Дневник

Quod sentimus loquamur,
quod loquimur sentiamus!

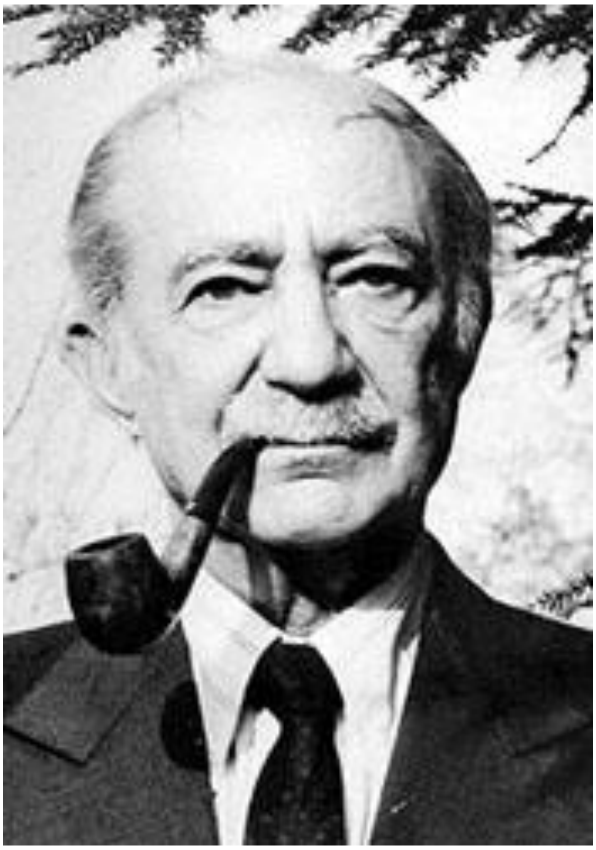
VEcordia

Извлечение R-KLINE2

Открыто: 2009.11.17 21:45
Закрыто: не закрыто
Версия: 2018.07.27 23:10

ISBN 9984-9395-5-3
Дневник «VECORDIA»

ISBN
Моррис Клайн. «Математика» Ч. 2-я



Morris Kline (1908–1992)

Моррис Клайн

Утрата Определенности

Часть II (главы VI–X)
Перевод Ю.А. Данилова
Под ред. И.М. Яглома
С комментариями Валдиса Эгле
Комментирование этой книги не закончено; если Вы хотите читать эти тексты с полными комментариями В.Э., то подождите, пока исчезнет эта красная надпись.

Impositum

Grīziņkalns 2018

Talis hominis fuit oratio,
qualis vita

Предисловие к комментариям 2012 года

1. О ссылках на Веданопедию

Как уже было сказано в предисловиях к книге {KLINE1}, начато комментирование книги Клайна «Математика: утрата определенности» было в 2009 году, а потом прервано на 27 месяцев, и теперь возобновляется в несколько изменившихся условиях. Самое существенное изменение, произошедшее за это время, – это появление Веданопедии на сайте VE-POTI. Раньше всякое комментирование каких-нибудь книг (например, Пенроуза: {PENRO1}, ...), выполненное в духе Веданской теории, вынуждено было в той или иной мере повторять вводную часть этой теории, так как ее нельзя было считать достаточно общеизвестной.

Существование Веданопедии (хотя и в настоящее время всего лишь находящейся в стадии разработки) позволяет считать эту проблему решенной: Веданская теория впредь полагается полностью изложенной в Веданопедии, и при комментировании таких книг, как эта, отныне считается общеизвестной, а ее термины в комментариях подкрепляются ссылками гипертекста на Веданопедию. Эти ссылки и есть главное новшество, появляющееся сейчас впервые в книгах Векордии.

Здесь, однако, надо оговорить некоторые нюансы. С момента основания Векордии (в 2006 году) в ней действовала система связок гипертекстов между ее томами. Эта система связывает между собой DOC файлы Векордии и не зависит ни от каких внешних условий: она будет работать до тех пор, пока работает *Word*, поддерживающий такие ссылки.

Теперь, значит, наряду с этой прежней системой связок гипертекста появляется и вторая – новая: ссылки на Веданопедию. Но эта вторая система ссылок уже не является независимой от внешних условий: она зависима от определенного интернетовского сайта (VE-POTI). Я сам этот сайт не закрою, но если что-нибудь случится с *Яндексом* (мало ли: какой-нибудь «дефолт») или если *Яндекс* вдруг поменяет свою идеологию поддержки сайтов и файлов и сделает ее столь же глупой, как у *Google*,[1] то вся Веданопедия на VE-POTI рухнет, и в этом издании книг Клайна ссылки «повиснут в воздухе».

Как опытный разработчик компьютерных систем я всю жизнь старался максимально избегать зависимости от внешних факторов и по возможности не делать никаких трудоёмких разработок, зависящих от определенного сервиса (сайта). Веданопедия на VE-POTI представляет собой отступление от этого правила: ее организация казалась настолько эффективной, что я решил все-таки рискнуть. Но я прекрасно отдаю себе отчет в том, что рискую, и ссылки из комментариев настоящих книг на Веданопедию есть продолжение этого риска.

Но по крайней мере не думайте, что я не осознаю этот риск. Всё же, если *Яндекс* не рухнет и не изменит своей идеологии, то риск оправдается, и у нас в руках будет эффективное средство, как связать комментарии этих книг с Веданопедией. Это я счел нужным оговорить, прежде чем пускать в дело эту новую систему ссылок.

Валдис Эгле

4 марта 2012 года

---

[1] Во всех сервисах *Google*, действует следующая идеология: если на сервис занести файл (например, R-KLINE2.PDF), то ему присваивается (самой системой) определенный URL; если же в файле исправить одну запятую и записать его заново, то система присвоит ему ДРУГОЙ (!)URL – и все ссылки на этот файл (в других файлах, на сайтах, у пользователей и т.д.) окажутся НЕДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ! Это настолько вопиющее нарушение самых элементарных принципов проектирования компьютерных систем, настолько непрофессиональное решение проектировщика системы, что оно делает все сервисы *Google* практически негодными к употреблению. Я был вынужден закрыть свой сайт на *Blogspot*-е после того, как его перекупила *Google* и внедрила там свою (до предела низкопробную) идеологию. *Яндекс* пока еще остается на высоте: он при перезаписи файла URL не меняет, поэтому и возможно на нем построение Веданопедии. Но иди-знай: вдруг у них произойдет «смена поколений», настоящие профессионалы будут изгнаны, а на их место придут молодые, столь же глупые, сколь и самонадеянные, и решат ввести «передовые западные технологии», подражая *Google*...

2. О целях комментирования

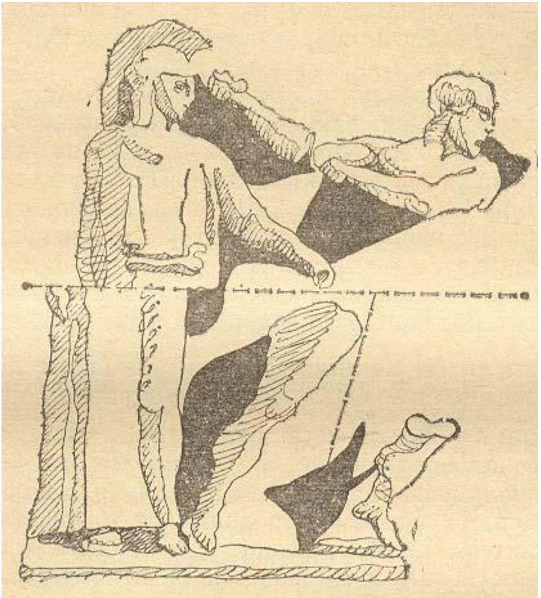
(Будет добавлено)

Математика: Утрата определенности. Главы VI–X

(Часть 2-я; начало см. в {KLINE1})

VI. Нелогичное развитие: в трясине математического анализа

> Начинать исследование можно по-разному. Всё равно начало почти всегда оказывается весьма несовершенной, нередко безуспешной попыткой. Есть истины, как страны, наиболее удобный путь к которым становится известным лишь после того, как мы испробуем все пути. Кому-то приходится, рискуя собой, сходить с проторенной дороги, чтобы указать другим правильный путь... На пути к истине мы почти всегда обречены совершать ошибки.
>
> *Дени Дидро*



Математический анализ, ядро которого составляет дифференциальное и интегральное исчисление – самая тонкая область всей математики, – был построен на совсем не существующих логических основаниях арифметики и алгебры и на не вполне ясных основах евклидовой геометрии. Если вспомнить о замеченных нами недостатках в сравнительно простых разделах математики, то нетрудно представить себе, какого напряжения сил и способностей потребовало от математиков создание основной системы понятий и логической структуры дифференциального и интегрального исчисления. Именно так и обстояло дело в действительности.

