случае, если попарно равны коэффициенты $a$, $b$, $c$ и $d$ в представлениях этих чисел. При сложении двух кватернионов суммы соответствующих коэффициентов образуют новые коэффициенты. Таким образом, сумма двух кватернионов сама также является кватернионом. Чтобы определить умножение кватернионов, Гамильтону пришлось задать произведения i и j, i и k, j и k. Гамильтон исходил из того, что произведение кватернионов должно быть кватернионом и что кватернионы должны сохранять как можно больше свойств вещественных и комплексных чисел. Достичь желаемого ему удалось, приняв правила умножения[141]:

$$\mathrm{jk} = \mathrm{i},\ \mathrm{kj} = -\mathrm{i},\ \mathrm{ki}=\mathrm{j},\ \mathrm{ik} = -\mathrm{j},\ \mathrm{ij} = \mathrm{k},\ \mathrm{ji} = -\mathrm{k}.$$

Эти правила означают, что умножение кватернионов **не коммутативно**, т.е. если $p$ и $q$ – кватернионы, то $pq$ не равно $qp$. Выполнимо и деление одного кватерниона на другой. Но поскольку умножение кватернионов не коммутативно, то разделить кватернион $p$, на кватернион

[140] **В.Э.:** Вообще-то так «полагать» – это отнюдь не «естественно». Даже если не понимать до конца природы «комплексных чисел» (что это на самом деле планарные числа и отражают ротацию), а смотреть на них так, как смотрел Гамильтон (что это просто пары чисел), даже тогда ведь невозможно ожидать, что тройки, четверки и т.д. чисел будут обладать такими же свойствами, как пары. Ведь чем больше членов в такой «упряжке», тем более «связанной» она оказывается, тем меньше она имеет «свободы».

[141] **В.Э.:** Разберемся всё-таки в сущности того, что здесь происходит. Мы видим, что Гамильтон вводит какие-то «правила» оперирования с какими-то объектами (т.е. он на самом деле изобретает алгоритмы обращения с этими объектами или, иными словами, составляет мозговые программы для этого). Что же это за объекты, которыми манипулирует Гамильтон? Это четверки «чисел», или, точнее, Гамильтон, конечно, будет оперировать не собственно числами (как множествами), а их записями, т.е. совокупностями цифр. Таким образом, перед нами – типичные представители группы алгоритмов, называемых в Веданской теории вторичными. Такие алгоритмы-программы манипулирования с цифрами, разумеется, изобрести можно (как и многие другие). Но будут ли этим вторичным алгоритмам (манипулирования с цифрами) соответствовать какие-то полезные действия с собственно множествами? В случае комплексных чисел такое соответствие имелось: в области вторичных операций там были изобретены операции с цифрами, похожие на вводимые теперь Гамильтоном (только касающиеся не четверок, а пар «чисел»), а в области множеств этим вторичным операциям соответствовали первичные операции объединения множеств, изменения единицы измерения в паре «Мера–Измеряемое» и т.п. Благодаря этому (глубокому) соответствию между первичными и вторичными операциями у комплексных чисел, они получают или могут получить широкое применение (везде, где в природе имеется ротация). Применимость кватернионов (к природным явлениям) тоже будет зависеть от того, какое именно существует соответствие между изобретенными Гамильтоном (вторичными) алгоритмами и какими-то (первичными) действиями над (физическими) множествами. Называть ли кватернионы числами – это зависит от определения понятия числа и является вопросом терминологии. (В Веданской теории они не считаются числами, т.к. число – это таксон классификации отношений между двумя множествами, а в случае кватернионов не видно, о каких отношениях между двумя множествами здесь может идти речь).

$q$ означает найти либо такой кватернион $r$, что $p = qr$, либо такой кватернион $r$, что $p = rq$. Частное $r$ в этих двух случаях не обязательно должно быть одним и тем же; поэтому их и записывают по-разному: в первом случае пишут $r = q^{-1}p$, а во втором – $pq^{-1}$. Хотя кватернионы не получили столь широкого применения, как рассчитывал Гамильтон, ему удалось с их помощью решить немало физических и геометрических задач.

Введение кватернионов явилось еще одним потрясением для математики. Налицо был пример физически полезной алгебры, не обладающей фундаментальным свойством всех известных ранее чисел – здесь не выполнялось правило $ab = ba$.

Вскоре после того, как Гамильтон создал свои кватернионы, математики, работавшие в других областях, ввели еще более необычные алгебры. Знаменитый алгебраист и геометр Артур Кэли (1821–1895) ввел матрицы – квадратные или прямоугольные таблицы чисел. Над матрицами также можно было производить обычные алгебраические операции, но умножение матриц, как и кватернионов, не было коммутативным. Кроме того, произведение двух матриц могло равняться нулю, даже если оба сомножителя были отличны от нуля. Кватернионы и матрицы ознаменовали начало появления нескончаемой вереницы новых алгебр со всё более необычными свойствами. Несколько таких алгебр создал Герман Гюнтер Грассман (1809–1877). По своей общности они превосходили кватернионы Гамильтона. К сожалению, Грассман всю жизнь оставался преподавателем средней школы, и прошло немало лет, прежде чем его работа привлекла заслуженное внимание. Как бы то ни было, Грассман пополнил множество так называемых гиперчисел (или, как сегодня чаще говорят, гиперкомплексных чисел[142]) новыми полезными разновидностями.

Создание новых алгебр для тех или иных специальных целей само по себе не ставило под сомнение истинность обычной арифметики и ее приложений в алгебре и математическом анализе. Кроме того, обычные вещественные и комплексные числа использовались для совершенно разных целей, и их применимость нигде не вызывала сомнений. Тем не менее сам факт появления на сцене новых алгебр заставил усомниться в истинности привычной арифметики и алгебры, подобно тому как люди, узнав об обычаях неизвестной ранее цивилизации, начинают по-новому смотреть на свои собственные обычаи.

Наиболее сильной критике истинность арифметики подверглась со стороны Германа Гельмгольца (1821–1894), выдающегося физиолога, физика и математика. В своей книге «Счет и измерение» (1887) Гельмгольц провозгласил основной проблемой арифметики, обоснование ее автоматической применимости к физическим явлениям. По мнению Гельмгольца, единственным критерием применимости законов арифметики мог быть опыт. Утверждать априори, что законы арифметики применимы в любой данной ситуации, невозможно.

По поводу применимости законов арифметики Гельмгольц высказал немало ценных замечаний. Само понятие числа заимствовано из опыта. Некоторые конкретные опыты приводят к обычным типам чисел: целым, дробным, иррациональным – и к свойствам этих чисел. Однако обычные числа применимы лишь именно к этим опытам. Мы сознаем, что существуют виртуально эквивалентные объекты, и тем самым сознаем, что можем говорить, например, о двух коровах. Но чтобы выражения подобного рода сохраняли силу, рассматриваемые объекты не должны исчезать, сливаться или претерпевать деление. Одна дождевая капля, если ее слить с другой дождевой каплей, вовсе не образует двух дождевых капель. Даже понятие равенства неприменимо автоматически к каждому опыту. Кажется несомненным, что если объект $a$ равен объекту $c$, а объект $b$ равен объекту $c$, то объект $a$ должен быть равен объекту $b$. Но два звука могут казаться по высоте такими же, как третий звук, и всё же мы в состоянии отличать на слух первые два звука. Следовательно, два объекта, порознь равные третьему, не обязательно должны быть равны между собой. Аналогично цвет $a$ может казаться таким же, как цвет $b$, а цвет $b$ – таким же, как цвет $c$, и всё же цвет $a$ иногда удается отличить от цвета $c$.

Много других примеров можно привести в подтверждение того, что наивное применение арифметики иногда давало нелепые результаты. Так, смешав два равных объема воды – один при температуре 40°С, другой при температуре 50°С, – мы не получим удвоенного объема при температуре 90°. Путем наложения двух гармонических тонов – одного с частотой 100 Гц, другого с частотой 200 Гц – мы не получим гармонический тон с частотой 300 Гц. В

---

[142] **Яглом:** В наши дни термин «гиперкомплексные числа» всё более вытесняется (странным) термином *алгебра*: под этим словом понимают как целую ветвь математики, так и, в более узком смысле, совокупность гиперкомплексных чисел определенного рода.

действительности составной тон будет иметь частоту 100 Гц. Соединив в электрической цепи параллельно два резистора с сопротивлениями $R_1$ и $R_2$, мы получим сопротивление величиной $R_1R_2/(R_1+R_2)$, а не сопротивление $R_1+R_2$. Как в шутку заметил некогда Анри Лебег (1875–1941), поместив в клетку льва и кролика, мы не обнаружим в ней позднее двух животных.

Из химии известно, что, смешивая водород и кислород, можно получить воду. Но если взять два объема водорода и один объем кислорода, то мы получим не три, а два объема водяного пара. Аналогично из одного объема азота и трех объемов водорода мы получим два объема аммиака. Физическое объяснение этой удивительной арифметики ныне известно. По закону Авогадро, в равных объемах любого газа при одинаковой температуре и одинаковом давлении содержится равное число частиц. Например, если в данном объеме кислорода содержится 10 молекул, то при той же температуре и том же давлении в равном объеме водорода содержится также 10 молекул. Следовательно, удвоенный объем водорода содержит 20 молекул. Известно, что молекулы кислорода и водорода двухатомны. Каждая из 20 двухатомных молекул водорода, соединяясь с одним атомом кислорода, образует молекулу воды. Так как всего имеется 10 молекул кислорода, то образуется 20 молекул воды, т.е. два, а не три объема. Таким образом, обычная арифметика не дает правильного описания того, что происходит при смешении газов, если подсчет производить по объемам.

Обычная арифметика не позволяет правильно описать и то, что происходит при смешении некоторых жидкостей. Если кварту джина смешать с квартой вермута, то получится чуть меньше двух кварт смеси. Смешав 1 л спирта с 1 л воды, мы получим 1,8 л спиртового раствора. То же справедливо и для большинства жидкостей, в состав которых входит спирт. Взяв столовую ложку, воды и столовую ложку соли, мы не получим две столовые ложки крепкого раствора соли. При смешивании некоторых химических веществ происходит взрыв – объем смеси заведомо не равен сумме объемов исходных веществ.[143]

Для описания многих физических ситуаций неприменимы не только свойства целых чисел – на практике нередко приходится прибегать к совсем иной арифметике дробных чисел. Рассмотрим, например, футбол, столь любимый миллионами болельщиков во всем мире.

Предположим, что в одной игре нападающий трижды пробил по воротам противника, а в другой игре – четыре раза. Сколько раз всего он бил по воротам противника? Подсчитать нетрудно: всего он бил по воротам противника 7 раз. Предположим, что в первой игре наш нападающий забил 2 гола, а во второй – 3 гола. Сколько голов он забил за две игры? И на этот раз ответ получить легко: за две игры он забил 2 + 3 = 5 голов. Но и болельщиков, и самого игрока обычно интересует **средняя результативность**, т.е. отношение числа забитых голов к числу ударов по воротам противника. В первой игре это отношение было равно 2/3, во второй – 3/4. Предположим, что нападающий или болельщик хочет по этим данным вычислить среднюю результативность за две игры. Некоторые полагают, что для этого необходимо лишь сложить оба отношения по обычным правилам сложения дробей, т.е. составить сумму:

$$2/3 + 3/4 = 17/12.$$

Но полученный таким образом результат явно лишен всякого смысла: ни один нападающий за 12 ударов по воротам противника не может забить 17 голов! Ясно, что обычные правила сложения дробей непригодны для подсчета средней результативности: средняя результативность за две игры не совпадает с суммой средних результативностей, вычисленных для каждой из игр в отдельности.

Каким же образом, зная результативность нападающего в каждой из двух игр в отдельности, правильно вычислить среднюю результативность за две игры? Для этого необходимо воспользоваться новым правилом сложения дробей. Мы знаем, что результативность нападающего по двум играм составляет 5/7, а в первой и во второй играх равна соответственно 2/3 и 3/4. Нетрудно видеть, что, сложив отдельно числители и знаменатели слагаемых, мы получим новую дробь, дающую правильный ответ:

$$2/3 \oplus 3/4 = 5/7$$

(знак *плюс*, который мы не случайно обвели кружком, означает здесь, что числители и знаменатели суммируются отдельно)[144].

Предложенное нами правило «сложения» дробей оказывается полезным и в других ситуациях. Продавец, ведущий учет эффективности своей торговли, может заметить, например,

[143] **В.Э.:** Все эти примеры, однако, не имеют никакого отношения к арифметике и ее справедливости.

[144] **В.Э.:** Здесь введена новая вторичная операция над цифрами.

что в первый день покупки сделали 3 из 5 посетителей, а во второй день – 4 из 7. Чтобы вычислить эффективность торговли за два дня, т.е. найти отношение числа покупок к общему числу посетителей, продавец должен сложить 3/5 и 4/7 по тому же правилу, по которому нападающий вычислял свою результативность за две игры. За два дня покупки сделали 7 посетителей из 12, а 7/12 = 3/5 + 4/7, где знак плюс означает сложение отдельно числителей и отдельно знаменателей.

Еще чаще встречается другое применение нового правила сложения дробей. Предположим, что автомобиль проезжает 50 км за 2 ч и 100 км за 3 ч. С какой средней скоростью автомобиль покрывает оба отрезка пути? Можно было бы рассуждать так: расстояние 150 км автомобиль проезжает за 5 ч, поэтому его средняя скорость составляет 30 км/ч. Но часто бывает удобнее вычислять средние скорости всего пробега по средним скоростям на отдельных участках маршрута. Средняя скорость на первом участке равна (50/2) км/ч, а на втором – (100/3) км/ч. Сложив отдельно числители и знаменатели этих дробей, мы получим правильную среднюю скорость всего пробега.

В обычной арифметике 4/6 = 2/3. Но при сложении двух дробей по новому правилу, например при вычислении 2/3 + 3/5, дробь 2/3 не следует заменять дробью 4/6, так как ответ в одном случае равен 5/8, а в другом – 7/11, и эти два ответа оказываются различными. Кроме того, в обычной арифметике такие дроби, как 5/1 и 7/1, ведут себя так же, как целые числа 5 и 7. Но если мы вздумаем сложить 5/1 и 7/1 как дроби, по правилам новой арифметики, то вместо 12/1 получим 12/2.

Приведенные примеры такой «футбольной арифметики» свидетельствуют об одном: вводя операции, отличные от привычных, мы тем не менее можем прийти к арифметике, применимой к реальному миру. Математике известны и многие другие арифметики. Однако ни один здравомыслящий математик не станет изобретать арифметику «просто так», для собственного удовольствия. Каждая арифметика предназначена для описания некоторого класса явлений физического мира. Производимые над числами операции выбираются с таким расчетом, чтобы они соответствовали выбранному классу явлений, подобно тому, как в приведенных примерах необычное сложение дробей позволяло вычислять среднюю результативность, эффективность и скорость. Новая арифметика должна облегчать исследование реально происходящего. Только опыт может сказать нам, в каких случаях обычная арифметика применима к тому или иному физическому явлению. Следовательно, мы не можем рассматривать арифметику как свод истин, с необходимостью применимых для описания любых физических явлений.[145] Разумеется, это же относится и к «продолжениям» арифметики – алгебре и математическому анализу. Их также нельзя считать сводом непреложных истин (см., например, [30][146]).