В основе математического анализа лежит понятие функции. Не стремясь к особой строгости, функцию можно описать как зависимость между переменными. Поясним это на простом примере. Если, скажем, с крыши дома бросить мяч, то и расстояние, проходимое им в процессе падения, и время падения будут возрастать. Расстояние и время – переменные, а функция, связывающая расстояние и время (если пренебречь сопротивлением воздуха), определяется формулой $d = 4{,}9t^2$, где t – время падения (в секундах), а d – расстояние (в метрах), пройденное мячом за время t с момента падения.[2]

---

[2] **В.Э.:** Все эти слова раскрывают понятие функции лишь с характерной для математики неточностью. Поскольку понятие функции действительно чрезвычайно важно, то давайте разберемся в нем более точно, как это принято в Веданской теории, – и сделаем это на примере, только что приведенном Клайном. Чтобы быть точными и не путаться «в трех соснах», мы в первую очередь должны строго различать три вещи. **Первая вещь** – это процесс, протекающий в физическом мире (падение мяча с крыши). **Вторая вещь** – это измерение этого процесса. Измерение проводится субъектом; при измерении он вводит Меру (одно множество или «величина») и сравнивает ее с Измеряемым (другим множеством или «величиной»); при сравнении он классифицирует это соотношение как принадлежащее тому или иному таксону (т.е. числу). Измерение есть процесс, но другой процесс, не совпадающий с процессом первой вещи (с падением мяча). Процесс измерения осуществляется субъектом; для этого ему нужны программы и

Происхождение любой важной идеи всегда можно проследить, углубляясь в историю на десятилетия, если не на века. В полной мере это относится и к понятию функции. Тем не менее явный смысл понятие функции обрело лишь в XVII в. Мы не будем здесь вникать в подробности этого процесса. Для нас гораздо важнее другое: хотя понятие функции весьма «прямолинейно» и, казалось бы, не таит в себе никаких «подводных камней», но даже и простейшие функции охватывают все типы вещественных чисел.[3] Так, в приведенном нами примере мы могли бы поинтересоваться значением d при $t = \sqrt{2}$. Точно так же можно было бы спросить, чему равно t, когда d равно, скажем, 50: при $d = 50$, как нетрудно видеть, $t = \sqrt{(50/4{,}9)}$, т.е. принимает **иррациональное** значение. Но, как мы уже отмечали, в XVII в. понятие иррационального числа еще не получило должного истолкования. Следовательно, едва зародившейся теории функций явно недоставало логических обоснований, как не было их и у арифметики. Однако, поскольку к середине XVII в. математики привыкли свободно обращаться с иррациональными числами, на отсутствие таких обоснований никто не обращал внимания.

Две проблемы привлекали к себе внимание величайших математиков XVII в., наиболее известными среди которых были Кеплер (1571–1630), Декарт (1596–1650), Бонавентура Кавальери (1598–1647), Ферма (1601–1665), Блез Паскаль (1623–1662), Джеймс Грегори (1638–1675), Жиль Персон, называвший себя де Робервалем[4] (1602–1675), Христиан Гюйгенс (1629–1695), Исаак Барроу (1630–1677), Джон Валлис (1616–1703) и, конечно же, Исаак Ньютон (1643–1727) и Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716). Каждый из этих ученых по-своему подошел к проблемам определения и вычисления производной и определенного интеграла. Одни из творцов дифференциального и интегрального исчисления рассуждали чисто геометрически, другие – чисто алгебраически, третьи использовали смешанный алгебро-геометрический подход. Нас будет интересовать, насколько создателям новых методов исчисления удалось приблизиться к образцам математической строгости. Для этого достаточно обратиться к нескольким наиболее типичным примерам, поскольку многие из предложенных методов были очень ограниченными и особого упоминания не заслуживают.

Природу производной легче всего понять, если представить ее как **скорость** (именно так поступил Ньютон). Если тело преодолевает расстояние 20 м за 4 с, то его средняя скорость равна 5 м/с, а если тело движется равномерно, то его средняя скорость на протяжении 4 с совпадает с мгновенной, т.е. со скоростью в любой данный момент. Однако движения чаще всего неравномерны. Тело, падающее на Землю, снаряд, вылетевший из пушки, планета, обращаю-

---

алгоритмы (субъект, как и всякий компьютер, вообще ничего не может сделать без программы); эти алгоритмы и программы измерения оперируют множествами (физическими «величинами») и называются первичными (алгоритмами, программами, действиями). **Третья вещь** – это алгоритмы (программы) оперирования с цифрами (вычисления). Деятельность субъекта не ограничивается одним лишь измерением (физических величин); после этого он начинает вычислять, и действия его при вычислениях (например, с карандашом в руке) совершенно другие, нежели при измерении и, следовательно, выполняются другими программами по другим алгоритмам, и эти другие программы мы называем вторичными. Что же теперь такое **функция**? Учитывая только что сказанное, мы теперь в клайновском примере видим две различные зависимости. Одна – это зависимость между множествами (физическими величинами) при измерении: если мы будем измерять время и пройденный мячом путь от начала падения, то увидим некоторое соответствие между этими множествами при различных измерениях. Это функция в первичной области или «первичная функция». Вторая – это зависимость между результатами вычислений: если мы будем подменять во вторичных операциях одни цифры другими, то увидим зависимость между этими исходными цифрами и результирующими цифрами. Это функция во вторичной области или «вторичная функция». Если мы установили соответствия между первичной функцией и вторичной функцией, то можем заменять измерение соответствующим вычислением и по результату вторичной функции узнать (ожидаемый) результат первичной функции (даже не проделав собственно измерение). Это будет называться в быту «применением математики в физике». Но в принципе мы можем придумать какие-то (вторичные) алгоритмы вычислений и не зная, каким именно измерениям они могут соответствовать в первичной области, и соответствуют ли они вообще каким-то измерениям в первичной области. Тогда это будет называться в быту «чистой математикой». И в дальнейшем мы должны если не всегда оговаривать, то по крайней мере видеть и понимать разницу между этими двумя областями, между первичной функцией (измерений множеств) и вторичной функцией (вычислений при помощи цифр).

[3] **В.Э.:** Здесь, разумеется, речь о вторичных функциях. В области первичных функций мы никогда не получим иррациональных чисел (хотя бы потому, что не можем проводить измерения с бесконечной точностью).

[4] **Яглом:** Недворянин Жиль Персон называл себя «де Роберваль» по названию деревни, из которой он был родом, и вошел в историю науки именно под последним именем.

щаяся вокруг Солнца, – все движутся неравномерно: их скорость непрерывно меняется. Во многих случаях необходимо знать значения скорости движения в **разные моменты времени**. Например, жизненно важно знать, с какой скоростью пуля долетает до человека: если эта скорость близка к 0 м/с, то на землю упадет пуля, тогда как при скорости порядка 300 м/с на землю падает человек. По самому своему смыслу момент времени есть не что иное, как «нулевой промежуток» времени, а за нулевое время тело, разумеется, проходит равное нулю расстояние. Следовательно, если бы мы решили вычислять мгновенную скорость так, как вычисляют среднюю скорость, т.е. деля пройденное расстояние на требующееся для его прохождения время, то получили бы выражение 0/0, а такое отношение смысла не имеет.

Выход из создавшегося затруднения, который промелькнул в сознании математиков XVII в., но не был уяснен ими до конца, состоит в следующем. Предположим, что требуется вычислить скорость, которую приобретает свободно падающее тело ровно через 4 с после начала падения. Выбрав любой конечный промежуток времени (в отличие от нулевого промежутка – моментa времени), в течение которого тело падает, и разделив на него расстояние, пройденное телом за это время, мы получим среднюю скорость за выбранный промежуток времени. Вычислим теперь среднюю скорость за промежутки времени, следующие за 4-й секундой и имеющие продолжительность ½, ¼, ⅛, ... с. Ясно, что, чем меньше промежуток времени, тем ближе средняя скорость к мгновенной скорости тела через 4 с после начала падения. По-видимому, нам остается лишь вычислить средние скорости и посмотреть, к какой величине они стремятся. Эта величина и определяет мгновенную скорость, которой тело достигает к концу 4-й секунды свободного падения. Предложенная схема кажется достаточно разумной, хотя и таит в себе, как мы увидим в дальнейшем, некоторые сложности. Как бы то ни было, скорость к концу 4-й секунды свободного падения, если она вычислима, называется производной функции $d = 4{,}9t^2$ при $t = 4$.[5]

Трудности, связанные с определением производной, станут более понятными, если от словесного описания производной перейти на язык символов. Математическое определение

[5] **В.Э.:** Понятие производной ясно каждому, кто изучал математический анализ в высшей школе и успешно сдавал экзамены по высшей математике. Но теперь взглянем на всё это с точки зрения Веданской теории и подумаем, какие мозговые программы здесь задействованы. Во-первых, мы имеем программу A_1, проводящую (в первичной области) одно конкретное измерение физических величин (множеств) t и d и определяющую их числовые значения (т.е. относящую их соотношения к своим Мерам к тому или иному таксону классификации – числу); и мы имеем программу A_2, проводящую (во вторичной области) вычисления (операции над цифрами) по формуле (алгоритму) $d = 4{,}9t^2$. Далее, во-вторых, мы имеем в первичной области программу B_1, которая вызывает программу A_1 в качестве своей подпрограммы, заставляя ее проводить всё более и более близкие измерения в районе конца 4-й секунды падения; и мы имеем во вторичной области программу B_2, которая вызывает программу A_2 в качестве своей подпрограммы, заставляя ее проводить всё более и более близкие вычисления в районе $t = 4$, всё более и более близкие значения t. Как действия программы B_1, так и действия программы B_2, представляют собой два процесса, один из которых происходит (или может происходить) в первичной области, а второй – во вторичной области. Далее, в-третьих, имеется программа C_1, которая определяет в первичной области среднюю скорость падения, взяв в качестве Меры h, а в качестве Измеряемого k (в обозначениях Клайна; это разницы измерений между двумя вызовами программой B_1 программы A_1; величины h и k имеют различную природу – одна из них время, другая путь, – но после того, как они классифицированы и попали каждая в свой таксон, вместо них можно рассматривать отвлеченные множества, для которых важно лишь количество элементов, а не размерность, и проводить измерения соотношений на этой основе. Соответственно во вторичной области мы имеем программу C_2, которая (оперируя с цифрами по правилам арифметики) определяет соотношение k/h. Программы C_1 и C_2 тоже вызываются программами B_1 и B_2 соответственно в качестве их подпрограмм после выполнения соответственно A_1 и A_2. В процессе, определяемом алгоритмами B_1 и B_2, выходы C_1 и C_2 будут давать две последовательности результатов: одну в первичной области (физических величин), другую во вторичной области (цифр). Обе эти последовательности потенциально бесконечны, как потенциально бесконечны сами процессы B_1 и B_2. Теперь остался только один шаг: иметь программы D_1 и D_2, которые будут делать бокоанализ программ соответственно B_1 и B_2 и строить потенциальные продукты «конечного» результата программ C_1 и C_2. Первый потенциальный продукт будет «мгновенной скоростью» падающего мяча через 4 секунды после начала падения, а второй потенциальный продукт будет «производной функции $d = 4{,}9t^2$ при $t = 4$. Это словесное описание может показаться читателю сложным, но на самом деле оно «сложно» лишь из-за словесной формы описания. В действительности ситуация довольно простенькая: здесь было задействовано всего 8 программ, в то время как в любой мало-мальски сложной программной системе программист имеет дело с ТЫСЯЧАМИ процедур и функций.

производной, которое, по существу, и было в конце концов принято, принадлежит Ферма. Вычислим скорость, приобретаемую через 4 с после начала свободного падения мячом, движение которого описывается функцией

$$d = 4{,}9t^2. \tag{1}$$

При $t = 4$ получаем: $d = 4{,}9 \cdot 4^2 = 78{,}4$ м. Пусть h – приращение времени. За время $(t + h)$ с мяч пролетит в свободном падении расстояние 78,4 м плюс некоторое дополнительное расстояние k. Следовательно,

$$78{,}4 + k = 4{,}9\,(4 + h)^2 = 4{,}9\,(16 + 8h + h^2),$$

или

$$78{,}4 + k = 78{,}4 + 39{,}2h + 4{,}9h^2.$$

Вычтем из правой и левой частей последнего равенства по 78,4:

$$k = 39{,}2h + 4{,}9h^2.$$

Итак, средняя скорость за время h с свободного падения равна

$$\frac{k}{h} = \frac{39{,}2h + 4{,}9h^2}{h}. \tag{2}$$

При рассмотрении этой простой функции и других функций Ферма повезло: числитель и знаменатель правой части ему удалось разделить на h, получив

$$k/h = 39{,}2 + h. \tag{3}$$

Затем Ферма положил приращение h равным нулю и получил, что скорость тела через 4 с после начала свободного падения такова:

$$\dot{d} = 39{,}2 \text{ м/с} \tag{4}$$

($\dot{d}$ – обозначение производной, предложенное Ньютоном). Итак, $\dot{d}$ – производная от $d = 4{,}9t^2$ при $t = 4$.

Против предложенного Ферма метода вычисления производной можно возразить, указав, что приращение h должно быть отлично от нуля, ибо выполнение таких операций, как деление числителя и знаменателя на h, возможно только при h, отличном от нуля. Но тогда и равенство (3) справедливо только при h, отличном от нуля. Следовательно, мы не можем полагать в (3) значение h равным нулю и делать из этого предположения какие бы то ни было выводы. Кроме того, в случае такой простой функции, как $d = 4{,}9t^2$, соотношение (2) после сокращения правой части на h переходит в соотношение (3). В случае же более сложных функций нам пришлось бы иметь дело с выражением типа (2). При $h = 0$ правая часть (2), выражающая предельное значение средней скорости k/h, обращается в неопределенность 0/0.

Ферма никогда не занимался обоснованием своего метода, и, хотя он по праву может быть назван одним из создателей математического анализа, ему не удалось продвинуться здесь особенно далеко. Он был достаточно осторожен, чтобы пытаться формулировать общие теоремы, если сознавал, что какая-либо идея не обоснована им полностью.[6] Ферма довольствовался тем, что предложил правильный алгоритм, которому смог дать геометрическую интерпретацию, и надеялся, что когда-нибудь удастся найти полное геометрическое обоснование предложенного им метода.