Итак, математикам не оставалось ничего иного, как прийти к печальному заключению о том, что в математике нет абсолютной истины, т.е. что математика не содержит внутри себя все законы реального мира.[147] Аксиомы[148] основных структур арифметики и геометрии порождены опытом, и поэтому применимость структур арифметики ограничена. Вопрос о том, где именно они применимы, может быть решен только на опыте. Попытка древнегреческих мыслителей обеспечить истинность математики, принимая за исходные самоочевидные истины и используя только дедуктивные доказательства, провалилась.

Для многих мыслящих математиков сознание того, что математика не является более сводом незыблемых истин, было невыносимым, и они не могли смириться с этим. Казалось, сам бог ниспослал им в наказание несколько геометрий и несколько алгебр, подобно тому, как он,

---

[145] **В.Э.:** Но ведь это же элементарно очевидно. Клайн перечислил примеры, где «арифметика неприложима» (хотя кто-то, с чрезвычайной натяжкой, мог бы ожидать ее приложимость). Но можно ведь назвать множество примеров, где ожидать приложимость арифметики было бы еще более бессмысленно (например, воркование голубя у меня за окном: к чему тут прилагать арифметику?). Тем не менее арифметика сама по себе всё равно остается «сводом непреложных истин».

[146] Рашевский П.К. *О догмате натурального ряда*. – Успехи математических наук, 28, вып. 4 (172), 1973, с, 243–246.

[147] **В.Э.:** «Все законы реального мира» математика не содержит (а кто, собственно, ожидал, что она будет содержать? – по-моему даже пифагорейцы не ставили вопрос ТАК), но «абсолютные истины» она содержит: «2 + 2 = 4» – это абсолютная истина (абсолютнее не бывает).

[148] **В.Э.:** Да причем тут аксиомы?! Абсолютность истин вытекает из (мозговых) программ и из соотношений множеств, с которыми эти программы работают (из квантуальных ситуаций).

смешав языки, покарал строителей Вавилонской башни. Такие математики наотрез отказывались принимать новые творения своих собратьев по профессии.

Уильям Р. Гамильтон, несомненно, один из самых выдающихся математиков XIX в., выразил (1837) свое неприятие неевклидовой геометрии следующим образом:

> Ни один честный и здравомыслящий человек не может усомниться в истинности главных свойств параллельных в том виде, как они были изложены в «Началах» Евклида две тысячи лет назад, хотя вполне мог бы желать увидеть их изложенными более просто и ясно. Геометрия Евклида не содержит неясностей, не приводит мысли в замешательство и не оставляет разуму сколько-нибудь веских оснований для сомнения, хотя острый ум извлечет для себя пользу, пытаясь улучшить общий план доказательства.

Артур Кэли, выступая в 1883 г. с речью перед Британской ассоциацией содействия развитию наук, сказал:

> По моему мнению, двенадцатая аксиома Евклида [называемая также пятым постулатом, или аксиомой о параллельных] в форме Плейфера не требует доказательства, но является составной частью нашего представления о пространстве, физическом пространстве нашего опыта, с которым каждый знакомится на своем опыте, – представления, лежащего в основе всего нашего опыта... Утверждения геометрии не являются лишь приближенно истинными. Они остаются абсолютно истинными в отношении той евклидовой геометрии, которая так долго считалась физическим пространством нашего опыта.

Ту же точку зрения высказывал и Феликс Клейн (1849–1925), один из крупнейших математиков нашего времени. Хотя Кэли и Клейн сами работали в области неевклидовых геометрий, они рассматривали их как новообразования, возникающие при искусственном введении в добрую старую евклидову геометрию новых метрик – функций, определяющих расстояние между точками. Оба отказывались признать, что неевклидова геометрия столь же фундаментальна и применима к внешнему миру, как и евклидова. Разумеется, во времена, когда теория относительности еще не была создана, позиция Кэли и Клейна была вполне обоснованной.

Верил в истинность математики и Бертран Рассел, хотя он и понимал эту истинность в несколько ограниченном смысле. В 1890 г. он предпринял попытку проанализировать вопрос о том, какие свойства пространства необходимы и могут быть приняты до опыта, т.е., если бы любое из этих априорных свойств мы стали бы отрицать, то опыт утратил бы смысл. В своей работе «Очерк оснований геометрии» (*Essay of the Foundations of Geometry*, 1897) Рассел признал, что геометрия Евклида не является априорным знанием. В этой же книге он пришел к заключению, что из всех геометрий априорность присуща лишь проективной геометрии[149] – заключение вполне понятное, если принять во внимание то значение, которое придавали проективной геометрии на рубеже XIX–XX вв. К проективной геометрии в качестве априорных истин Рассел добавил аксиомы, общие для евклидовой и всех неевклидовых геометрий. Эти аксиомы относились к однородности пространства, конечномерности и к понятию расстояния, позволяющему производить измерения. Рассел также указал на то, что количественным соображениям должны предшествовать чисто качественные, и использовал этот тезис для подкрепления приоритета проективной геометрии.

Что касается метрических геометрий, к числу которых относятся евклидова и несколько неевклидовых геометрий, то они могут быть получены из проективной геометрии, если подходящим образом определить расстояние между точками. Поэтому Рассел считал их создание чисто техническим достижением, не имеющим философского значения. Во всяком случае, специфические теоремы метрических геометрий, с точки зрения Рассела, не являются априорными истинами. Что же касается нескольких основных метрических геометрий, то Рассел, расходясь во мнениях с Кэли и Клейном, считал, что все они логически одинаково обоснованы. Поскольку априорными свойствами из всех метрических геометрий обладают только евклидова, гиперболическая, эллиптическая и удвоенная эллиптическая геометрии, то Рассел заключил, что

---

[149] Проективная геометрия занимается изучением свойств, общих для всех фигур, получающихся при проектировании одной фигуры на различные плоскости. Так, если держать круг перед ярким фонарем, то он будет отбрасывать тень на экран или на стену. Форма тени будет изменяться в зависимости от наклона круга. Тем не менее окружность и контуры теней (эллипсы, гиперболы, параболы) обладают общими геометрическими свойствами.

ими исчерпываются все возможные метрические геометрии и что евклидова геометрия – единственная из всех геометрий, применимая к физическому миру. Все остальные геометрии имеют философское значение, так как доказывают возможность существования других геометрических систем, отличных от разработанной древними греками. Оглядываясь назад, мы ясно видим, что широко распространенное пристрастие к евклидовой геометрии уступает у Рассела место пристрастию к проективной геометрии. Много лет спустя, Рассел признал «Очерк» юношески незрелым произведением, более не выдерживающим критики. Как мы увидим в дальнейшем (гл. X), Рассел вместе с другими философами выдвинул новую основу для установления истины в математике.

Настойчивость, проявленная математиками в поиске каких-либо абсолютных истин, вполне понятна. После многих столетий блистательных успехов математики в описании и предсказании физических явлений природы мысль о необходимости признать ее не коллекцией алмазов, а собранием искусственных камней была тяжела для каждого, а особенно для тех, кто был ослеплен гордостью за свои собственные достижения. Однако постепенно математики свыклись с тем, что аксиомы и теоремы их науки утратили статус истин о физическом мире. Некоторые области опыта подсказывали выбор специальных систем аксиом – для таких областей эти аксиомы и логические следствия из них были применимы достаточно точно, что позволило считать их полезным описанием действительного. Но расширение такой области может пагубно сказаться на применимости аксиом и теорем. Что касается изучения физического мира, то математика не предлагает ничего, кроме теорий, или моделей. Всякий раз, когда накопленный нами опыт или специальный эксперимент показывает, что новая теория дает более точное описание реальности, чем старая, старую теорию вполне допустимо заменить новой. Отношение математики к физическому миру прекрасно выразил в 1921 г. Эйнштейн:

> Если теоремы математики прилагаются к отражению реального мира, они не точны; они точны до тех пор, пока не ссылаются на действительность... Однако, с другой стороны, верно и то, что математика вообще и геометрия в частности обязаны своим происхождением необходимости узнать что-либо о поведении реально существующих объектов. ([31][150], с. 83–84.)

Бог отвернулся от математиков, и им не оставалось ничего другого, как принять человека. Именно это они и сделали. Они продолжали развивать математику и заниматься поиском законов природы, теперь уже зная, что их открытия не составляют часть божественного плана, а являются творениями людей. Одержанные в прошлом победы помогли им вновь обрести уверенность в своих силах, а нескончаемая череда новых успехов вознаграждала их усилия. Жизнь математики спасли чудодейственное «снадобье», ею же самой составленное: колоссальные достижения в небесной механике, акустике, гидродинамике, оптике, теории электромагнитного поля[151] и инженерном деле – и невероятная точность предсказаний. Наука, которая хотя и сражалась под победоносным знаменем истины, но одерживала свои победы с помощью загадочной «внутренней силы» (гл. XV), должна быть наделена скрытой мощью, чтобы не сказать магией. Развитие математики и применение ее результатов к естествознанию происходило теперь более быстрыми темпами, чем прежде.

Осознание того, что математика не является сводом абсолютных истин, эхом отозвалось на многих областях человеческой деятельности. Начнем с естествознания. Со времен Галилея физики понимали, что в основе фундаментальных законов естествознания, в отличие от математики, должен лежать эксперимент, хотя ранее они на протяжении двух столетий считали, что открываемые ими законы заложены в плане мироздания. Но к началу XIX в. физики пришли к заключению, что никакие естественнонаучные теории также не являются абсолютными истинами. Если даже математика имеет свои начала в человеческом опыте и не может более отстаивать свою истину, рассуждали естествоиспытатели, то, поскольку мы используем аксиомы и теоремы математики, наши собственные теории уязвимы в еще большей степени. Законы

[150] Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т.2. – М.; Наука, 1966.

[151] **Яглом:** Математический вариант теории электромагнитного поля был создан Дж.К. Максвеллом, который, по выражению Р. Милликена, «облек плебейски обнаженные представления Фарадея в аристократические одежды математики». [Создатель описательной теории электромагнетизма, самоучка М. Фарадей, весьма далекий от математики, был, кстати сказать, одним из немногих физиков, кто сразу же высоко оценил первые публикации Максвелла.]

природы открывает человек. Мы, а не господь бог, устанавливаем законы природы. Закон природы описывает человек, а не предписывает бог.

Отзвуки постигшего математику бедствия докатились до всех областей культуры. Вера в достижимость мнимых истин в математике и математической физике порождала надежду на то, что истина достижима и во всех остальных областях знания. Эти надежды выразил в 1637 г. Декарт в своем «Рассуждении о методе»:

> Те длинные цепи выводов, сплошь простых и легких, которыми обычно пользуются геометры, чтобы дойти до своих наиболее трудных доказательств, дали мне повод представить себе, что и все вещи, которые могут стать предметом знания людей, находятся между собой в такой же последовательности. Таким образом, если остерегаться принимать за истинное что-либо, что таковым не является, и всегда соблюдать порядок, в каком следует выводить одно из другого, то не может существовать истин ни столь отдаленных, чтобы они были недостижимы, ни столь сокровенных, чтобы нельзя было их раскрыть. ([14][152], с. 23.)

Декарт написал эти строки в те времена, когда успехи математического метода были еще сравнительно невелики. К середине XVIII в. эти успехи стали столь многочисленны и весомы, что ведущие мыслители обрели уверенность в необходимости применения рационального и математического подхода всюду, где необходимо достичь истины. Имея в виду свой век, Д'Аламбер писал:

> ... Некая экзальтация идей, вызываемая в нас зрелищем Вселенной ... плодотворно сказалась на умах. Разливаясь повсюду, подобно реке, смывшей плотины, это плодотворное влияние насильственно увлекало на своем пути всё, что сколько-нибудь мешало ему ... От принципов теологии до оснований религиозных откровений, от метафизики до вопросов вкуса, от музыки до морали, от схоластических диспутов теологов до торговли, от законов князей до законов простого народа, от законов природы до законов наций... – всё подверглось обсуждению, было проанализировано или по крайней мере отмечено.

Уверенность в том, что истины удастся обнаружить во всех областях человеческого знания, была до основания подорвана, когда выяснилось, что абсолютной истины нет даже в математике. Возможно, что надежда и даже вера в возможность достижения абсолютного знания в вопросах политики, этики, религии, экономики и многих других областях еще теплилась в умах людей, однако самая прочная опора подобных надежд была утрачена. Математика явила миру доказательство того, что человек может постигать истины – но она же и опровергла данное ею доказательство. Неевклидова геометрия и кватернионы, ознаменовавшие триумф человеческого разума, привели к бедствию, постигшему духовный мир человека.[153]

По выражению знаменитого психолога Уильяма Джеймса (1842–1910), «духовная жизнь человека почти целиком заключается в замене концептуальным порядком той упорядоченности ощущений, в которых первоначально запечатляется его опыт». Но концептуальный порядок далеко не отражает упорядоченность восприятий.

С утратой истины разум человека утратил точку опоры, свою систему отсчета. «Гордость человеческого разума», падая, увлекла за собой здание истины. Урок этого состоял в следующем: никогда нельзя утверждать догматически даже то, в чем мы неколебимо уверены. Именно то, в чем мы наиболее уверены, должно вызывать наибольшие сомнения, ибо здесь проявляются не только наши достижения, но и наша ограниченность, пределы наших возможностей. Историю всеобщей убежденности в истинности математики можно закончить, процитировав «Размышления о бессмертии» Уордсворта. В середине XVIII в. математики могли сказать о своих творениях:

Наш бог – наш дом,
И от него мы низойдем
В сиянье славы.

---

[152] Декарт Р. *Рассуждение о методе с приложениями*. Серия «Классики науки». – М.: Наука, 1953.

[153] **В.Э.:** Да нет тут никакого бедствия в появлении неевклидовых геометрий и кватернионов. (Для евклидовой геометрии и «прежних» чисел появление этих новых объектов – это такое же «бедствие», как для компьютерной программы *A* написание кем-то другой программы *B*. Вот и всё «бедствие»). Но беда всё-таки надвигалась. И заключалась она в том, что основаниями математики люди начали считать аксиомы – когда на самом деле основаниями были – программы.

В середине XIX в. математикам не оставалось ничего другого, как с горечью признать:

Куда б я ни пришел,
Одну картину зрю:
Прочь навсегда исчезнувшую славу.

Но история не дает повода к унынию. Как сказал о математике гениальный Эварист Галуа (1811–1832) «[эта] наука – творение человеческого разума, предназначенное не столько для знания, сколько для познания, для поиска, а не для отыскания истины». Возможно, в самой природе истины заложена способность ускользать от преследования или, говоря словами римского философа Луция Сенеки, «природа не сразу открывает свои тайны».

## *V. Нелогичное развитие логичнейшей из наук*

Нет, не оплакивать былое –
В нем силу надобно искать.
*Уордсворт*

На протяжении двух тысячелетий математики были уверены в том, что весьма успешно открывают математические принципы, заложенные в фундаменте мироздания. Но в середине XIX в. они вынуждены были признать, что глубоко заблуждались, принимая математические законы за абсолютные истины. В течение двух тысячелетий математики не сомневались, что неукоснительно следуют предложенной древнегреческими мыслителями схеме постижения истины, выводя с помощью дедуктивных рассуждений из математических аксиом следствия, не уступающие по надежности самим исходным аксиомам. Поскольку математические законы естествознания отличались необычайной точностью, редкие расхождения по поводу корректности некоторых математических рассуждений отметались как не заслуживающие внимания. Даже самые проницательные и дальновидные математики были убеждены, что любой пробел в математическом доказательстве, если таковой обнаружится, может быть легко восполнен. Но в XIX в. единодушие математиков по поводу безупречной доказательности математических рассуждений явно поколебалось.