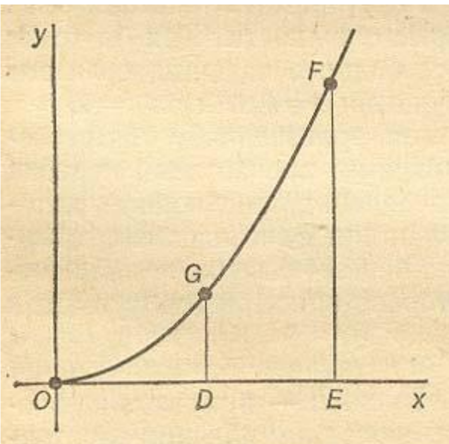


Рис. 6.1. Криволинейная трапеция *DEFG*

Второе понятие математического анализа, доставившее немало хлопот его создателям, – (определенный) интеграл – встречается, например, при вычислении площадей фигур, ограниченных целиком или частично **кривыми** линиями, объемом тел, ограниченных **изогнутыми** поверхностями (не плоскостями!), а также центров тяжести тел различной формы. Чтобы понять, какого рода трудности встречаются при использовании понятия определенного интеграла, рассмотрим вычисление площади криволинейной трапеции.

[6] **Яглом:** Идущее от Ферма понятие *дифференциала* функции, равно как и утверждение о том, что в точках максимума или минимума функции ее дифференциал (а значит, и производная) обращается в нуль (это утверждение сегодня часто называют *теоремой Ферма*), были даны им лишь для конкретных примеров функций.

Предположим, требуется найти площадь криволинейной трапеции *DEFG* (рис, 6.1), ограниченной дугой *FG* кривой, задаваемой уравнением $y = x^2$, отрезком *DE* оси *x* и вертикальными отрезками *DG* и *EF*. В этом случае, как и при вычислении производной, мы хотим найти интересующую нас величину методом всё более точных последовательных приближений. Нечто подобное предприняли математики XVII в. Разобьем отрезок *DE* на три равные части (каждая длиной *h*) и обозначим точки разбиения через D_1, D_2 и D_3 (точка D_3 совпадает с точкой *E*, рис. 6.2). Пусть y_1, y_2 и y_3 – ординаты в точках разбиения. Тогда y_1h, y_2h и y_3h – площади трех прямоугольников, изображенных на рис. 6.2, а

$$y_1h + y_2h + y_3h \tag{5}$$

– сумма площадей этих трех прямоугольников, являющаяся некоторым приближением к площади *DEFG*.

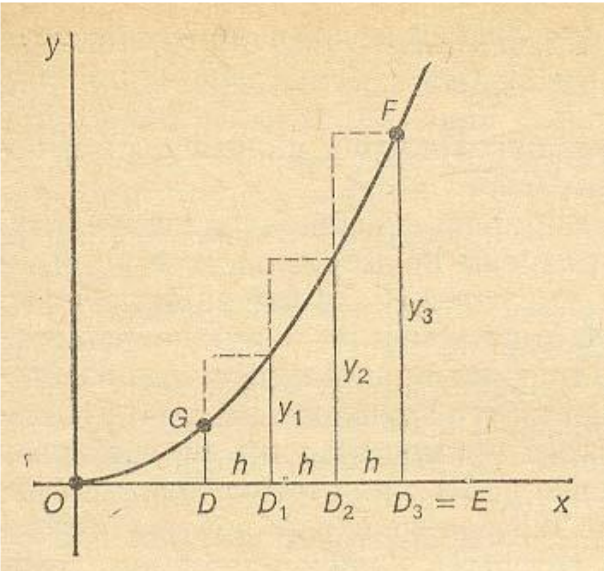


Рис. 6.2. Вычисление площади криволинейной трапеции (основание *DE* разбито на 3 части)

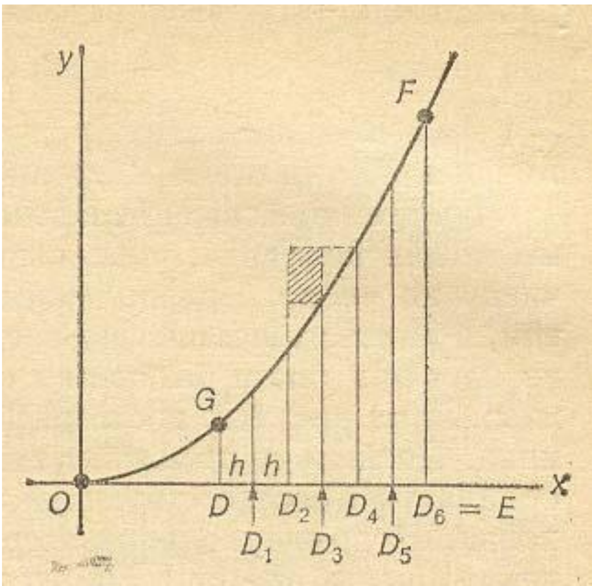


Рис. 6.3. Вычисление площади криволинейной трапеции *DEFG* (основание *DE* разбито на 6 частей)

Лучшее приближение к площади криволинейной трапеции *DEFG* мы можем получить, уменьшая размеры прямоугольников и увеличивая их число. Предположим, что отрезок DE мы разбили не на три, а на шесть частей. На рис. 6.3, в частности, показано, что произойдет при таком разбиении со средним прямоугольником, изображенным на рис. 6.2: после разбиения его заменяют **два** прямоугольника. Поскольку за высоту каждого прямоугольника мы выбираем ординату у в соответствующей точке разбиения отрезка *DE*, заштрихованный прямоугольник на рис. 6.3 уже не входите сумму площадей тех шести прямоугольников, которыми аппроксимируется теперь площадь криволинейной трапеции *DEFG*. Следовательно, сумма

$$y_1h + y_2h + y_3h + y_4h + y_5h + y_6h \tag{6}$$

(где новое *h* в два раза меньше прежнего) дает более точное приближение к площади трапеции *DEFG*, чем сумма (5).

Относительно применяемого нами метода последовательных приближений можно в общем сказать следующее. Разделив отрезок *DE* на *n* частей, мы получили бы *n* прямоугольников, каждый шириной *h*. Пусть y_1, y_2, ..., y_n – ординаты в точках разбиения (многоточие означает, что включены **все** ординаты *y* в точках разбиения). Сумма площадей *n* прямоугольников равна

$$y_1h + y_2h + y_3h + ... + y_nh \tag{7}$$

(и на этот раз многоточие означает, что в сумму входят **все** промежуточные прямоугольники). Мы уже говорили о том, как влияет на точность приближения разбиение отрезка *DE* на всё более мелкие части. Следовательно, приближенное значение площади криволинейной трапеции *DEFG*, задаваемое суммой (7), с увеличением *n* становится все более точным. Но по мере возрастания *n* убывает *h*, поскольку $h = DE/n$. Итак, мы установили, что фигуры, ограниченные отрезками прямых (в нашем случае – прямоугольниками), позволяют добиться всё более точного приближенного вычисления площади фигуры, ограниченной кривой.

Интуитивно ясно, что, чем больше число прямоугольников, тем точнее сумма их площадей аппроксимирует площадь криволинейной фигуры. Но если остановиться на 50 или на 100 прямоугольниках, то сумма их площадей еще не будет в точности равна площади аппроксимируемой фигуры, и математикам XVII в., придумавшим этот подход к вычислению площадей, пришло в голову устремить n к бесконечности. Правда, в то время еще не было вполне ясно, что такое бесконечность. Можно ли считать бесконечность числом, и если да, то как производить арифметические действия над этим числом? Получив выражения (7) для суммы площадей n прямоугольников и обнаружив в них члены вида $1/n$ и $1/n^2$, Ферма отбросил их на том основании, что, когда n обращается в бесконечность, эти члены пренебрежимо малы. Как и при выводе производной, Ферма полагал, что строго его идею удастся доказать скорее всего с помощью метода исчерпывания, введенного Евдоксом (довольно ограниченный и весьма непростой геометрический метод, которым искусно пользовался Архимед).