Что же открыло математикам глаза? Как они смогли понять, что заблуждались, полагаясь на безупречность математических рассуждений? Некоторые математики еще в начале XIX в. выражали озабоченность в связи с критикой, которой подвергались основные положения математического анализа, но большинство считало эти нападки недостаточно обоснованными и просто игнорировало их. Лишь появление неевклидовой геометрии и кватернионов, которые заставили математику отказаться от многовековых претензий на владение абсолютной истиной, побудило большинство математиков обратить внимание на пробелы в логике математических исследований.

Работы в области неевклидовой геометрии, которые сопровождались постоянными и столь естественными ссылками на аналогичные теоремы и доказательства евклидовой геометрии, привели к поразительному открытию: выяснилось, что евклидова геометрия, которую на протяжении двух тысячелетий специалисты провозглашали неподражаемым образцом строгих доказательств, обладает серьезными логическими изъянами! Создание новых алгебр, начало которому было положено введением кватернионов [гл. IV], настолько обеспокоило математиков, что им захотелось подвергнуть критическому пересмотру логические основы арифметики и алгебры обычных вещественных и комплексных чисел. Такой пересмотр действительно был необходим – хотя бы для того, чтобы убедиться в надежности представлений о свойствах этих чисел.[154] Открытие, которое ожидало математиков в, казалось бы, хорошо известной им области, было поистине удивительным: эти разделы математики, традиционно считавшиеся в высшей степени логичными, развивались алогично!

[154] **В.Э.:** Пересмотр действительно был нужен, да только смотрели не в ту сторону, куда надо.

Если хочешь разобраться в настоящем, следует прежде всего заглянуть в прошлое! Обратившись к прошлому, математики, чье восприятие обострилось в результате последних открытий, наконец увидели то, что ускользало от их предшественников или мимо чего те равнодушно проходили в своем безудержном стремлении постичь истину. Разумеется, математики отнюдь не собирались безропотно отказываться от своей науки. Помимо того, что математические методы продолжали оставаться весьма эффективным инструментом естественнонаучного исследования, математика сама по себе превратилась в область знания, которую многие математики вслед за Платоном считали особой «внечувственной реальностью»[155]. Естественно, математики сочли, что им под силу по крайней мере пересмотреть логическую структуру математики и восполнить пробелы в ней или изменить те ее области, где обнаружатся изъяны.

Как нам уже известно, родоначальниками дедуктивной математики были древние греки и первым, казалось бы, совершенным математическим построением стали «Начала» Евклида. Начав с определений и аксиом, Евклид далее переходил к доказательству теорем. Повторим, однако, некоторые из определений Евклида:

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия же – длина без ширины.
3. Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.

([25][156], кн. I–VI, с. 11.)

Аристотель учил, что определение должно описывать определяемое понятие через другие, уже известные понятия. А так как с чего-то необходимо начать, утверждал Аристотель, то в качестве исходных необходимо принять какие-то неопределяемые понятия. Хотя, судя по многим данным, Евклид, живший и работавший в Александрии примерно в III в. до н.э., хорошо знал о работах греческих авторов классической эпохи, в частности Аристотеля, он тем не менее дал определение **всем** геометрическим понятиям.

Этот просчет Евклида[157] принято объяснять двумя причинами. Либо Евклид был не согласен с Аристотелем в том, что исходные понятия должны быть неопределяемыми, либо, как утверждают некоторые защитники Евклида, он сознавал необходимость неопределяемых понятий, но своими первыми определениями намеревался дать лишь интуитивное представление о смысле определяемых понятий, позволяющее понять последующие аксиомы. Но если справедливо последнее, то в таком случае Евклид вряд ли стал бы включать определения в основной текст «Начал». Каковы бы ни были намерения самого Евклида, никто из математиков, следовавших дедуктивному методу Евклида на протяжении двух тысячелетий, не отметил необходимость неопределяемых понятий. На необходимость таких понятий обратил внимание в своем «Трактате о геометрическом духе» (1658) Паскаль, но это его напоминание просто не было никем замечено.

А как обстояло дело с аксиомами Евклида? Следуя, по-видимому, Аристотелю, Евклид сформулировал ряд общих понятий, применимых к любому рассуждению, и пять постулатов, применимых только к геометрии. Одно из общих понятий гласило: «И если к равным [вещам] прибавляются равные, то и целые будут равны» ([25], кн. I–VI, с. 15). Под словом «вещи» Евклид понимал длины, площади, объемы и целые числа. Разумеется, это слово допускает весьма широкое толкование. Но еще в большей степени может вводить в заблуждение общее утверждение, что фигуры, совпадающие при наложении, равны. С помощью этой аксиомы Евклид

---

[155] **Яглом:** Платон делил Вселенную на «мир видимый», куда относится всё реально существующее и «мир умопостижимый», но не видимый и не осязаемый, к которому он относил, в частности, математику и искусство [см., например, «Государство» Платона ([7: Платон. Сочинения в 3-х томах. Т.3, ч.1. – М.: Мысль, 1971], с. 317 и далее)].

[156] Начала Евклида. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948 (книги I–VI), 1949 (книги VII–X).

[157] **В.Э.:** Нет никакого просчета. Евклид вовсе не делал то, что ему приписывают современные авторы, – т.е. не пытался строить геометрию из аксиом в современном понимании, и принцип «неопределяемых понятий» ему был не нужен. Вообще этот принцип сам по себе отражает довольно примитивные представления о логике и логических системах. На самом деле более эффективна такая логическая система, в которой НЕТ неопределяемых понятий, а все понятия связаны в «кольцо». Одно определяется через другое, якобы *circulus vitiosus*, но мозг приемника легко расшифровывает и интерпретирует всю систему в целом. (Точно так же действует ребенок: для него тоже нет неопределяемых понятий, всё как-то объясняется-определяется, но, несмотря на «порочный круг», несомненно там присутствующий, мир ребенком эффективно понимается и постигается. Наоборот, это только затруднило бы ему понимание мира, если на свой вопрос «Что такое линия?» он получил бы ответ: «Это неопределяемое понятие»).

доказывал конгруэнтность двух треугольников, налагая один треугольник на другой и выводя из известных геометрических фактов заключение о равенстве углов. Но чтобы наложить один треугольник на другой, его необходимо передвинуть. Евклид предполагал, что перемещение не сказывается на свойствах треугольника. Таким образом, общее понятие, задающее «принцип наложения», по существу, выражает однородность пространства, т.е. независимость свойств геометрических фигур от их расположения в пространстве. Такого рода допущение вполне разумно, но всё же является дополнительным допущением: определения в евклидовых «Началах» не затрагивают понятия движения.[158]

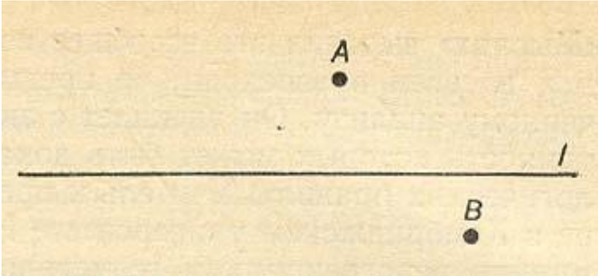


**Рис. 5.1.** Аксиома, которую не сформулировал Евклид

В своих доказательствах Евклид нередко прибегал к аксиомам, явно им не сформулированным. Еще Гаусс обратил внимание на то, что Евклид говорит о точках, лежащих между другими точками, и о прямых, лежащих между другими прямыми, ни словом не обмолвившись о понятии «лежать между» и его свойствах. По-видимому, Евклид мысленно представлял геометрические фигуры и использовал в доказательствах теорем свойства реальных фигур, не отраженные в аксиомах. Наглядные геометрические представления могут оказаться весьма полезными и при доказательстве, и при запоминании теоремы, но роль их должна быть лишь вспомогательной.[159] Лейбниц обратил внимание еще на одну аксиому, неявно использованную Евклидом, – аксиому о так называемой непрерывности. Действительно, Евклид широко пользовался тем, что прямая, соединяющая точку $A$, расположенную по одну сторону от $l$ (рис. 5.1), с точкой $B$, расположенной по другую сторону от прямой $l$, имеет с $l$ общую точку. Существование общей точки очевидно из чертежа – однако ни одна аксиома о прямых не гарантирует, что такая общая точка действительно имеется. Впрочем, можно ли говорить, что точки «находятся по разные стороны от прямой»? Подобное словоупотребление также основывается на неявно подразумеваемой, но неформулируемой аксиоме.

Помимо различного рода изъянов и недостатков в определениях и аксиомах «Начала» Евклида содержали также много неадекватных доказательств. Доказательства одних теорем были ошибочными; доказательства других охватывали лишь частный случай утверждения теоремы или конфигурации, о которой в ней говорилось. Такого рода недостатки не столь серьезны, так как их легче исправить. Евклид умышленно проводил правильные доказательства для фигур, весьма отдаленно напоминающих изображаемые. Но если судить о «Началах» в целом, то с полным основанием можно сказать, что в ряде случаев доказательства Евклида, касающиеся легко воспроизводимых на чертежах фигур, имели дефекты. Короче говоря, логика в «Началах» Евклида оставляла желать лучшего.

Несмотря на все недостатки евклидовых «Начал», лучшие математики, естествоиспытатели и философы примерно до конца XVIII в. видели в них идеал математической строгости. Паскаль в своих «Мыслях» выразил это всеобщее восхищение так: «Геометрический дух во всем превосходит те предметы, которые поддаются законченному анализу. Он начинает с аксиом и выводит заключения, истинность которых может быть доказана с помощью универсальных логических правил». Учитель и предшественник Ньютона по кафедре в Кембриджском университете Исаак Барроу перечислил восемь причин непогрешимости геометрии: ясность геометрических понятий; однозначность определений; наша интуитивная уверенность в универсальной истинности общих геометрических понятий; правдоподобность и наглядность геометрических постулатов; малочисленность геометрических аксиом; ясное понимание способа получения всех величин; четкая последовательность доказательств; отказ от использования всего неизвестного. Такого рода признания достоинств геометрии можно было бы продолжить. В 1873 г. известный

[158] **Яглом:** Как мы уже отмечали, Евклид, следуя математическим установкам Аристотеля, пытался обойтись в геометрии без всякого использования движений (что ему, кстати сказать, полностью так и не удалось).

[159] **В.Э.:** Это если задаться целью применять аксиоматический метод в его современном понимании, – каковой цели у Евклида явно не было. А если цель – рассуждать о потенциальных продуктах программ (пусть и не отдавая себе отчета о том, что это программы), то можно полагаться на все знания о том, как эти программы работают и что они создают (как на самом деле и поступал Евклид).

специалист по теории чисел Генри Джон Стивен Смит сказал: «Геометрия обратилась бы в ничто, если бы не ее строгость... Почти всеми признано, что методы Евклида безупречны с точки зрения строгости».

Тем не менее, работая над созданием неевклидовой геометрии, математики обнаружили в евклидовой схеме построения геометрии столь большое число дефектов, что восхищаться ее совершенством было уже невозможно. Неевклидова геометрия стала тем рифом, о который разбилась геометрия Евклида. То, что ранее казалось надежной твердью, в действительности оказалось предательской топью.

Разумеется, евклидова геометрия составляет лишь часть математики. С начала XVIII в. гораздо более обширной стала часть математики, посвященная свойствам чисел. Но как же развивалось логическое понятие числа?

В Древнем Египте и Вавилоне уже были хорошо знакомы с целыми числами, дробями и даже с такими иррациональными числами, как $\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$. Для практических приложений иррациональные числа аппроксимировали рациональными. Но поскольку математика в Древнем Египте, Вавилоне и даже вплоть до IV в. до н.э. в Древней Греции строилась на интуитивной или эмпирической основе, как восхищение ее логической структурой, так и ее критика были в равной степени беспредметны.

Первое известное нам логически последовательное изложение теории целых чисел содержится в VII, VIII и IX книгах «Начал» Евклида. В них Евклид предлагает, например, такие определения: «Единица есть [то], через что каждое из существующих считается единым; число же – множество, составленное из единиц» ([25][160], кн. VII–X, с. 9). Ясно, что подобные определения мало что говорят – в их формулировках отражается тот факт, что как в арифметике Евклида, так и в его геометрии проявляется непонимание необходимости неопределяемых понятий. При выводе свойств целых чисел Евклид использует уже упоминавшиеся общие понятия. К сожалению, некоторые из приведенных им доказательств ошибочны. Тем не менее древние греки и их преемники считали, что теория целых чисел обоснована вполне удовлетворительно. Более того, они, не церемонясь, позволяли себе говорить об отношениях целых чисел (у последующих поколений математиков такие отношения получили название дробей), хотя отношения целых чисел не были ими никак определены.

В логическом развитии теории чисел древние греки столкнулись с трудностью, оказавшейся для них непреодолимой. Как известно, пифагорейцы в V в. до н.э. первыми подчеркнули важность целых чисел и отношений целых чисел для изучения природы. Более того, именно в целых числах и их отношениях пифагорейцы видели «меру» всего. Когда же обнаружилось, что некоторые отношения, например отношение гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника к катету, непредставимы в виде отношения целых чисел, это и удивило, и обеспокоило пифагорейцев. Отношения, представимые в виде отношений целых чисел, пифагорейцы назвали соизмеримыми, а отношения, непредставимые в виде отношений целых чисел, получили название несоизмеримых. Так, иррациональное число $\sqrt{2}$ может служить примером несоизмеримого отношения. Открытие несоизмеримых соотношений легенда приписывает Гиппазию из Метапонта (V в. до н.э.). По преданию, в тот момент, когда Гиппазий пришел к этому открытию, пифагорейцы находились в открытом море – и они выбросили Гиппазия за борт, обвинив его в том, что он привнес в мироздание элемент, противоречивший пифагорейскому учению о сводимости всех явлений природы к целым числам или к их отношениям.

Доказательство того, что число $\sqrt{2}$ несоизмеримо с 1, т.е. иррационально, было предложено пифагорейцами. По Аристотелю, они доказали иррациональность $\sqrt{2}$ методом от противного (*reductio ad absurdum*), иначе говоря, избрали косвенный метод доказательства. Пифагорейцы показали, что если гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника была бы соизмерима с катетом, то одно и то же число должно было бы быть и четным, и нечетным, что невозможно. Доказательство проводилось следующим образом. Предположим, говорили пифагорейцы, что отношение гипотенузы к катету представимо в виде $a/b$, где $a$ и $b$ – взаимно-простые целые числа (т.е. предполагается, что общие множители, которые первоначально могли входить в числа $a$ и $b$, уже сокращены). Если $a/b = \sqrt{2}$, то $a^2 = 2b^2$. Так как $a^2$ – четное число, $a$ также четно,

[160] Начала Евклида. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948 (книги I–VI), 1949 (книги VII–X).