Из ранних попыток вычисления площадей и объемов с помощью определенного интеграла работа Бонавентуры Кавальери заслуживает внимания по двум причинам: во-первых, она оказала большое влияние на современников Кавальери и на математиков последующих поколений и, во-вторых, довольно точно отражала типичные особенности характерного для того времени математического мышления, которое сегодня можно было бы назвать довольно смутным. Кавальери считал, что площадь фигуры, которая выглядит примерно так, как показано на рис. 6.1, состоит из бесконечно большого числа элементов; эти элементы он называл неделимыми. Вполне возможно, что неделимыми могли быть отрезки прямых. У самого Кавальери не было ясности относительно того, что именно представляют собой его неделимые. Он лишь утверждал, что если площадь фигуры разбивать на всё меньшие и меньшие прямоугольники, как показано на рис. 6.3, то в конечном итоге получатся неделимые. В одной из своих книг, «Шесть геометрических упражнений» (*Exercitationes geometricae sex*, 1647), Кавальери «объяснил», что рассматриваемая фигура состоит из неделимых, как, например, ожерелье – из бусин, ткань – из нитей и книга – из страниц. Руководствуясь столь неясным понятием, Кавальери тем не менее научился сравнивать две площади или два объема и получать правильные соотношения между двумя сравниваемыми величинами [38][7].

Критиков Кавальери его объяснения не удовлетворяли. Один из современников Кавальери, Пауль Гульдин (1557–1643), обвинил его в том, что он преднамеренно суживает рамки греческой геометрии, вместо того, чтобы понять ее. А один из современных нам историков науки заявил, что если бы существовал особый приз за неясность, то названная работа Кавальери была бы тут вне всякой конкуренции и, безусловно, заслужила бы такую награду. Не имея возможности объяснить, как из бесконечного числа элементов (неделимых) можно составить фигуру конечной протяженности, Кавальери пытался уйти от ответа на вопрос, отказываясь дать сколько-нибудь точную интерпретацию неделимых. Иногда он в довольно туманных выражениях говорил о бесконечной сумме линий, не объясняя явно природу бесконечности. В других случаях Кавальери называл свой метод не более чем прагматическим приемом, позволяющим заменить сложный метод исчерпывания, применявшийся древними греками. По свидетельству Кеплера, приведенному в его сочинении «Новая стереометрия винных бочек» (*Stereometria doliorum vinariorum,* 1616) [39][8], Кавальери ссылался на современных ему геометров, обращавшихся с понятиями еще более свободно, чем он сам. Эти геометры, говорил он, вычисляя площади, подражают методу Архимеда, но им не удается найти тех полных доказательств, которые позволяли великому греку придать своим работам необходимую строгость. Тем не менее геометры, о которых шла речь, были довольны своими вычислениями, поскольку те приводили к полезным результатам. Встав, по существу, на ту же точку зрения, Кавальери счел, что и предложенный им метод неделимых может приводить к новым открытиям; однако, пользуясь этим методом, отнюдь не обязательно полагать, будто геометрическая фигура в самом деле состоит из бесконечно большого числа «неделимых» элементов. Метод предназначен лишь для того, чтобы установить правильные соотношения между площадями или между объемами, а эти соотношения сохраняют свою ценность и значение независимо от того, какого мнения придерживается тот или иной геометр относительно элементов, составляющих фигуру. В качестве последнего контрдовода против возражений своих критиков Кавальери указал, что

[7] Кавальери Б. *Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного, с приложением «опыта IV» о применении неделимых к алгебраическим степеням*. – М.–Л.: Гостехиздат, 1940.

[8] Кеплер И. *Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму, и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии*. – М.–Л.: Гостехиздат, 1935.

концептуальные проблемы относятся к ведению философии и потому несущественны в практической работе с фигурами и телами. О строгости, заметил он, пристало заботиться философии – но не геометрии.

В защиту Кавальери выступил и Паскаль. В своих «Письмах из Деттонвиля» (1658) он утверждал, что геометрия неделимых превосходно согласуется с евклидовой геометрией: «То, что может быть доказано с помощью истинных правил неделимых, может быть также доказано со всей строгостью на манер древних». По мнению Паскаля, геометрия неделимых Кавальери и геометрия древних греков отличаются только терминологией. Метод неделимых, считал Паскаль, должен быть принят каждым математиком, претендующим на то, чтобы считаться, геометром. Но и у Паскаля не было определенного мнения относительно математической строгости. Иногда он утверждал, что, подобно тому, как религия ставит милосердие превыше разума, так и для получения правильных результатов необходима истинная «утонченность», а не логика, присущая геометрии. Парадоксы геометрии, проявившиеся в математическом анализе, Паскаль сравнивал с кажущимися нелепостями христианства и считал, что неделимые значат в геометрии не более чем суд мирской в сравнении с судом божьим.

Согласно Паскалю, необходимые поправки в идеи нередко вносит не разум, а душа (гл. II). В своих «Мыслях» он говорит: «Мы постигаем истину не только разумом, но и душой. Из последнего источника мы познаем первые принципы, и разум, не принимающий в этом участия, тщетно пытается сражаться с душой... На нашем знании души и инстинкта с необходимостью зиждется разум, и этим знанием он питается». Разумеется, такими рассуждениями Паскаль никак не мог помочь уяснению метода Кавальери.

Наибольший вклад в создание математического анализа внесли Ньютон и Лейбниц. Ньютон почти не занимался понятием интеграла, но интенсивно разрабатывал понятие производной. По существу, предложенный им метод вычисления производной мало чем отличался от метода Ферма. Не было у Ньютона и большей ясности относительно логического обоснования понятия производной. Математическому анализу Ньютон посвятил три работы. Кроме того, он коснулся этого вопроса в наиболее значительном из своих сочинений – «Математических началах натуральной философии», вышедших тремя изданиями. Излагая в первой работе (1669 – см. [140][9]) свой метод вычисления производной, Ньютон заметил, что он его скорее «кратко объяснил, чем строго доказал». При вычислении производной Ньютон воспользовался тем, что h и k – неделимые. Во второй работе (1671) Ньютон замахнулся на большее: он заявил, что изменил свою точку зрения на переменные и считает теперь необходимым рассматривать их не как дискретные, а как непрерывно изменяющиеся величины (в случае дискретных переменных величины h в конечном счете вырождаются в неделимые). Ньютон утверждал, что ему удалось избавиться от чрезмерной жесткости теории неделимых, которую он применил в первой работе. Однако внесенные Ньютоном изменения, по существу, никак не сказались на ходе вычисления производной, или, как предпочитал ее называть сам Ньютон, флюксии. И с логикой во второй работе дело обстояло ничуть не лучше, чем в первой.

В своей третьей работе по математическому анализу – «Рассуждения о квадратуре кривых» (1676) – Ньютон еще раз заявил, что отказывается от бесконечно малых величин (в конечном счете неделимых), и критически отозвался об отбрасывании членов в соотношении (3), содержащих множитель h, поскольку «в математике не следует пренебрегать даже самыми малыми ошибками». После этих предварительных замечаний Ньютон дал новое объяснение понятия «флюксия»: «Флюксии, когда приращения флюэнт [переменных] возникают во всё большем числе, отличаются сколь угодно мало и сами сколь угодно малы, и если говорить точно, то они пропорциональны возникающим приращениям...». Разумеется, пользы от столь смутных объяснений было немного. Что же касается метода вычисления флюксией, то с логической точки зрения третья работа Ньютона была столь же малообоснованной, как и первая. Производную Ньютон вычислял, отбросив все члены в (2), содержавшие h в степени выше первой, например члены с h^2.

Несколько утверждений относительно флюксий Ньютон высказал в своем главном труде «Математические начала натуральной философии» (1-е изд., 1687). От неделимых в пределе величин он отказался в пользу «исчезающе делимых величин», т.е. величин бесконечно делимых. В первом и в третьем изданиях «Начал» Ньютон утверждал:

[9] Ньютон И. Математические работы. – М.–Л.: ОНТИ, 1934.

> Предельные отношения исчезающих количеств не суть отношения пределов этих количеств, а суть те пределы, к которым при бесконечном убывании количеств приближаются отношения их и к которым эти отношения могут подойти ближе, нежели на любую наперед заданную разность, но которых превзойти или достигнуть на самом деле не могут, ранее чем эти количества уменьшатся бесконечно. ([20][10], с. 70.)

Хотя приведенный нами отрывок не отличается особой ясностью, это наиболее ясное из всех утверждений Ньютона о флюксиях. Именно здесь Ньютон употребил ключевое слово «пределы» (его терминология была иной), хотя и не стал углубляться в анализ этого понятия.

Ньютон, несомненно, сознавал неудовлетворительность предложенного им объяснения флюксии и, должно быть, с отчаяния обратился к ее физическому смыслу. Вот что говорится об этом в «Началах».

> Делают возражение, что для исчезающих количеств не существует «предельного отношения», ибо то отношение, которое они имеют ранее исчезания, не есть предельное, после же исчеззния нет никакого отношения. Но при таком и столь же натянутом рассуждении окажется, что у тела, достигающего какого-либо места, где движение прекращается, не может быть «предельной» скорости, ибо та скорость, которую тело имеет ранее, нежели оно достигло этого места, не есть «предельная», когда же достигло, то нет скорости. Ответ простой: под «предельною» скоростью надо разуметь ту, с которою тело движется не перед тем, как достигнуть крайнего места, где движение прекращается, и не после того, а когда достигает, т.е. именно ту скорость, обладая которой тело достигает крайнего места и при которой движение прекращается. Подобно этому, под предельным отношением исчезающих количеств должно быть разумеемо отношение количеств не перед тем, как они исчезают, и не после того, но при котором исчезают. ([20][11], с. 69.)

Поскольку результаты его математических исследований были физически вполне осмысленными, Ньютон не уделял особого внимания логическому обоснованию математического анализа. В «Началах» он пользовался геометрическими методами и приводил теоремы о пределах в их геометрической формулировке. Позднее Ньютон признал, что при выводе теорем в «Началах» он прибегал к математическому анализу, он формулировал их геометрически, чтобы придать своим рассуждениям ту степень достоверности, которой отличались доказательства древних. Разумеется, его геометрические доказательства отнюдь не были строгими. Ньютон слепо верил в непогрешимость евклидовой геометрии, но ничто не свидетельствовало о том, что евклидова геометрия могла хоть в какой-то мере помочь в обосновании математического анализа.

Несколько иной подход к математическому анализу предложил Лейбниц (см. [141][12]). По его мнению, величины, обозначенные нами h и k (Лейбниц обозначал их символами dx и dy), убывая, достигают «исчезающе малых», или «бесконечно малых», значений. На этой стадии h и k отличны от нуля, но меньше любого заданного числа. Следовательно, любыми степенями h, например h^2 или h^3, заведомо можно пренебречь. Получающееся при этом отношение h/k и есть та самая величина, которую требовалось найти, т.е. производная, которую Лейбниц обозначил dy/dx.

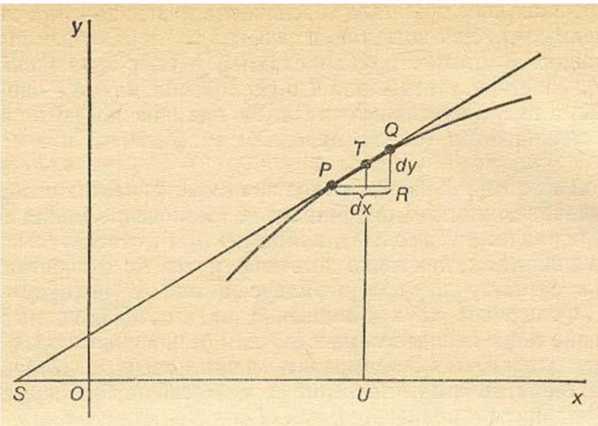


Рис. 6.4. Характеристический треугольник *PQR*

Геометрический смысл величин h и k по Лейбницу заключался в следующем. Пусть P и Q – «бесконечно близкие» точки на кривой. Тогда dx – разность их абсцисс, а dy – разность их ординат (рис. 6.4). Кроме того, касательная к кривой в точке T совпадает с дутой PQ. Следовательно, отношение dy/dx задает угол наклона касательной. Треугольник PQR, называемый

---

[10] Ньютон И. *Математические начала натуральной философии*. Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т.7. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

[11] Ньютон И. *Математические начала натуральной философии*. Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т.7. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

[12] Лейбниц Г.В. Избранные отрывки из математических сочинений. – УФН. 1948, т.3, вып. 1(23), с. 165–204.

характеристическим, не являлся изобретением Лейбница: им пользовались Паскаль и Барроу, труды которых были известны Лейбницу. Лейбниц считал, что треугольник *PQR* подобен треугольнику *STU*, – и пользовался этим подобием для доказательства некоторых утверждений относительно dy/dx.

Лейбниц широко использовал понятие интеграла и независимо пришел к идее суммирования элементарных прямоугольников, на которые разбивается криволинейная трапеция [ср. (7)]. Но переход от суммы конечного числа прямоугольников к сумме бесконечно большого числа прямоугольников был не вполне понятен. По утверждению Лейбница, сумма элементарных прямоугольников превращалась из конечной в бесконечную, когда ширина h прямоугольников становилась «бесконечно малой». Для бесконечной суммы бесконечно малых величин – интеграла – Лейбниц ввел специальное обозначение $\int y dx$. Он научился вычислять такие интегралы и независимо открыл основную теорему интегрального исчисления, утверждающую, что вычисление интеграла представляет собой операцию, обратную нахождению производной (антидифференцирование). После примерно двенадцати лет упорной работы над своим вариантом математического анализа Лейбниц опубликовал первую работу о новом исчислении в журнале *Acta eruditorum* («Журнал ученых») за 1684 г. Наиболее выразительный отзыв на эту работу Лейбница дали его друзья, братья Якоб и Иоганн Бернулли, заявив, что это «не столько загадка, сколько объяснение».

Идеям Ньютона и Лейбница недоставало ясности, и критики не замедлили воспользоваться этим. Ньютон не снисходил до ответа на критические замечания, тогда как Лейбниц считал своим долгом ответить на возражения критиков. Его попытки объяснить в частной переписке свое понимание бесконечно малых величин столь многочисленны, что для подробного разбора их понадобилось бы немало страниц. В статье, опубликованной в томе *Acta eruditorum* за 1689 г., Лейбниц утверждал, что бесконечно малые – не действительные, а некие фиктивные числа. Но эти фиктивные, или мнимые, числа подчиняются тем же правилам арифметики, что и обычные числа.

В той же статье Лейбниц, исходя из геометрических соображений, доказывал, что высший дифференциал (бесконечно малая более высокого порядка, чем первый), например $(dx)^2$, относится к низшему дифференциалу dx, как точка к прямой, и что dx относится к x, как точка к земному шару или радиус Земли к радиусу небесной сферы. Отношение двух бесконечно малых Лейбниц мыслил как отношение двух неопределенностей или бесконечно малых величин, которое, однако, можно выразить через конечные величины. Например, геометрически отношение dy к dx есть не что иное, как отношение ординаты к подкасательной (*TU* к *SU* на рис. 6.4).