поскольку квадрат любого нечетного числа нечетен.[161] Так как числитель и знаменатель отношения $a/b$ не имеют общих делителей и $a$ четно, число $b$ должно быть нечетно. Число $a$ как четное представимо в виде $a = 2c$, поэтому $a^2 = 4c^2$, а так как $a^2 = 2b^2$, то $4c^2 = 2b^2$, или $2c^2 = b^2$. Следовательно, $b^2$ – четное число. Но тогда $b$ также четное число, поскольку если бы оно было нечетным, то и квадрат его был бы нечетным. Но по доказанному ранее $b$ – нечетное число; таким образом, мы приходим к противоречию.

Пифагорейцы и древнегреческие мыслители классического периода, как правило, не принимали иррациональных чисел, ибо в их понимании иррациональные числа не были числами. Действительно, предложенное пифагорейцами доказательство говорит, что число $\sqrt{2}$ непредставимо в виде отношения целых чисел, но умалчивает о том, что такое иррациональное число. Жители Древнего Вавилона, как уже отмечалось, умели работать с иррациональными числами, но они, безусловно, не знали, что используемые ими десятичные (точнее, шестидесятеричные) приближения таких чисел не могут быть абсолютно точными. Мы можем восхищаться жизнелюбием древних вавилонян, но математиками они были неважными. Совсем иной склад ума был у древних греков: они не могли довольствоваться приближениями.

Открытие иррациональных чисел поставило проблему, ставшую центральной для древнегреческой математики. Платон в своих «Законах» призывал к познанию несоизмеримых величин. Решение проблемы предложил Евдокс, некогда бывший учеником Платона: понятие величины надлежит трактовать геометрически. Длины, углы, площади и объемы, величины которых – если их выразить численно – могли оказаться иррациональными, следовало представлять геометрически. Именно так формулирует Евклид теорему Пифагора: квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равен сумме квадратов, построенных на обоих катетах. Под суммой квадратов Евклид понимает, что суммарная площадь фигуры, составленной из двух квадратов, построенных на катетах, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе. Обращение за помощью к геометрии здесь вполне понятно. Если числа 1 и $\sqrt{2}$ рассматривать как длины, т.е. как отрезки прямых, то принципиальное различие между 1 и $\sqrt{2}$ сглаживается и почти перестает быть заметным.

Проблема, возникшая в связи с появлением иррациональных чисел, была шире, чем проблема численного представления длин, площадей и объемов, так как корни квадратных уравнений, например уравнения $x^2 - 2 = 0$, вполне могли быть иррациональными числами. Греки классического периода решали такие уравнения геометрически, т.е. представляли их корни в виде отрезков, тем самым избегая необходимости обращаться к иррациональным числам. Так, если у вавилонян существовала формула для решения квадратного уравнения, то у греков сходную роль играло построение отрезка $x$, удовлетворяющего, скажем, уравнению $x^2 + ax = b^2$. Это направление в развитии математики получило название <u>геометрической алгебры</u>. Таким образом, «Начала» Евклида – трактат не только по геометрии, но и по алгебре.

Превращение всей математики, за исключением разве лишь теории целых чисел, в геометрию привело к нескольким важным последствиям. Прежде всего оно усилило разрыв между теорией чисел и геометрией, ибо несоизмеримые величины целиком подлежали юрисдикции геометрии – арифметике (теории чисел) они были, так сказать, «неподсудны». Со времен Евклида между теорией чисел и геометрией приходилось проводить резкую границу.[162] А поскольку геометрия охватывала значительную часть математики, именно она и стала (по крайней мере до XVII в.) основой почти всей «строгой» математики. Мы до сих пор называем $x^2$ «икс квадратом», $x^3$ – «икс кубом», а не $x$ соответственно во второй и в третьей степени, потому что некогда под $x^2$ и $x^3$ понимался лишь геометрический смысл этих величин.

Разумеется, геометрическое представление чисел и операций над ними не очень подходило для практических целей. Логически вполне удовлетворительно представлять произведение $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ как площадь прямоугольника. Но если требуется вычислить это произведение, то такого представления явно недостаточно. В естествознании и технике геометрические фигуры значительно менее полезны, чем численный ответ, полученный с требуемой точностью. В приложениях математики и в технике интерес представляют главным образом количественные результаты. Судоводителю в открытом море необходимо знать местоположение судна – численные

---

[161] Любое нечетное число представимо в виде $2n + 1$, где $n$ – некоторое целое число. Квадрат нечетного числа $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ – нечетное число.

[162] **Яглом:** Своеобразным отражением этого является, в частности, тот факт, что в «Началах» так называемый *алгоритм Евклида* в одинаковых выражениях описывается два раза: один раз – для чисел и второй раз – для отрезков.

значения его координат в градусах широты и долготы. Чтобы строить прочные и надежные здания, мосты, суда и плотины, также необходимо знать количественные меры длин, площадей и объемов деталей каждого сооружения. Более того, количественные характеристики, размеры, деталей сооружения необходимо знать заранее, **до** того, как начнется постройка. Но греки классического периода, превыше всего ценившие строгие рассуждения и с пренебрежением относившиеся к приложениям математики в торговых расчетах, навигации, строительстве и составлении календарей, были удовлетворены полученным геометрическим решением проблемы иррациональных чисел.

На смену греческой цивилизации эпохи высокой классики (афинский период) около III в. до н.э. пришла эпоха эллинизма (александрийский период), сложившаяся в результате слияния классической греческой культуры с культурами Египта и Вавилона (гл. I). С точки зрения логики математика александрийского периода представляла собой любопытное смешение дедуктивных и эмпирических подходов. Наиболее выдающиеся математики александрийской эпохи Архимед и Аполлоний следовали образцу аксиоматической, дедуктивной геометрии «Начал» Евклида. Даже в своих трудах по механике Архимед начинал с аксиом и доказывал теоремы, став предтечей Ньютона и его последователей, создавших «математическую физику». Но под влиянием более прагматичных египтян и вавилонян александрийцы начали использовать математику и для удовлетворения запросов практики. В Александрии были выведены формулы, позволяющие вычислять количественные меры длин, площадей и объемов. Так, Герон (I в.) в своем сочинении «Метрика» привел формулу для вычисления площади *S* треугольника. [Возможно, эту формулу знал еще Архимед. – *Ред*.]

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где *a, b, c* – длины сторон треугольника, *p* – его полупериметр. Вычисление площади треугольника по формуле Герона нередко приводит к иррациональным числам. Формула Герона замечательна еще в одном отношении: в отличие от греков эпохи высокой классики, которые считали бессмысленным произведение более чем трех чисел, поскольку ему нельзя было придать геометрический смысл, Герон был чужд подобных предрассудков. Во многих чистых и прикладных науках, развитых греческими учеными александрийского периода – составление календаря, измерение времени, навигационные расчеты, оптика, география, пневматика и гидростатика (гл. I), – иррациональные числа находили самое широкое применение.

Высшим достижением александрийцев стало создание Гиппархом и Птолемеем количественной астрономии – геоцентрической системы мира, позволившей человеку предсказывать движение планет, Солнца и Луны (гл. I). Для построения своей количественной теории Гиппарх и Птолемей разработали тригонометрию – область математики, занимающуюся вычислением одних элементов треугольника по данным о других его элементах. Так как подход Птолемея к построению тригонометрии отличался от принятого в то время, ему пришлось вычислять длины хорд окружности. Хотя для получения основных результатов об отношениях длин одних хорд к длинам других Птолемей использовал дедуктивно-геометрический метод, в процессе вычислений длин хорд (а именно они и были конечной целью расчетов) он широко применял арифметику и зачатки алгебры. Длины большинства хорд выражались иррациональными числами. Птолемей довольствовался получением рациональных приближений нужных ему величин, но в ходе вычислений, не колеблясь, употреблял и иррациональные числа.

Арифметика и алгебра, столь свободно используемые александрийцами, которым они достались по наследству от египтян и вавилонян, были лишены логической основы. Птолемей и другие ученые александрийского периода, как правило, перенимали у древних египтян и вавилонян эмпирический подход к математике. Такие иррациональные числа, как $\pi$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и другие, вводились некритически и в случае необходимости заменялись рациональными приближениями. Наиболее известный пример использования иррациональных чисел – приближенное вычисление Архимедом числа $\pi$. По оценкам Архимеда, значение $\pi$ заключено между $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$. Независимо от того, знал или нет Архимед, что число $\pi$ иррационально, найденные им приближенные значения $\pi$ содержали нескончаемые нагромождения квадратных корней ([33][163], с. 266–270, 528–553), а извлечение квадратного корня чревато появлением иррациональных чисел, о чем не мог не знать Архимед.

[163] Архимед. Сочинения. – М.: Физматгиз, 1962.

Для нашего повествования возрождение александрийскими математиками египетской и вавилонской алгебры, не зависящей от геометрии, имеет ничуть не меньшее значение, чем свободное использование иррациональных чисел. Выдающуюся роль в «оживлении» старой традиции сыграли Герон и еще один представитель александрийской школы – Диофант (примерно III в.). И Герон, и Диофант считали, что алгебраические и арифметические задачи представляют самостоятельный интерес и что обращение к геометрии излишне, поскольку не придает ни большей значимости задачам, ни большей логичности решениям. Герон формулировал и решал алгебраические задачи чисто арифметическими средствами. Например, дан квадрат, такой, что сумма его площади и периметра равна 896 (за единицу площади здесь принимается квадрат со стороной, равной единице длины. – *Ред.*); требуется найти сторону квадрата. Чтобы решить квадратное уравнение, к которому сводится задача, Герон добавляет к обеим частям полученного равенства по 4 и извлекает из них квадратный корень. Герон не доказывает правильности своих действий, а лишь указывает, в какой последовательности их надлежит выполнить. В работах Герона имеется немало задач такого рода.

В своей «Геометрике» Герон говорит о сложении площади круга, длины окружности и диаметра. Разумеется, под этим он понимает сложение численных значений этих величин. Говоря об умножении квадрата на квадрат, Герон также имеет в виду вычисление произведения тех чисел, которыми выражаются площади квадратов. Тем самым Герон как бы осуществил перевод многого из того, что достигла геометрическая алгебра древних греков, на язык арифметических и алгебраических операций. Некоторые из задач, рассмотренных Героном и его ближайшими последователями, в точности совпадают с задачами, встречающимися в вавилонских и египетских текстах за 2000 лет до н.э. Следует подчеркнуть, что свои алгебраические работы греки излагали в описательной манере. Ни к какой символике они не прибегали. Не приводили они и доказательств правильности используемых приемов. Со времен Герона задачи, приводящие к уравнениям, стали довольно распространенным типом головоломок.

В александрийский период алгебра достигла своего наивысшего расцвета в трудах Диофанта. О происхождении и жизни этого ученого почти ничего не известно. К сожалению, труды Диофанта, намного превосходившие по глубине и значимости сочинения его современников, появились слишком поздно, чтобы оказать сколько-нибудь заметное влияние на развитие математики того времени; разрушительная волна (гл. II) уже надвигалась, погребая под собой греческую цивилизацию. Несколько книг, написанных Диофантом, безвозвратно утеряно, однако шесть частей величайшего сочинения Диофанта «Арифметика», содержавшего, по утверждению самого автора, всего тринадцать частей, дошли до нашего времени [34][164]. Подобно египетскому папирусу Ринда, «Арифметика» Диофанта представляет собой сборник разрозненных задач. В посвящении говорится, что «Арифметика» задумана как серия задач, призванных помочь одному из учеников Диофанта овладеть различными видами чисел (Диофант [34], с. 41).

Одной из значительных заслуг Диофанта является введение в алгебру некоторой символики. Поскольку мы располагаем не подлинными рукописями самого Диофанта, а лишь поздними (датируемыми не ранее чем XIII в.) копиями, трудно говорить с уверенностью, какими именно символами пользовался сам Диофант. Известно лишь, что он ввел символы, соответствующие нашим обозначениям $x$, степеням неизвестного $x$ вплоть до $x^6$ и $1/x$. Появление такой символики замечательно само по себе, но еще больший интерес представляет введение степеней выше третьей, поскольку, как мы уже отмечали, греки классического периода игнорировали произведения более чем трех сомножителей, так как считали их не имеющими геометрического смысла. Но если подходить к умножению с чисто арифметических позиций, то произведения более трех сомножителей, разумеется, становятся вполне законными. Именно такой подход к произведениям трех и более чисел был избран Диофантом.

Свои решения Диофант излагал словесно – так, как мы пишем прозу. Все необходимые действия он производил исключительно арифметически, не прибегая к геометрии для иллюстрации или в подтверждение своих рассуждений. Произведение $(x - 1)\ (x - 2)$ Диофант вычислял чисто алгебраически, как это делаем мы. Использовал он и алгебраические тождества, например равенство $a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b)$ и более сложные. Строго говоря, в своих вычислениях Диофант

---

[164] Диофант Александрийский. Арифметика и Книга о многоугольных числах. – М.: Наука, 1974; Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972; Башмакова И.Г., Славутин И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. – М.: Наука, 1984.

выполнял действия, основанные на использовании алгебраических тождеств, хотя сами тождества в явном виде у него не встречались.

Алгебра Диофанта обладала еще одной особенностью: Диофант охотно решал неопределенные уравнения, например одно уравнение с двумя неизвестными. Такие уравнения математики рассматривали и до Диофанта. Так, пифагорейцы нашли целочисленные решения уравнения[165] $x^2 + y^2 = z^2$. Аналогичные уравнения рассматривались и в других сочинениях. Но Диофант был первым, кто предпринял систематические и обширные исследования неопределенных уравнений, став тем самым основателем нового раздела алгебры, называемого ныне диофантовым анализом.[166]

Хотя применение алгебры снискало Диофанту широкую известность, нельзя не отметить, что он признавал только положительные рациональные корни и отбрасывал все остальные. Даже при решении квадратного уравнения с одним неизвестным, имеющего два положительных рациональных корня, Диофант приводил только один (больший) корень. Если же уравнение имело два отрицательных корня, иррациональные или комплексные, то Диофант отвергал такое уравнение, считая его неразрешимым. Если уравнение имело иррациональные корни, то Диофант шаг за шагом, от конца к началу, прослеживал полученное решение и показывал, как изменить исходное уравнение, чтобы новое уравнение имело рациональные корни. В этом Диофант отличался от Герона и Архимеда. Герон был инженером, и возникавшие в его расчетах иррациональные числа не пугали его. Для Герона иррациональные величины были вполне приемлемыми, хотя он, разумеется, и заменял их рациональными приближениями. Архимед также стремился получить точные решения и, если ответы выражались иррациональными числами, указывал границы, в которых те были заключены.

Нам не известно доподлинно, как Диофант пришел к своим уравнениям (см. [34][167]). Поскольку Диофант не пользовался геометрией, маловероятно, что он лишь переложил методы Евклида, приспособив их к решению квадратных уравнений. К тому же у Евклида не встречаются неопределенные уравнения: Диофант был первым из математиков, занявшихся систематическим исследованием таких уравнений. Мы не знаем, существовала ли преемственность в науке в конце александрийского периода, и поэтому нам трудно установить, в какой мере сказались на работах Диофанта идеи его древнегреческих предшественников. Использованные Диофантом методы решения уравнений имеют гораздо больше общего с традициями вавилонской математики. Ее влияние на Диофанта косвенно подтверждается и другими фактами. Однако алгебра Диофанта существенно отличается от вавилонской: Диофант ввел символику и стал систематически решать неопределенные уравнения. В целом деятельность Диофанта стала заметной вехой в истории алгебры.

Работы Герона и Диофанта, Архимеда и Птолемея по различным вопросам арифметики и алгебры не отличались по своему стилю от «рецептурных» текстов египтян и вавилонян, содержавших четкие указания относительно того, что и в какой последовательности следует делать. Дедуктивные, проводимые «по всей форме» доказательства геометрии Евклида, Аполлония и Архимеда были здесь преданы забвению. Все проблемы рассматривались индуктивно: автор указывал способ решения конкретной задачи, предположительно пригодный для решения более широкого круга задач, границы которого были нечетки. Нужно ли говорить, что при этом различные типы чисел (целые числа, дроби, иррациональные числа) вообще не определялись, если не считать маловразумительных определений целых чисел, предложенных

---

[165] **Яглом:** Формулы для решения в целых числах «пифагорова уравнения» $x^2 + y^2 = z^2$ обычно приписываются Платону, но реально они, безусловно, были известны ранее, скажем в школе пифагорейцев. Выдающийся знаток вавилонской математики, ученик Д. Гильберта Отто Нейгебауэр (р. 1899) предположил даже, что эти формулы (разумеется, без строго логического их обоснования) были известны еще в древнем Вавилоне, ибо иначе становится совершенно загадочной обнаруженная Нейгебауэром древневавилонская клинописная глиняная табличка, содержащая список ряда первых решений этого уравнения.

[166] **Яглом:** *Диафантовым анализом* (см. по этому поводу: Башмакова и Славутин [34]) обычно называют теорию решений неопределенных уравнений (т.е. уравнений, содержащих более одного переменного) в целых числах, тогда как Диофанта интересовала родственная проблема отыскания рациональных решений подобных уравнений.

[167] Диофант Александрийский. Арифметика и Книга о многоугольных числах. – М.: Наука, 1974; Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972; Башмакова И.Г., Славутин И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. – М.: Наука, 1984.

Евклидом. Не существовало и аксиоматической основы, на которой можно было бы построить дедуктивную систему, пригодную для решения арифметических и алгебраических проблем.

Таким образом, греки завещали потомкам две совершенно различные математические науки: с одной стороны – дедуктивную, систематически развитую и излагаемую, хотя и не свободную от ошибок, геометрию, с другой – эмпирическую арифметику и алгебру как ее обобщение. Поскольку, согласно представлениям греческих мыслителей классического периода, математические результаты должны были выводиться дедуктивно и базироваться на явно заданной аксиоматической основе, возникновение независимых арифметики и алгебры, не обладающих собственной логической структурой, привело к одной из величайших аномалий в истории математики.

Индийцы и арабы, подхватившие эстафету развития математики после окончательного уничтожения арабами эллинистической (александрийской) греческой цивилизации, в еще большей мере нарушили концепцию математики, сложившуюся у греков классического периода. Подобно своим предшественникам – грекам, индийские и арабские математики использовали целые числа и дроби, но они, не колеблясь, оперировали и иррациональными числами. Именно они ввели новые, верные, правила сложения, вычитания, умножения и деления иррациональных чисел. Как же индийцам и арабам удалось придумать правила, лишенные логического обоснования и тем не менее оказавшиеся верными? Загадка решается довольно просто: индийцы и арабы рассуждали по аналогии. Так, правило $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ они считали верным для любых чисел $a$ и $b$, поскольку оно выполнялось, например, в случае $\sqrt{36} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$. Фактически индийцы считали, не оговаривая этого специально, что с квадратными корнями из целых чисел можно обращаться так же, как с целыми числами.

Индийцы были менее изощренными математиками, чем греки, и не видели, какие логические трудности таятся в понятии иррационального числа. Интересуясь «рецептурной», или алгоритмической, стороной вычислений, индийцы не заметили те различия, которым греки придавали столь большое значение. Но производя сложение и вычитание, умножение и деление иррациональных чисел по таким же правилам, по каким производятся арифметические операции над рациональными числами, индийцы внесли посильный вклад в развитие математики. Кроме того, вся их арифметика была полностью независимой от геометрии.

Введя в обращение отрицательные числа для обозначения денежных долгов, или пассива, индийцы преумножили и без того многочисленные логические трудности математиков (положительные числа при таком подходе должны означать наличность, или актив). Первым ввел отрицательные числа Брахмагупта (около 628 г.), но он лишь сформулировал правила четырех арифметических действий над отрицательными числами, не приведя никаких определений, аксиом или теорем. Выдающийся индийский математик XII в. Бхаскара обратил внимание на то, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения – положительное и отрицательное. Бхаскара рассмотрел также вопрос о квадратном корне из **отрицательных** чисел и пришел к выводу, что такой корень не существует, так как иначе его квадрат должен был бы быть отрицательным числом, а отрицательное число не может быть квадратом.

Далеко не все индийцы восприняли нововведение Бхаскары. Даже сам Бхаскара, приводя в качестве решений одной задачи два числа (50 и –50), утверждал: «Второе значение следует отбросить как неприемлемое, ибо люди не одобряют отрицательных решений». Тем не менее отрицательные числа вскоре после того, как они были введены, начали распространяться всё шире.

Индийцам удалось достичь некоторых успехов и в алгебре. Для описания операций и неизвестных они ввели сокращенные слова и специальные символы. И хотя символика индийцев не была всеобъемлющей, их алгебра обладала определенными преимуществами по сравнению с алгеброй Диофанта. Решая задачу, индийцы указывали только основные этапы решения, не приводя никаких обоснований или доказательств. Отрицательные и иррациональные корни квадратных уравнений индийцы рассматривали наряду с положительными и рациональными корнями.

В действительности индийцы обращались с алгеброй еще более свободно, чем мы здесь говорили. Например, из тригонометрии известно, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ при любом угле $\alpha$. Для Птолемея, одного из создателей тригонометрии и автора ее первого систематического изложения, это соотношение было геометрическим утверждением о соотношении между длинами хорд в окружности. Хотя, как мы отмечали, Птолемей свободно пользовался арифметикой, выражая неизвестные длины через известные, он в основном опирался на геометрию и приводимые им аргументы были геометрическими. Индийцы же оперировали с тригонометрическими отношениями, по существу, так, как мы сейчас, – для них это были просто числа. Вычисляя cos α по известному sin α, они свободно использовали соотношение $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, применяя затем простейшие преобразования своих формул. Таким образом, при выводе и записи соотношений между синусами и косинусами углов индийская тригонометрия полагалась не столько на геометрию, сколько на алгебру.

Мы видим, что арифметика и вычислительные возможности математики интересовали индийцев несравненно больше, чем дедуктивные схемы рассуждений, и что основной вклад они внесли именно в развитие арифметики и разработку практических приемов вычислений. Математику индийцы называли *ганита*, что означает «наука о вычислениях». Они предложили немало удобных методов вычислений и усовершенствовали известные ранее приемы счета, но, судя по всему, совсем не рассматривали доказательств. Индийцы пользовались определенными математическими правилами, не задумываясь над логической обоснованностью своих действий. Ни одну область математики индийцы не обогатили ни общими методами, ни радикально новыми идеями.

Можно с уверенностью сказать, что индийцы не сознавали значимости собственного вклада в развитие математики. Те немногие удачные идеи, которые они внесли в математику (введение особых символов для обозначения чисел от 1 до 9; переход от позиционной системы записи чисел с основанием 60 к десятеричной системе; введение отрицательных чисел и признание нуля полноправным числом), возникали случайно, и, судя по всему, индийские математики не понимали истинной значимости таких нововведений. Индийцы с полным безразличием относились к математической строгости. Выдвигаемые ими тонкие идеи они с поразительным равнодушием смешивали с грубыми соображениями египтян и вавилонян. Среднеазиатский ученый-энциклопедист аль-Бируни (973 – около 1050) писал об индийцах:

> Я могу сравнить то, что содержится в их книгах по арифметике и другим математическим наукам, только с перламутром, смешанным с незрелыми финиками, или с жемчужинами вперемешку с навозом, или с кристаллами, перемешанными с камешками. Обе части имеют для них равную ценность, поскольку у них нет примера восхождения к вершинам логического познания. ([35][168], с. 69.)

Так как индийцы питали особую склонность к арифметике и внесли основной вклад в развитие арифметики и алгебры, их деятельность привела к расширению той части математики, которая опиралась на эмпирическую и интуитивную основу.

В то время как индийцы практически игнорировали дедуктивную геометрию, арабы предприняли критическое изучение геометрических работ древних греков и по достоинству оценили роль дедуктивного доказательства в становлении геометрии. Однако в отношении к арифметике и алгебре, которым в арабской математической литературе отводилась более значительная роль, чем геометрии, арабы фактически мало чем отличались от индийцев. Арабов, как и их индийских предшественников, устраивало рассмотрение арифметики и алгебры на эмпирической, конкретной и интуитивной основе. Правда, некоторые арабские математики приводили геометрические соображения в обоснование решения квадратных уравнений, но в целом подход к решению и методология у арабов, в отличие от греков классического периода, по существу были алгебраическими. Кубические уравнения, например уравнение $x^3 + 3x^2 + 7x + 5 = 0$, арабы решали, используя только геометрические построения, так как алгебраический метод решения таких уравнений еще не был открыт. Но их геометрические построения было бы невозможно выполнить с помощью циркуля и линейки, а доводы, приводимые в обоснование построений, не имели строго дедуктивного характера. На протяжении всех столетий, пока арабы активно занимались математикой, в своих оригинальных работах они мужественно сопротивлялись соблазнам точного рассуждения.

Наиболее интересной особенностью математики индийцев и арабов является их внутренне противоречивое представление о предмете математического исследования. То, что египтяне и вавилоняне были склонны воспринимать немногие известные им арифметические и геометрические правила на эмпирической основе, само по себе не удивительно. Эмпирическая основа естественна почти для всех видов человеческого знания. Но индийцам и арабам было известно совершенно новое понятие математического доказательства, доставшееся им в наследство от

[168] Бируни Абу Рейхан. Избранные произведения. Т.2. – Ташкент: Фан, 1963.

греков. Однако они не позаботились о том, чтобы применить понятие дедуктивного доказательства в арифметике и алгебре. Отношение индийцев к математике можно в какой-то степени объяснить. Индийцы не придавали особого значения тем немногим достижениям греческой математики классического периода, которые были им известны, и следовали в основном александрийскому подходу к арифметике и алгебре. Но арабы были хорошо осведомлены о греческой геометрии и даже, как упоминалось, предприняли попытку критического пересмотра результатов своих предшественников. Кроме того, на протяжении нескольких веков и арабы, и индийцы находились в благоприятных для занятий чистой наукой условиях – и ничто не вынуждало математиков жертвовать доказательством ради немедленной практической отдачи. Как могло случиться, что два эти народа подошли к развитию двух областей математики совершенно иначе, чем греки классического периода и многие из александрийцев?

На этот вопрос существует несколько возможных ответов. Прежде всего, индийские и арабские математики, несмотря на арабские комментарии к дедуктивной геометрии, по существу некритически отнеслись к греческому наследию. Возможно, именно поэтому они восприняли математику такой, какой она пришла к ним: геометрия, по их мнению, должна была оставаться дедуктивной, арифметика и алгебра – эмпирическими и эвристическими. Возможно и другое объяснение: и индийцы, и арабы, в особенности последние, по достоинству оценили высокие стандарты строгости в геометрии, столь разительно отличающиеся от требований, предъявляемых к арифметике и алгебре, но не сумели подвести под арифметику надлежащий логический фундамент. В пользу такого предположения говорит хотя бы то, что арабы приводили в подтверждение решений квадратных и кубических уравнений некоторые геометрические соображения.

Не исключены и другие объяснения. Так, индийцы и арабы отдавали предпочтение арифметике, алгебре и алгебраической формулировке тригонометрических соотношений. Подобное предрасположение может свидетельствовать об ином складе ума, оно может быть обусловлено и какими-то особенностями индийской и арабской культур. Обе эти цивилизации превыше всего ставили запросы практики, а для удовлетворения практических потребностей – как мы уже отмечали, говоря о развитии математики в александрийский период, – были необходимы количественные результаты, которые давали именно арифметика и алгебра. В пользу предположения о различных складах ума косвенно свидетельствует и реакция европейцев на математическое наследие, доставшееся им от индийцев и арабов. Как мы увидим в дальнейшем, европейцы были гораздо сильнее, чем арабы и индийцы, обеспокоены логическими проблемами в построении арифметики и геометрии. Безрассудная смелость индийцев и арабов вывела на передний план арифметику и алгебру (если говорить о практической полезности), поставив их почти наравне с геометрией (см., например, [9][169], [36][170], [37][171]).

Когда в конце средневековья и в период Возрождения европейцы – отчасти через арабов, отчасти непосредственно из сохранившихся греческих рукописей – ознакомились с существующим уровнем достижений математики, они своеобразно разрешили дилемму, возникшую в связи с разделением математики на два типа «знания». Настоящей математикой, по мнению европейцев, заведомо была только дедуктивная геометрия греков. Но в то же время они не могли и не хотели отрицать полезность и эффективность арифметики и алгебры, которые хотя и были лишены твердого логического фундамента, но уже значительно усовершенствовались по сравнению с классической древностью.

Первая проблема, с которой столкнулись европейцы, сводилась к старому вопросу о том, как следует относиться к иррациональным числам. Итальянский математик Лука Пачоли (ок. 1445–1514), немецкий монах и профессор математики в Йене Михаэль Штифель (1486(?)–1567), итальянский врач и ученый Джироламо Кардано (1501–1570) и фламандский военный инженер Симон Стевин (1548–1620) свободно использовали иррациональные числа, следуя здесь традиции индийцев и арабов, и ввели много новых типов иррациональностей. Так, Штифель оперировал с иррациональными выражениями вида

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}},$$

[169] Юшкевич А.П. *История математики в средние века*. – М.: Физматгиз, 1961.
[170] Аль-Хорезми. Математические трактаты. – Ташкент: Фан, 1983.
[171] Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми. – М.: Наука, 1983.

а Джироламо Кардано – с иррациональностями, содержащими кубические корни. Примером того, насколько свободно и широко европейцы использовали иррациональности, может служить выражение для числа $\pi$, полученное Франсуа Виетом (1540–1603). Рассматривая правильные многоугольники с 4, 8, 16 и более сторонами, вписанные в окружность единичного радиуса, Виет обнаружил, что

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Иррациональные числа нашли широкое применение и в связи с одним из новых достижений математики эпохи Возрождения – логарифмами. Логарифмы положительных чисел были изобретены в конце XVI в. Джоном Непером[172] (1550–1617) для той самой цели, для которой они с тех пор и употребляются, – для ускорения арифметических вычислений. И хотя логарифмы большинства положительных чисел иррациональны (а предложенный Непером метод вычисления логарифмов основан на свободном обращении с иррациональными числами), все математики приветствовали полезное изобретение, избавившее их от излишнего труда.