Одним из критиков, выступивших против Лейбница, был Бернгардт Нювентидт (1654–1718). Ответ Лейбница ему был опубликован в *Acta eruditorum* за 1695 г. Лейбниц обрушился на ревнителя математической строгости, справедливо заметив, что чрезмерная скрупулезность не должна отвращать нас от плодов нового открытия. Лейбниц утверждал, что его метод отличается от метода Архимеда только терминологией, и считал, что избранная им терминология в большей мере отвечает искусству совершать открытия. Термины «бесконечная» и «бесконечно малая» относятся к величинам, которые можно считать сколь угодно большими или сколь угодно малыми, когда требуется показать, что совершаемая ошибка меньше «наперед заданного числа» (т.е. что ошибки нет). Предельные величины, т.е. все эти «действительные бесконечности» и «бесконечно малые», можно использовать как удобный рабочий инструмент в вычислениях, подобно тому, как алгебраисты с превеликой пользой используют мнимые корни. (Напомним, что во времена Лейбница мнимые корни имели весьма шаткий статус.)

В письме к Валлису, написанном в 1699 г., Лейбниц дал несколько иное объяснение бесконечно малых:

> Бесконечно малые величины полезно рассматривать так, чтобы, когда требуется найти их отношение, их нельзя было считать нулем, но чтобы в то же время ими можно было пренебречь по сравнению с неизмеримо большими величинами. Так, в $x + dx$ величина dx пренебрежимо мала. Иное дело, если нам требуется найти разность между $x + dx$ и x. Точно так же не следует допускать, чтобы xdx и $dxd\,x$ стояли рядом. Если необходимо продифференцировать [найти производную] xy, то мы пишем: $(x + dx)\,(y + dy) - xy = xdy + y\,dx + dx\,dy$. Но член $dxdy$ неизмеримо мал по сравнению с $x\,dy + y\,dx$, и его надлежит отбросить. Итак, в рассмотренном нами частном случае ошибка меньше любой конечной величины.

Так Лейбниц отстаивал законность математических понятий, используемых в созданном им варианте анализа. Поскольку приводимые Лейбницем доводы не удовлетворяли его критиков, он сформулировал философский принцип, известный под названием принципа непрерывности и практически не отличающийся от того, которым пользовался Кеплер. Этот принцип Лейбниц сформулировал с самого начала своей работы по созданию анализа, изложив его в письме Герману Конрингу от 19 марта 1678 г.: «Если переменная на всех промежуточных этапах обладает некоторым свойством, то и ее предел будет обладать тем же свойством».

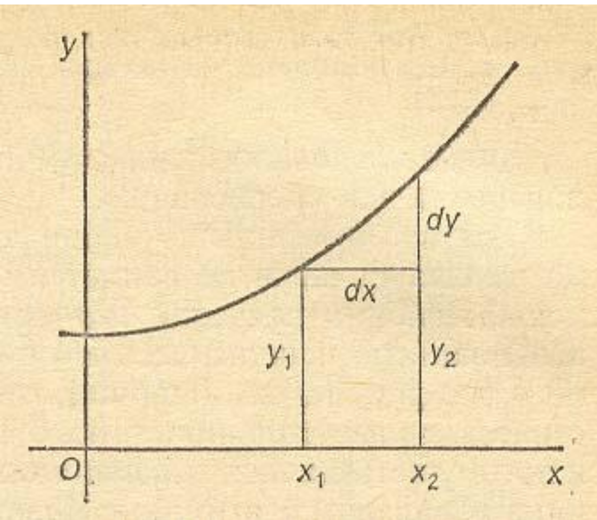


Рис. 6.5. Переход к пределу $x_2 \to x_1$ по Лейбницу

В письме к Пьеру Бейлю, написанном в 1687 г., Лейбниц сформулировал свой принцип более полно: «В любом переходе, завершающемся неким пределом, допустимо использовать общее рассуждение, которое может включить этот предел». Свой принцип Лейбниц применил к вычислению производной dy/dx для параболы $y = x^2$. Получив $dy/dx = 2x + dx$, Лейбниц заметил: «Согласно нашему постулату, допустимо включать в общее рассуждение и тот случай (рис. 6.5), когда ордината x_2y_2 всё более приближается к фиксированной ординате x_1y_1, пока наконец не совпадет с ней. Ясно, что тогда dx становится равным нулю и должен быть отброшен...» Лейбниц умолчал о том, какие значения следует придавать dx и dy, входящим в левую часть равенства $dy/dx = 2x + dx$, когда dx обращается в нуль.

Абсолютно равные величины, говорил Лейбниц, имеют, разумеется, разность абсолютно ничтожную.

> Тем не менее можно вообразить переход или одно из обращений в нуль, при котором точное равенство или состояние покоя еще не наступило, но достигнуто такое состояние, в котором разность меньше любой заданной величины. В таком состоянии некоторая разность – какая-то скорость, какой-то угол – еще остается, но в каждом случае она бесконечно мала...
>
> Можно ли строго или метафизически обосновать такое состояние мгновенного перехода от неравенства или равенства и сколь законны соображения, использующие бесконечно большие протяженности, продолжающие неограниченно возрастать, или бесконечно малые протяженности, – вопросы, которые мне, по-видимому, придется оставить открытыми...
>
> Вполне достаточно, если каждый раз, когда речь заходит о бесконечно больших (или, точнее, о неограниченных) или о бесконечно малых (т.е. о самых малых из известных нам) величинах, мы условимся понимать, что имеем в виду величины бесконечно большие или бесконечно малые, т.е. сколь угодно большие или сколь угодно малые, вследствие чего допускаемая ошибка может быть меньше заранее заданной величины.
>
> При таких допущениях все правила нашего алгоритма, изложенные в *Acta eruditorum* за октябрь 1684 г., могут быть доказаны без особого труда.

Далее следовало изложение правил, ничего, впрочем, не добавляющее к их обоснованию.

Сформулированный Лейбницем принцип непрерывности заведомо не был (и ныне не является) математической аксиомой. Тем не менее Лейбниц всячески подчеркивал важность этого принципа и неоднократно использовал его в своих рассуждениях. Так, в письме к Валлису (1698) Лейбниц, отстаивая использование характеристического треугольника (рис. 6.4) как формы, не имеющей размеров и потому остающейся неизменной, когда длины всех сторон треугольника обращаются в нуль, с вызовом спрашивал: «Кто не приемлет форму, лишенную размеров?» В письме к Гвидо Гранди (1713) Лейбниц утверждал, что бесконечно малая – это не простой и абсолютный нуль, а нуль относительный, т.е. исчезающая величина, которая, однако, сохраняет свойство той величины, которая, собственно, исчезает. Но в других случаях Лейбниц признавал, что не верит в истинно бесконечно большие или истинно бесконечно малые величины.

До конца жизни (он умер в 1716 г.) Лейбниц продолжал объяснять, что такое его бесконечно малые и бесконечно большие величины. Однако все эти объяснения были не более убедительны, чем приведенные выше. Созданное Лейбницем дифференциальное и интегральное исчисление не имело ни четко сформулированных понятий, ни обоснований.