Вычисления с иррациональностями производились без каких-либо затруднений, но кое-кого всё же беспокоила проблема, можно ли считать иррациональные числа «настоящими». Так, Штифель в своем главном труде «Полная арифметика» (*Arithmetica integra,* 1544), посвященном арифметике и алгебре, вторя Евклиду, высказывал предположение, что величины (геометрическая теория Евклида) отличны от чисел; однако, следуя духу достижений своего времени, он выражал иррациональные числа в десятичной системе. Штифеля беспокоило, что для записи иррационального числа в десятичной системе требуется бесконечно много знаков. С одной стороны, рассуждал он,

> так как при доказательстве [свойств] геометрических фигур иррациональные числа заменяют рациональные всякий раз, когда те отказываются служить нам, и доказывают всё то, что не могли бы доказать те... приходится признать, что они [иррациональные числа] являются истинными числами. К тому же нас вынуждают и результаты, проистекающие из их применения, которые нельзя не признать подлинными, достоверными и незыблемыми. С другой стороны, иные соображения заставляют нас отрицать, что иррациональные числа вообще являются числами. Такое сомнение подкрепляется тем, что если мы попытаемся записать иррациональные числа в десятичной форме... то обнаружим, что они непрестанно ускользают от нас и ни одно из них не удается постичь точно... Число же, которому в силу его природы недостает точности, не может быть названо истинным числом... Следовательно, подобно тому, как не является числом бесконечность, иррациональное число также не является истинным числом, а как бы скрыто от нас в облаке бесконечности.

Далее Штифель добавляет, что настоящие числа – это либо целые числа, либо дроби, а поскольку иррациональные числа не принадлежат ни к тем, ни к другим, их нельзя считать настоящими числами. Столетие спустя Паскаль и Барроу утверждали, что иррациональные числа не более чем символы, не существующие независимо от геометрических величин, и что логика арифметических операций, производимых над иррациональными числами, должна быть обоснована с помощью теории величин Евклида, хоть эта теория и не в полной мере отвечала поставленной так задаче.[173]

Высказывались и иные утверждения: по мнению некоторых европейских математиков, иррациональные числа с полным основанием можно было считать настоящими числами. Стевин провозгласил иррациональности числами и построил ряд всё более точных приближений их с помощью рациональных чисел. Джон Валлис (1616–1703) в своей «Алгебре» (1685) также признал, что иррациональные числа являются числами в полном смысле этого слова. Однако ни Стевин, ни Валлис не привели никаких логических аргументов в подтверждение своего мнения.

Более того, когда Декарт в своей «Геометрии» (1637) и Ферма в рукописи 1629 г. разработали аналитическую геометрию, ни тот, ни другой не имели ясного представления об иррациональных числах. Тем не менее, оба исходили из предположения, что между всеми

---

[172] **Яглом:** Почти одновременно с шотландцем Джоном Непером и независимо от него к идее логарифмов пришел швейцарский часовщик Иобст Бюрги (1552–1632).

[173] **Яглом:** Теория Евдокса–Евклида содержала почти безупречное определение иррациональных чисел (которым придавалось обличие отношений отрезков) и условий их равенства – но, разумеется, проблемы логического обоснования действий над иррациональными числами здесь не были доведены до того уровня, который приобрели они в математике 2-й половины XIX в.

положительными действительными числами и точками на прямой существует взаимно-однозначное соответствие, т.е. что расстояние от любой точки на прямой до какой-то точки, принятой за начало отсчета, может быть выражено числом. Так как многие из чисел при этом оказывались бы иррациональными, Декарт и Ферма тем самым неявно допускали существование иррациональных чисел, несмотря на то, что тогда оно еще никак не было логически обосновано.

Европейцам пришлось столкнуться и с проблемой отрицательных чисел. Эти числа стали известны в Европе из арабских текстов, но большинство математиков XVI–XVII вв. не считали отрицательные числа «настоящими» или утверждали, что отрицательные числа не могут быть корнями уравнений. Никола Шюке [1445(?)–1500(?)] в XV в. и Штифель в XVI в. заявляли, что отрицательные числа лишены всякого смысла. Кардано включал отрицательные величины в число корней рассматриваемых им уравнений, но полагал, что отрицательные корни – это просто символы, не имеющие реального смысла. Отрицательные корни уравнений Кардано называл фиктивными и противопоставлял их действительным, т.е. положительным, корням. Виет полностью отвергал отрицательные числа. Декарт принимал их лишь с определенными оговорками. Отрицательные корни уравнений Декарт называл ложными на том основании, что они якобы представляют числа, которые меньше, чем ничто. Однако Декарту удалось показать, как, исходя из любого уравнения, можно построить другое уравнение, корни которого больше корней исходного на любую заданную величину. Тем самым Декарт указал способ, позволяющий преобразовать уравнение с отрицательными корнями в уравнение с положительными корнями. «Фиктивные» корни при таком преобразовании переходили в действительные, и поэтому Декарт неохотно смирился с отрицательными числами, но сомнения и тревоги так и не оставили его.[174] Паскаль считал, например, вычитание числа 4 из 0 операцией, лишенной всякого смысла. В «Мыслях» Паскаля есть выразительное признание: «Я знаю людей, которые никак не могут понять, что если из нуля вычесть четыре, то получится нуль».

Интересный довод против отрицательных чисел выдвинул близкий друг Паскаля теолог и математик Антуан Арно (1612–1697). Арно усомнился в том, что –1 : 1 = 1 : –1. Как может выполняться такое равенство, спрашивал он, если –1 меньше, чем 1? Ведь меньшее число не может относиться к большему так же, как большее к меньшему. Лейбниц, признав правильность возражения Арно, указал, что такого рода пропорции вполне допустимо использовать в вычислениях, ибо по форме они правильны, и сравнил действия, производимые над отрицательными числами, с действиями, производимыми над мнимыми величинами, введенными незадолго до этого. Тем не менее, Лейбниц затемнил существо дела, предложив называть мнимыми (несуществующими) все величины, не имеющие логарифма.[175] По мнению Лейбница, число –1 не существует, так как положительные логарифмы соответствуют числам, большим 1, а отрицательные логарифмы [!] соответствуют числам, заключенным между 0 и 1. Следовательно, для отрицательных чисел логарифмов просто «не хватает». Действительно, если бы нашлось какое-нибудь число, соответствующее log(–1), то половина его, как следует из теории логарифмов, соответствовала бы log√–1, а √–1 заведомо не имеет логарифма.

Одним из первых алгебраистов, умышленно не переносившим отрицательный коэффициент в другую часть уравнения, был Томас Гарриот (1560–1621). Однако он отвергал отрицательные корни и даже «доказал» в своем сочинении «Практические аналитические искусства» (*Artis analyticae praxis*, 1631), опубликованном уже после его смерти, что отрицательные корни не существуют. Ясные и четкие определения отрицательных чисел дал Рафаэль Бомбелли (XVI в.), хотя ему и не удалось обосновать правила действий над отрицательными числами, поскольку в то время отсутствовала логическая основа, необходимая для обоснования положительных

---

[174] **Яглом:** Любопытно, что открытая Декартом и по сей день сохранившая его имя кривая, описываемая уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, ныне рисуется вовсе не так, как это делал Декарт, считавший, что x и y должны быть только положительными; при этом мы по-прежнему называем эту кривую «декартов лист», хотя, если не ограничиваться одними лишь положительными значениями абсциссы и ординаты, рассматриваемая кривая утрачивает форму листа, какую она имела на чертежах Декарта.

[175] **В.Э.:** А если говорить в терминах Веданской теории, то он предлагал ограничиться одними лишь метрическими числами (при образовании которых обращается внимание только на количество элементов в паре множеств «Мера–Измеряемое»), а взаимную ориентацию Меры и Измеряемого не принимать во внимание, и таксоны, полученные при учете ориентации, считать мнимыми (несуществующими). Логарифмы (в их первоначальном понимании – пока не пришел Эйлер со своим расширением $\log \rho + i(\varphi + 2n\pi)$) существуют только у метрических чисел.

чисел.[176] Стевин рассматривал уравнения с положительными и отрицательными коэффициентами и считал отрицательные корни вполне допустимыми. В своем сочинении «Новое изобретение в алгебре» (*Invention nouvelle en algèbre,* 1629) Альбер Жирар (1595–1632) не проводил никакого различия между отрицательными и положительными числами и указывал оба корня квадратного уравнения, даже если они были отрицательными. И Жирар, и Гарриот употребляли один и тот же знак «минус» для обозначения как операции вычитания, так и отрицательных чисел, хотя следовало бы ввести два отдельных символа, поскольку отрицательное число – независимое понятие, в то время как вычитание – одна из четырех арифметических операций.

В целом можно сказать, что немногие математики XVI–XVII вв. свободно обращались с отрицательными числами или легко восприняли их введение, большинство заведомо не признавали отрицательные числа «настоящими» корнями алгебраических уравнений. По поводу отрицательных чисел среди математиков бытовали самые нелепые предрассудки. Так, Валлис, придерживавшийся прогрессивных для своего времени взглядов и не отвергавший отрицательных чисел, был убежден в том, что отрицательные числа больше, чем бесконечность, и в то же время меньше нуля. В своей «Арифметике бесконечно малых» (*Arithmetica infintiorum,* 1655) Валлис доказывал, что поскольку отношение $a/0$ при положительном $a$ обращается в бесконечность, то, когда знаменатель становится отрицательным (отношение $a/b$ с отрицательным $b$), отношение должно стать больше, чем $a/0$, так как отрицательный знаменатель меньше нуля. Следовательно, заключал Валлис, отрицательные числа должны быть больше, чем бесконечность.

Некоторые из наиболее передовых мыслителей того времени – Бомбелли и Стевин – предложили представление чисел, которое, несомненно, способствовало принятию всей системы вещественных чисел. Бомбелли предположил, что существует взаимно-однозначное соответствие между вещественными числами и длинами отрезков, отложенными на прямой (с заданной единицей длины), и ввел для длин четыре основных действия. По мнению Бомбелли, вещественные числа и производимые над ними арифметические действия определяются длинами отрезков и соответствующими геометрическими операциями. Тем самым Бомбелли рационализировал систему вещественных чисел на геометрической основе. Стевин также рассматривал вещественные числа как длины и считал, что при подобной интерпретации исчезают все трудности, связанные с введением иррациональных чисел. Разумеется, при таком подходе вещественные числа оказались тесно связанными с геометрией.

Так и не преодолев трудностей, связанных с иррациональными и отрицательными числами, европейцы еще более увеличили свое, и без того тяжкое, бремя, когда набрели на новое открытие, значение которого они осознали далеко не сразу, – комплексные числа. Новые числа возникли, когда математики распространили операцию извлечения квадратного корня на любые числа, которые только могут встретиться, например, при решении квадратных уравнений. Так, Кардано в гл. 37 своего трактата «Великое искусство» (*Ars magna,* 1545) поставил и решил следующую задачу: разделить число 10 на две части, произведение которых равно 40. Эта на первый взгляд нелепая задача допускает решение, поскольку, как заметил Д'Аламбер, «алгебра щедра: она нередко дает больше, чем от нее можно было бы требовать». Если $x$ – одна из частей, то по условиям задачи $x(10 - x) = 40$ и мы получаем для $x$ квадратное уравнение.

Решив его, Кардано нашел корни $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$, относительно которых заметил, что эти «сложнейшие величины бесполезны, хотя и весьма хитроумны». «Умолчим о нравственных муках» и умножим $5+\sqrt{-15}$ на $5-\sqrt{-15}$. Произведение этих двух чисел равно 25–(–15) = 40. По этому поводу Кардано философски заметил: «Арифметические соображения становятся всё более неуловимыми, достигая предела столь же утонченного, сколь и бесполезного».

Еще раз Кардано столкнулся с комплексными числами в связи с алгебраическим методом решения кубических уравнений, который он изложил в своей книге. Хотя Кардано искал и отбирал только вещественные корни, выведенная им формула давала и комплексные корни (если уравнение допускало комплексные корни). Небезынтересно отметить, что в том случае, когда все три корня уравнения были вещественными, формула Кардано приводила к комплексным числам,

---

[176] В этой связи уместно вспомнить строки из У.Г. Одена:

Минус на минус – всегда только плюс.
Отчего так бывает, сказать не берусь.

по которым можно было найти вещественные корни.[177] Таким образом, Кардано мог не придавать большого значения комплексным числам, но, поскольку он не знал, как извлекать из комплексных чисел кубический корень и, следовательно, как получать вещественные корни, ему так и не удалось преодолеть эту трудность. Вещественные корни Кардано находил другим способом.

Бомбелли также рассматривал комплексные числа как решения кубического уравнения и сформулировал (практически в современном виде) правила выполнения четырех арифметических операций над комплексными числами, однако считал их бесполезной и хитроумной «выдумкой». Альбер Жирар признавал комплексные числа, по крайней мере, как формальные решения уравнений. В частности, в работе «Новое изобретение в алгебре» Жирара говорится следующее: «Можно было бы спросить, для чего нужны эти невозможные решения [комплексные корни]. Я отвечу – по трем причинам: для незыблемости общих правил; чтобы не было других решений и по причине их полезности». Однако передовые взгляды Жирара не оказали сколько-нибудь заметного влияния на его коллег.

Декарт также был среди тех, кто отвергал комплексные корни. Именно он ввел в употребление термин «мнимое число». В своей «Геометрии» Декарт утверждал: «Ни истинные, ни ложные [отрицательные] корни не бывают всегда вещественными, иногда они становятся мнимыми». Декарт считал, что отрицательные корни можно сделать «действительными», преобразуя исходное уравнение в уравнение с положительными корнями, тогда как комплексные корни превратить в вещественные невозможно. Следовательно, комплексные корни с полным основанием можно считать не настоящими, а мнимыми.

Даже Ньютон не придавал особого значения комплексным корням, вероятнее всего потому, что в его время комплексные корни еще не имели физического смысла. Так, во «Всеобщей арифметике» ([139][178], изд. 2-е, 1728) Ньютон говорит: «Корни уравнений часто должны быть невозможными [комплексными] именно потому, что они призваны выражать невозможные случаи задачи так, как если бы те были возможны». Иначе говоря, задачи, которые не допускают решений, имеющих физический или геометрический смысл, должны иметь комплексные корни.

Отсутствие ясности в вопросах, связанных с комплексными числами, часто демонстрируют на примере широкоизвестного высказывания Лейбница: «Дух божий нашел тончайшую отдушину в этом чуде анализа, уроде из мира идей, двойственной сущности, находящейся между бытием и небытием, которую мы называем мнимым корнем из отрицательной единицы». Хотя Лейбниц формально производил операции над комплексными числами, он не понимал их истинной природы. Желая хоть как-то обосновать те применения, которые он сам и Иоганн Бернулли нашли комплексным числам в математическом анализе, Лейбниц высказал надежду, что вреда от этого не будет.

Несмотря на отсутствие ясного понимания природы комплексных чисел в XVI–XVII вв., алгоритмическая сторона вычислений, производимых с вещественными и комплексными числами, усовершенствовалась и расширялась. В своей «Алгебре» (1685) Валлис показал, как геометрически представить комплексные корни квадратного уравнения с вещественными коэффициентами. По существу, Валлис утверждал, что комплексные числа ничуть не более бессмысленны, чем отрицательные числа, а так как последние можно изобразить точками направленной прямой, то комплексные числа можно представить точками плоскости. Валлис предложил несовершенное представление комплексных чисел и способ, позволяющий геометрически построить корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ для случая вещественных и комплексных корней. Хотя работа Валлиса оказалась правильной, ее предали забвению, поскольку в то время математики еще не могли по достоинству оценить применение комплексных чисел.

---

[177] **Яглом:** Так называемая формула Кардано для корня (точнее, для трех корней) кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$ (найдена она была несколько раньше, но опубликована впервые в «Великом искусстве» Кардано, который, впрочем, и не претендовал здесь на приоритет) имеет вид

$$x=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{(q/2)^2+(p/3)^3}}+\sqrt{-(q/2)-\sqrt{(q/2)^2+(p/3)^3}};$$

при этом если все три корня уравнения являются вещественными (*неприводимый случай* решения рассматриваемого уравнения), то $(q/2)^2 + (p/3)^3 < 0$ – и правильный ответ можно получить из этой формулы лишь при умении извлекать кубические корни из комплексных чисел (как это сделать, впервые объяснил Р. Бомбелли).

[178] Ньютон И. *Всеобщая арифметика*. – М.–Л.: Ростехиздат, 1948.

Хотя в XVII в. в логике математики возникли и другие проблемы, мы рассмотрим их в следующей главе, а пока нас будут интересовать те трудности, с которыми столкнулись в XVIII в. математики, пытаясь осмыслить и обосновать всё то, что они делали с иррациональными, отрицательными и комплексными числами, а также разобраться в алгебре. Что касается (положительных) иррациональных чисел, то, хотя они по-прежнему не были строго определены и их свойства по существу оставались неустановленными, всё же чисто интуитивно такие числа были более приемлемы, поскольку по своим свойствам они в общем были близки к целым и дробным числам. Именно поэтому математики безбоязненно использовали их, не задумываясь ни о том, что собственно они означают, ни об их свойствах. Некоторые математики, в том числе и Эйлер, полагали, что логической основой теории иррациональных чисел служит теория величин Евдокса, изложенная в книге V «Начал» Евклида. Евдокс действительно создал теорию пропорций для величин, связанную с геометрией, но отнюдь не теорию иррациональных чисел.[179] Однако, что касалось иррациональных чисел, то здесь если не логика, то по крайней мере совесть ученых мужей XVII в. была чиста.

Отрицательные числа беспокоили математиков гораздо сильнее, чем иррациональные; возможно, это объяснялось тем, что отрицательные числа не имели столь очевидного геометрического смысла и правила операций над ними выглядели менее привычно. Хотя примерно с середины XVII в. отрицательные числа использовались весьма широко, они были лишены строгого определения и логического обоснования, и многие математики либо пытались каким-то образом восполнить этот пробел, либо оспаривали само применение отрицательных чисел. В статье «Отрицательное», написанной для знаменитой французской «Энциклопедии», один из величайших мыслителей Века разума Жан Лерон Д'Аламбер утверждал: «Если задача приводит к отрицательному решению, то это означает, что какая-то часть исходных предположений ложна, хотя мы и считали ее истинной», – и далее: «Если получено отрицательное решение, то это означает, что искомым решением служит дополнение к [соответствующему положительному] числу»[180].

Работа величайшего из математиков XVIII в. Леонарда Эйлера «Полное введение в алгебру» (1770) по праву принадлежит к числу самых значительных трудов по алгебре. В этой работе Эйлер обосновал эквивалентность операций вычитания величины $-b$ и прибавления величины $b$, сославшись на то, что «погасить долг означает поднести дар». Равенство $(-1) \cdot (-1) = +1$ Эйлер доказал следующим образом. Произведение $(-1) \cdot (-1)$, рассуждал он, может быть равно либо $-1$, либо $+1$, а поскольку ему удалось доказать, что $1 \cdot (-1) = -1$, то для произведения $(-1) \cdot (-1)$ остается единственное возможное значение, а именно $+1$. В XVIII в. авторы даже наиболее выдающихся работ по алгебре не различали знак «минус» как символ операции вычитания и знак «минус» как символ отрицательного числа (например, $-2$).

На протяжении XVIII в. против отрицательных чисел выдвигалось немало возражений. Английский математик, член совета Кларе-колледжа в Кембридже и член Королевского общества, Фрэнсис Мазер (1731–1824) был автором солидных работ по математике и фундаментального трактата по страхованию жизни. В 1759 г. он опубликовал «Рассуждение о применении в алгебре знака минус». Мазер показал, как избежать отрицательных чисел (исключение составляли лишь числа, получаемые в том случае, когда из меньшего числа необходимо вычесть большее), и в частности отрицательных корней уравнения. Он произвел тщательную классификацию квадратных уравнений: уравнения с отрицательными корнями Мазер рассматривал отдельно, а сами отрицательные корни рекомендовал отбрасывать. Аналогичным образом он поступал и с кубическими уравнениями. Об отрицательных корнях Мазер говорил:

---

[179] **Яглом:** Теория Евдокса–Евклида содержала почти безупречное определение иррациональных чисел (которым придавалось обличие отношений отрезков) и условий их равенства – но, разумеется, проблемы логического обоснования действий над иррациональными числами здесь не были доведены до того уровня, который приобрели они в математике 2-й половины XIX в.

[180] **Яглом:** Характерно, что при всей глубине и тонкости мысли, отражением которых явились статьи «Предел» и «Дифференциал» в знаменитой «Энциклопедии» (по существу впервые обосновавшие математический анализ почти на уровне построений Огюстена Коши) или статья «Размерность» (впервые провозгласившая, что мы живем в четырехмерном мире: три измерения – пространственные, четвертое – временнóе), к вопросу о введении в математику отрицательных чисел Д'Аламбер подходил с большой робостью, а комплексные числа вообще полностью игнорировал.

... Насколько я могу судить, они служат лишь для того, чтобы внести замешательство во всю теорию уравнений и сделать смутным и загадочным то, что по самой своей природе особенно ясно и просто... Чрезвычайно желательно поэтому не допускать отрицательные корни в алгебру, а если таковые всё же возникнут, неукоснительно изгонять их. Имеются веские основания полагать, что если бы нам удалось избавиться от отрицательных корней, то тем самым были бы сняты возражения, выдвигаемые многими учеными и остроумными мужами против алгебраических вычислений как слишком сложных и наделенных почти непостижимыми для разума понятиями. Алгебра, или всеобщая арифметика, по самой своей природе, несомненно, является наукой не менее простой, ясной и пригодной для доказательства, чем геометрия.

Еще более ожесточенными были споры о смысле комплексных чисел и применении этих чисел. И без того трудное положение осложнилось здесь тем, что некоторые математики стали рассматривать логарифмы отрицательных чисел (а также комплексных чисел), которые также должны были являться комплексными числами.

С 1712 г. развернулась острая дискуссия о смысле комплексных чисел, и в частности о логарифмах отрицательных и комплексных чисел, в которой участвовали своими статьями и письмами Лейбниц, Эйлер и Иоганн Бернулли. Лейбниц и Бернулли воспользовались для обозначения комплексных чисел термином «мнимые», предложенным Декартом, понимая под мнимыми величинами (к ним они относили и отрицательные числа) числа, которые не существуют. Тем не менее, и Лейбниц, и Бернулли, словно по волшебству, с немалой пользой применяли «несуществующие» числа в анализе, получая с их помощью, например, совершенно правильные формулы интегрирования: промежуточные выкладки, казалось бы, не имели смысла, но окончательный результат был верен.

Лейбниц заявлял, что логарифмы отрицательных чисел не существуют, и в доказательство приводил различные аргументы. Иоганн Бернулли считал, что $\log a = \log(-a)$, и в подтверждение также ссылался на различные доводы. Одно из «доказательств» опиралось на хорошо известные свойства логарифмов положительных чисел:

$$\log(-a) = ½ \log(-a)^2 = ½ \log a^2 = \log a.$$

Другой аргумент, взятый Бернулли из математического анализа, приводил к тому же выводу. Переписка между Лейбницем и Иоганном Бернулли о логарифмах отрицательных чисел была весьма обширной, но – увы! – большинство утверждений, на которых настаивали обе стороны, были неверными.

К правильному решению проблемы пришел Эйлер. Свой результат он изложил в работе «Исследования о мнимых корнях уравнений» (1751). Окончательный ответ, правильный по существу, но полученный с помощью неправильных рассуждений, применим ко всем комплексным числам, в том числе и к вещественным числам (если $y = 0$, то комплексное число $x+iy$ обращается в вещественное число $x$); он имеет следующий вид:

$$\log(x + iy) = \log(\rho e^{i\varphi}) = \log \rho + i(\varphi + 2n\pi),$$ [181]

где $n$ – произвольное целое число.[182] Однако современники Эйлера не поняли и не оценили эту его замечательную работу.

О своих результатах Эйлер сообщил в письме Д'Аламберу от 15 апреля 1747 г., где обратил внимание на то, что даже у любого положительного вещественного числа существует бесконечно много логарифмов. Лишь один из них является вещественным числом, и именно его мы обычно используем в своих вычислениях с вещественными числами. Ни обширная переписка, ни работа Эйлера не убедили Д'Аламбера, и в своей заметке «О логарифмах отрицательных величин» он выдвинул всевозможные метафизические, аналитические и геометрические аргументы против существования таких логарифмов. Д'Аламбер преуспел в своем намерении: ему удалось основательно запутать и без того сложную проблему. Свои расхождения с Эйлером Д'Аламбер

---

[181] Эйлер использует здесь так называемую тригонометрическую, или полярную, форму комплексного числа; здесь $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi$ – угол, образуемый с положительным направлением оси $x$ отрезком, проведенным из начала координат в точку $x + iy$ (при $y = 0$, угол $\varphi$ также равен 0). При этом $x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$.

[182] **В.Э.:** Здесь $\rho$ на самом деле – то метрическое число, подмножеством которого данное планарное («комплексное») число является. Таким образом, Эйлер предлагает считать логарифмом комплексного числа логарифм соответствующего метрического числа с «довеском» в форме $+ i(\varphi + 2n\pi)$, который характеризует ориентацию в паре первичных множеств планарного числа.

пытался скрыть, утверждая, будто речь идет лишь о различиях в формулировках, а не о принципиальных разногласиях по существу вопроса.

Все участники острой полемики, развернувшейся вокруг проблемы расширения понятия числа, мыслили непоследовательно. В первой половине XVIII в. было принято считать, что некоторые операции над комплексными числами, например операция возведения комплексного числа в комплексную степень, могут привести к числам совершенно новой природы. Подобным представлениям положил конец Д'Аламбер, доказавший в своей работе «Размышления об общей причине ветров» (1747), что все операции, производимые над комплексными числами, порождают только комплексные числа. Доказательство Д'Аламбера было усовершенствовано Эйлером и Лагранжем, но решающий шаг здесь сделал именно Д'Аламбер. По-видимому, Д'Аламбер сознавал непоследовательность и даже противоречивость собственных представлений о комплексных числах. Во всяком случае, в «Энциклопедии», для которой он написал много математических статей, о комплексных числах ни разу не упоминается.[183]

Не было полной ясности в вопросах, связанных с комплексными числами, и у Эйлера.[184] В своей «Алгебре» (1770), лучшем учебном курсе XVIII в. по этой дисциплине, Эйлер утверждал:

> Квадратные корни из отрицательных чисел не равны нулю, не меньше нуля и не больше нуля. Отсюда ясно, что квадратные корни из отрицательных чисел не могут находиться среди возможных [действительных, вещественных] чисел. Следовательно, нам не остается ничего другого, как признать их невозможными числами. Это приводит нас к понятию чисел, по своей природе невозможных и обычно называемых мнимыми или воображаемыми, потому что они существуют только в воображении.

Производя операции над комплексными числами, Эйлер порой и ошибался. Так, в его «Алгебре» фигурирует равенство $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$, выписанное по аналогии с тождеством $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{(ab)}$, справедливым для положительных $a$ и $b$, т.е. для вещественных корней.

Называя комплексные числа невозможными, Эйлер в то же время отмечал их полезность. В частности, он считал комплексные числа полезными по той причине, что они якобы позволяют отличать задачи, имеющие решения, от задач, не имеющих решения. Так, если бы нам понадобилось разложить число 12 на две части, произведение которых должно было бы равняться 40 (намек на задачу Кардано), то мы обнаружили бы, что эти части равны соответственно $6 + \sqrt{-4}$ и $6 - \sqrt{-4}$, т.е., согласно Эйлеру, узнали бы, что задача неразрешима.

Несмотря на множество принципиальных возражений против комплексных чисел, на протяжении XVIII в. их широко использовали, свободно применяя к ним правила арифметических действий над вещественными числами. Так математики получали практические навыки в обращении с комплексными числами. В тех случаях, когда комплексные числа применялись лишь на промежуточных стадиях математических доказательств, полученные с их помощью окончательные результаты всегда оказывались верными, что не могло не произвести благоприятного впечатления. Тем не менее математиков не оставляли сомнения в правильности такого рода доказательств, а иногда даже и получаемых с их помощью результатов.

Общее отношение математиков к узакониванию научного статуса тех разновидностей чисел (иррациональных, отрицательных и комплексных), которые доставляли им столько хлопот, отчетливо выразил Д'Аламбер в своей статье об отрицательных числах, написанной для «Энциклопедии». В целом эта статья была написана недостаточно ясно и завершалась следующим признанием: «Алгебраические правила действий над отрицательными числами ныне общеприняты, и все признают их точными независимо от того, что бы мы ни думали о природе этих чисел».

За многие века, на протяжении которых европейские математики упорно пытались понять природу различных типов чисел, на передний план выступила еще одна фундаментальная

---

[183] **В.Э.:** Здесь Яглом еще раз ссылается на свое последнее предыдущее примечание.

[184] **В.Э.:** Эйлер и другие великие математические мыслители того времени, конечно, высказывали изречения, которые нам теперь могут показаться ошибочными, но они были первопроходцами, и в потемках найти истину не так-то легко (к тому же они были по-своему правы: если числами считать только метрические числа или только линейные, то остальные становятся «воображаемыми»). Важнее то, что у современных математиков (в том числе у глубоко почитаемых мною Клайна и Яглома) ТОЖЕ нет «полной ясности в вопросах, связанных с комплексными числами» (и с другими числами тоже). Такая «полная ясность» появляется только после того, как к этим вопросам привлекаются мозговые программы, а это до Веданской теории никем не делалось.

логическая задача – задача обоснования алгебры. Первой работой, существенно упорядочившей новые результаты, было «Великое искусство» Дж. Кардано. В этой книге Кардано показал, как решать кубические уравнения (например, $x^3 + 3x^2 + 6x = 10$) и уравнения четвертой степени (типа $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7x + 5 = 0$). Примерно за сто лет арсенал алгебры пополнился многими важными результатами, часть которых была известна еще арабским математикам: методом математической индукции, биномиальной теоремой и приближенными методами вычисления корней уравнений разных степеней. Основной вклад в сокровищницу алгебры внесли Виет, Гарриот, Жирар, Ферма, Декарт и Ньютон. Но все эти новые результаты фактически не были доказаны. Правда, Кардано, а позднее Бомбелли и Виет привели в обоснование своих методов решения кубических уравнений и уравнений четвертой степени кое-какие геометрические соображения, но, поскольку эти математики игнорировали отрицательные и комплексные корни, приведенные ими соображения заведомо не могли рассматриваться как доказательства. Кроме того, появление уравнений высших степеней, например четвертой и пятой, означало, что геометрия, ограниченная в те времена трехмерным пространством, не могла служить основой доказательств. Результаты, полученные другими авторами, чаще всего оказывались всего лишь более или менее удачными догадками, подсказанными конкретными примерами.

Шаг в правильном направлении сделал Виет. Со времен Древнего Египта и Вавилона и вплоть до появления работы Виета математики решали уравнения первой степени, квадратные, кубические и уравнения четвертой степени, ограничиваясь всякий раз лишь какими-либо конкретными числовыми значениями коэффициентов. При подобном подходе уравнения $3x^2 + 5x + 6 = 0$ и $4x^2 + 7x + 8 = 0$ считались различными, хотя было ясно, что оба уравнения решаются одним и тем же методом. Кроме того, ученые стремились избежать отрицательных чисел; поэтому такое, например, уравнение, как $x^2 - 7x + 8 = 0$, принято было записывать в виде $x^2 + 8 = 7x$. Возникало множество типов уравнений одной и той же степени, каждый из которых приходилось рассматривать в отдельности. Главный вклад Виета в развитие алгебры состоял в введении буквенных коэффициентов.

По образованию и роду занятий Виет был юристом; математика же была для него «хобби», которому он посвящал свободное от работы время, печатая и рассылая свои работы за собственный счет. Отдельные математики использовали буквенные обозначения и до Виета, но делали это лишь от случая к случаю. Виет был первым, кто продуманно ввел буквенные обозначения и систематически их использовал. Основное новшество состояло в том, что буквами обозначались не только неизвестные или степени неизвестных, но, как правило, и коэффициенты уравнений. Такой подход позволял единообразно рассматривать все квадратные уравнения, записав их (в современных обозначениях) в виде $ax^2 + bx + c = 0$, где буквенные коэффициенты $a$, $b$ и $c$ могут означать любые числа, а $x$ – неизвестную величину (или неизвестные величины), значения которой требуется найти.

Виет назвал свою новую алгебру *logistica speciosa* (исчисление типов), противопоставляя ее тому, что он назвал *logistica numerosa* (исчисление чисел). Он хорошо понимал, что изучение квадратного уравнения общего вида $ax^2 + bx + c = 0$ эквивалентно изучению **всего класса** квадратных уравнений. Проводя в своем сочинении «Введение в аналитическое искусство» (*In artem analyticam isagoge*, 1591) различие между *logistica numerosa* и *logistica speciosa*, Виет обозначил границу между арифметикой и алгеброй. По его словам, алгебра – это метод, позволяющий производить действия над типами или видами, т.е. *logistica speciosa*; арифметика же и теория решений уравнений с конкретными числовыми коэффициентами образуют *logistica numerosa*. Тем самым Виет возвел алгебру на более высокий уровень, превратив ее в науку об общих типах форм и уравнений: ведь результат, полученный в общем случае, охватывает бесконечно много частных случаев.

Основное достоинство предложенных Виетом буквенных обозначений для классов чисел состояло в том, что, доказав правильность метода решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, математики могли с полным основанием применять тот же метод к решению бесконечно большого числа конкретных уравнений, например уравнения $3x^2 + 7x + 5 = 0$. Можно сказать, что основной вклад Виета в развитие алгебры состоит в придании общности алгебраическим доказательствам. Но чтобы производить какие-то операции над $a$, $b$ и $c$, где $a$, $b$ и $c$ – любые вещественные или комплексные числа, необходимо быть уверенным в применимости этих операций ко **всем** вещественным и комплексным числам. А поскольку не только операции не были логически обоснованы, но даже определения различных типов чисел были достаточно расплывчаты, обоснование операций, производимых над буквами $a$, $b$ и $c$ в общем виде, заведомо были недостижимой целью. Сам Виет отвергал отрицательные и комплексные числа; поэтому общность, которой он достиг в *logistica speciosa*, была довольно ограниченной.

Ход мысли Виета непостижим, если даже не иррационален. С одной стороны, Виет внес весьма существенный вклад, введя буквенные коэффициенты, и полностью сознавал важность этого шага, открывшего возможность получать общие доказательства. Вместе с тем Виет не признавал отрицательных чисел и отказывался придавать отрицательные значения буквенным коэффициентам – поистине и лучшие умы человечества могут страдать ограниченностью! Между тем правила действий над отрицательными числами существовали уже порядка 800 лет и всегда приводили к правильным результатам. Виет не мог игнорировать эти правила, которыми исчерпывалось почти всё, чем располагала в его время алгебра. Но отрицательным числам недоставало наглядности и физического смысла, которыми обладали положительные числа. Лишь в 1657 г. Иоганн Худде (1633–1704) расширил область допустимых значений буквенных коэффициентов так, что она стала охватывать как отрицательные, так и положительные числа. Впоследствии его примеру последовало большинство математиков.

Во времена Виета (в конце XVI в.) алгебра была лишь скромным придатком геометрии. Алгебраисты занимались решением либо одного уравнения с одним неизвестным, либо решением двух уравнений с двумя неизвестными – задачи такого рода возникали в связи с практическими проблемами геометрии или торговли. Могущество алгебры оставалось скрытым вплоть до XVII в. Решающий шаг был сделан Рене Декартом и Пьером де Ферма, создавшими аналитическую геометрию (которую следовало бы называть алгебраической геометрией, если бы ныне этот термин не приобрел совсем другого смысла)[185]. Основная идея новой науки состояла в том, что если на плоскости задать систему координат, то каждой кривой можно сопоставить ее уравнение. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 25$ соответствует окружности радиуса 5 с центром в начале координат. Использование уравнений позволяет доказывать всевозможные свойства кривой гораздо проще, чем чисто геометрические (или синтетические) методы античных математиков.

Но в 1637 г., когда Декарт опубликовал свою «Геометрию», ни он сам, ни Ферма в работе 1629 г. (опубликованной посмертно) не были подготовлены к тому, чтобы принять отрицательные числа. Им обоим была ясна идея алгебраического подхода к геометрии, но ни тот, ни другой еще не представляли, сколь широки возможности такого подхода. Отрицательные числа были введены в аналитическую геометрию потомками Декарта и Ферма, и она стала играть весьма важную роль в главных событиях, происходивших в математическом анализе и в геометрии.

Представление функций алгебраическими формулами было вторым новшеством, выдвинувшим алгебру на первый план. Как известно (гл. II), идею описания движений с помощью формул выдвинул Галилей. Так, тело, брошенное вверх со скоростью 30 м/с, через $t$ с будет находиться над поверхностью Земли на высоте $h$, определяемой формулой $h = 30t - 4{,}9t^2$ м. Из этой формулы с помощью чисто алгебраических средств можно извлечь неисчерпаемое количество сведений о движении: например, установить максимальную высоту подъема; время, необходимое для подъема на максимальную высоту; время, необходимое для падения с максимальной высоты на землю. Вскоре математики сознали могущество алгебры, которая заняла господствующее положение в математике, оттеснив геометрию на второй план.

Безграничное применение алгебры вызвало множество протестов. Философ Томас Гоббс был в математике величиной далеко не первого порядка, тем не менее именно он выразил мнение многих математиков, выступив с протестом против «несметного полчища тех, кто применяет алгебру к геометрии»; Гоббс утверждал, что алгебраисты ошибочно подменяют геометрию символами, и отозвался о книге Джона Валлиса по аналитической геометрии конических сечений как о «гнусной книге», покрытой «паршой символов». Против применения алгебры выступали многие видные математики, в том числе Блез Паскаль и Исаак Барроу; при этом они ссылались на то, что алгебра логически не обоснована, и по той же причине настаивали на чисто геометрических методах и доказательствах. Кое-кто из математиков полагал, будто отступление

---

[185] **Яглом:** Впрочем, многие современные математики, скажем Жан Дьедонне (род. в 1906 г.), возражают и против традиционного употребления термина *аналитическая геометрия*, придавая ему смысл, логически вытекающий из современного понимания термина *алгебраическая геометрия* (алгебраическая и аналитическая геометрия по Дьедонне – это учение об алгебраических, соответственно аналитических многообразиях в многомерном пространстве); поэтому созданную Декартом и Ферма область математики следовало бы, пожалуй, называть *координатной геометрией*.

на позиции геометрии позволит логически обосновать алгебру (как мы уже отмечали, подобная позиция была ошибочной).

Но большинство математиков свободно применяли алгебру в чисто утилитарных целях. Ценность алгебры состояла в том, что она равно хорошо (как и геометрия) позволяла решать все те задачи, с которыми сталкивались математики, а превосходство алгебры даже при рассмотрении чисто геометрических проблем было столь очевидно, что математики бесстрашно погрузились в ее воды.

В отличие от Декарта, считавшего алгебру служанкой геометрии, Джон Валлис и Ньютон полностью сознавали силу алгебраических методов. И всё же математики весьма неохотно отказались от геометрических подходов. По свидетельству Генри Пембертона, выпустившего третье издание ньютоновских «Начал», Ньютон не только постоянно выражал свое восхищение древнегреческой геометрией, но и сетовал на себя за то, что не следовал примеру античных математиков в большей мере. В письме к Дэвиду Грегори (1661–1708), племяннику Джеймса Грегори (1638–1675), Ньютон заметил: «Алгебра – это анализ для неумех в математике». Но в своей «Всеобщей арифметике» (1707) он приложил максимум усилий, чтобы убедительно показать превосходство алгебры. Арифметику и алгебру Ньютон излагал как основу математики, обращаясь к геометрии лишь в тех случаях, когда ему требовалось доказать то или иное утверждение. Тем не менее, в целом «Всеобщая арифметика» была не более чем набором правил. Утверждения о числах или алгебраических методах лишь изредка подкреплялись доказательствами или интуитивными соображениями. По мнению Ньютона, буквы в алгебраических выражениях означают числа, а в достоверности арифметики никто не может усомниться.

Лейбниц также отметил всё возрастающую главенствующую роль алгебры и по достоинству оценил эффективность алгебраических методов. По поводу замечаний некоторых математиков о том, что алгебраические утверждения не подкреплены доказательствами, Лейбниц счел нужным заявить: «Геометрам нередко удается несколькими словами выразить то, что требует громоздких рассуждений в анализе... применимость алгебры не вызывает сомнений, но с доказательностью у нее не всё благополучно». Работу в современной ему алгебре Лейбниц назвал «смесью удачи и счастливого случая». Однако Леонард Эйлер в своем «Введении в анализ бесконечно малых» (1748) открыто и безоговорочно провозгласил превосходство алгебры над геометрическими методами греков. К середине XVIII в. сдержанное отношение к применению алгебры было окончательно преодолено. К тому времени алгебра напоминала раскидистое дерево с множеством ветвей, но почти полностью лишенное корней.

Развитие числовых систем и алгебры разительно отличается от развития геометрии. К III в. до н.э. геометрия имела уже дедуктивный характер. Немногие обнаружившиеся в ней пробелы и изъяны, как мы увидим в дальнейшем, оказались легко поправимыми. Что же касается арифметики и алгебры, то они никогда не были логически обоснованы. Казалось бы, отсутствие логического обоснования должно вызывать тревогу у всех математиков. Как могли европейцы, до тонкости изучившие дедуктивную геометрию греков, принять и применять различные типы чисел и алгебру, никогда не имевшие логического обоснования?

Можно назвать несколько причин. Основой принятия целых чисел и дробей, несомненно, был накопленный опыт. Когда же числовая система пополнилась новыми типами чисел, правила арифметических действий, принятые на эмпирической основе для положительных целых чисел и дробей, были распространены на новые элементы, а в случае затруднений на выручку безотказно приходило геометрическое мышление. Буквенные символы лишь заменяли числа – и поэтому с ними можно было обращаться так же, как с числами. Более сложные алгебраические методы казались обоснованными либо с помощью геометрических соображений типа тех, которые в свое время использовал Кардано, либо – в отдельных частных случаях – с помощью одной лишь индукции. Разумеется, ни тот, ни другой подход не был логически удовлетворительным. Геометрия даже в тех случаях, когда к ней обращались, не позволяла логически обосновать введение отрицательных, иррациональных и комплексных чисел. По очевидным причинам решение уравнения четвертой степени невозможно обосновать геометрически.

Кроме того, сначала, особенно в XVI–XVII вв., алгебру не считали независимой областью математики, которая нуждалась бы в особом логическом обосновании. Алгебру принято было рассматривать как метод анализа геометрических задач. Многие из тех, кто широко использовал алгебру, прежде всего Декарт, считали ее не более чем методом анализа. Название сочинений Кардано «Великое искусство» и Виета «Введение в аналитическое искусство» свидетельствуют о том, что их авторы использовали слово «искусство» в смысле, встречавшемся иногда и в наши дни, – как некую противоположность науке. Название «аналитическая геометрия», закрепившееся за координатной геометрией Декарта, подтверждает отношение к алгебре как к методу анализа. Еще в 1704 г. Эдмонд Галлей в статье, опубликованной в журнале *Philosophical Transactions of the Royal Society*, говорил об алгебре как об аналитическом искусстве. Но аналитическая геометрия Декарта стала, по-видимому, тем решающим доводом, который убедил математиков в могуществе алгебры.

Наконец, нельзя не упомянуть и о том, что использование для обработки результатов научных исследований отрицательных и иррациональных чисел, а также алгебры приводило к превосходному согласию с результатами наблюдений и экспериментов. Какие бы сомнения ни испытывали математики, применяя отрицательные числа в естественнонаучных исследованиях, все сомнения следовало отбросить, как только окончательный результат оказывался физически правильным: ведь математики заботились главным образом о естественнонаучных приложениях – и всё, что доказывало свою полезность на деле, принималось без особого разбора. Запросы естествознания ставились превыше логической обоснованности. Сомнения в правильности алгебры были просто-напросто отметены, подобно тому, как ненасытные промышленники зачастую отметали этические принципы; математики стали применять новую алгебру с радостью и уверенностью в своей правоте. Впоследствии математики шаг за шагом превратили алгебру в независимую науку, охватывающую и числа, и геометрию и позволяющую «доказывать» новые результаты. Так, Валлис утверждал, что алгебраические методы ничуть не менее законны, чем геометрические.

К концу XVII в. математики осознали, что арифметика и алгебра независимы от геометрии. Почему же математики не предприняли попыток логически обосновать и то, и другое? Почему, имея перед собой высокий образец дедуктивного изложения геометрии, воплощенный в «Началах» Евклида, математики не попытались изложить аналогичным образом арифметику и алгебру? Ответ состоит в том, что геометрические понятия, аксиомы и теоремы интуитивно воспринимаются намного легче, чем понятия арифметики и алгебры. Наглядные образы, «картинки» (в случае геометрии – чертежи), облегчают математику понимание той или иной структуры.[186] Понятия же иррационального, отрицательного или комплексного числа отличаются большей тонкостью, и даже «картинки», которые появились здесь позднее, не позволяют прочувствовать логическую организацию самих чисел или буквенных выражений, оперирующих с числами. Проблема поиска логического обоснования числовой системы и алгебры была трудной, гораздо более трудной, чем могли себе представить математики XVII в. В дальнейшем (гл. VIII) нам еще представится случай вернуться к этой проблеме. К счастью, в вопросах логического обоснования арифметики и алгебры математики оказались скорее легковерными и даже наивными, чем излишне педантичными, – к счастью, ибо формализации и логическому обоснованию должен предшествовать период созидания, не стесняемого никакими ограничениями, а величайший период созидания в математике уже приближался.

(Продолжение в {KLINE2})

[186] **В.Э.:** Иными словами, конкретные продукты геометрических объектоконструкторов видимы, а конкретные продукты базопрограмм, порождающих числа, невидимы... Но главная причина «необоснованности» всё-таки состоит в том, что вообще не рассматривали (и, конечно же, – в то время и не могли рассматривать!) мозговые программы для понимания основных объектов математики и далее – для обоснования самой этой науки.

# Оглавление