У нас может вызвать удивление, что Ньютон и Лейбниц могли довольствоваться столь грубыми рассуждениями. Еще до того, как они приступили к созданию дифференциального и интегрального исчисления, другие великие математики достигли выдающихся успехов, о которых и Ньютон, и Лейбниц, изучавшие труды своих предшественников, безусловно, хорошо знали. Знаменитое высказывание Ньютона «Если я видел дальше других, то лишь потому, что стоял на плечах гигантов» не просто проявление скромности, а констатация факта. Что же касается Лейбница, то он был одним из величайших мыслителей. Мы уже упоминали (гл. III) о том, сколь значительный вклад он внес в развитие различных областей человеческого знания. По широте и силе интеллекта Лейбница можно сравнить разве что с Аристотелем. Разумеется, создание дифференциального и интегрального исчисления потребовало разработки принципиально новых, очень тонких идей, а даже лучшие из умов, способные к величайшим творческим свершениям, не всегда до конца постигают то, что ими же создано.

Ни Ньютон, ни Лейбниц не могли полностью объяснить вводимые ими понятия или обосновать новые операции. Они полагались на плодотворность своих методов, совпадение получаемых ими независимо друг от друга результатов, и продолжали упорно и энергично двигаться вперед, не особенно задумываясь о строгости. Лейбниц, заботившийся о строгости меньше, чем Ньютон, хотя и чаще отвечавший на возражения критиков, считал, что лучшим обоснованием используемых им методов служит их эффективность. Он неоднократно подчеркивал «рецептурную», или алгоритмическую, ценность своих методов. Лейбниц почему-то был убежден, что, сколь бы неясным ни выглядел смысл понятий, результаты рассуждений будут разумны и правильны, если верно сформулировать и надлежащим образом применять правила действий. Подобно Декарту, Лейбниц был человеком проницательным, мыслившим широко. Он предвидел отдаленные последствия новых идей и, не колеблясь, провозгласил рождение новой науки.

Обоснование математического анализа по-прежнему оставалось неясным. Сторонники Ньютона толковали о простых и предельных отношениях; последователи Лейбница предпочитали пользоваться инфинитезимальными, или бесконечно малыми, величинами. Существование столь несхожих между собой подходов осложняло и без того нелегкую работу по обоснованию математического анализа. Кроме того, некоторые английские математики – возможно, в силу традиционной привязанности к греческой геометрии – предъявляли более жесткие требования к строгости доказательств и поэтому с недоверием относились к подходам как Ньютона, так и Лейбница. Другие английские математики, вместо того, чтобы заниматься математикой, предпочитали изучать труды Ньютона и поэтому не продвинулись ни на шаг на пути к обоснованию дифференциального и интегрального исчисления. Таким образом, к концу XVII в. математический анализ, так же как арифметика и алгебра, пребывал в состоянии полной неразберихи.

Распространение методов математического анализа на новые области привело к появлению новых понятий и методов, что еще больше осложнило проблему обоснования дифференциального и интегрального исчисления. Примером такого рода дополнительных трудностей могут служить бесконечные ряды. Напомним, с какого рода проблемами столкнулись математики при рассмотрении бесконечных рядов.

Представив функцию $1/(1+x)$ в виде $(1+x)^{-1}$ и применив к последней теорему о разложении бинома, получим

$$1/(1+x) = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots, \tag{8}$$

где многоточие означает, что число членов, выписываемых по такому же закону, как и несколько первых, можно увеличивать неограниченно. Вводя в математический анализ бесконечные ряды, математики намеревались заменить ими функции в таких операциях, как дифференцирование (нахождение производных) и интегрирование (антидифференцирование), поскольку производить операции с более простыми членами ряда гораздо легче, чем с исходными функциями. Кроме того, ряды позволяли по заданному значению независимой переменной вычислять значения таких функций, как, скажем, $\sin x$. Во всех этих случаях важно знать, что ряд равносилен исходной функции. Но функции при заданном x принимают вполне определенные значения; поэтому прежде всего возникает вопрос: какое значение принимает при заданном x выбранный нами ряд? Иначе говоря, чтó мы понимаем под суммой ряда и как ее вычислить? Второй, не менее важный вопрос можно было бы сформулировать так: представляет ли ряд функцию при всех значениях x или по крайней мере при всех тех значениях x, при которых функция имеет смысл.

В первой работе по математическому анализу (1669) Ньютон не без гордости ввел бесконечные ряды для упрощения основных операций – дифференцирования и интегрирования. Так, воспользовавшись для интегрирования (антидифференцирования) функции $y = 1/(1+x^2)$ теоремой о разложении бинома, Ньютон получил ряд

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots,$$

который и проинтегрировал почленно. Ньютон обратил внимание на то, что если ту же функцию представить в виде $y = 1/(x^2 + 1)$, то та же теорема о разложении бинома даст ряд

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \dots.$$

Ньютон заметил далее, что при достаточно малом x следует пользоваться первым разложением, а при достаточно большом x – вторым. Из этого видно, что Ньютон интуитивно сознавал важность такого свойства ряда, как сходимость, хотя и не имел о нем ясного представления.

Обоснование, данное Ньютоном производимым им операциям над бесконечными рядами, может служить великолепным образцом логики того времени. В статье 1669 г. Ньютон утверждал:

> То, что обычный анализ [алгебра] выполняет с помощью уравнений с конечным числом членов (если это выполнимо), [новый анализ] всегда может выполнить с помощью уравнений с бесконечным числом членов [рядов]; поэтому я, не задумываясь, назвал новое исчисление анализом. Рассуждения в нем не менее надежны, чем в обычном анализе, не менее точны и уравнения, хотя мы, смертные, чей разум ограничен узкими пределами, не можем ни выразить, ни постичь все члены этих уравнений, дабы найти из них точные значения тех величин, которые нам нужны.

Для Ньютона бесконечные ряды были частью алгебры – высшей алгебры, изучающей выражения не с конечным, а с бесконечным числом членов.

Подобно Ньютону и Лейбницу, над решением странной проблемы бесконечных рядов бились несколько представителей славного математического рода Бернулли, а также Эйлер, Д'Аламбер и другие математики XVIII в. Применяя бесконечные ряды в анализе, они совершали всевозможные ошибки, предлагали неверные доказательства, приходили к неверным заключениям. Более того, иногда они в обоснование своих результатов приводили рассуждения, которые мы, ретроспективно, можем назвать лишь смехотворными и нелепыми. Даже беглого перечисления таких рассуждений достаточно, чтобы понять, какая сумятица и неразбериха царили тогда в представлениях о свойствах бесконечных рядов.

При $x = 1$ ряд (8), представляющий функцию $1/(1+x)$,

$$1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots, \tag{8}$$

переходит в ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots.$$

Вопрос о том, чему равна сумма последнего ряда, порождал бесконечные споры. Если этот ряд записать в виде

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots,$$

то становится ясно, что его сумма должна быть равна нулю. Но если тот же ряд записать как

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots,$$

то столь же ясно, что сумма ряда должна равняться единице. Однако ясно также и то, что если сумму ряда обозначить через S, то

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots),$$

или

$$S = 1 - S,$$

откуда $S = ½$. Последний результат подкрепляется еще одним доводом. Интересующий нас ряд можно рассматривать как геометрическую прогрессию со знаменателем -1, а сумма бесконечной геометрической прогрессии с первым членом a и знаменателем r равна $a/(1-r)$. В нашем случае сумма равна $1/[1 - (-1)]$, или ½.

Гвидо Гранди (1671–1742) в своем небольшом сочинении «Квадратура окружностей и гипербол» (*Quadratura circuli et hyperbolae,* 1703) другим методом получил сумму, равную ½. Полагая в (8) $x = 1$, он нашел:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1\ldots .$$

Тем самым Гранди утверждал, что сумма ряда равна ½. Но одновременно он заявлял, что сумма того же ряда равна 0. По мнению Гранди, полученное им «равенство» 0 = ½ доказывало, что мир мог быть создан из ничего.

В письме к Христиану Вольфу, опубликованному в *Acta eruditorum* за 1713 г., Лейбниц рассмотрел тот же ряд. Он согласился с выводом Гранди, но считал, что к подобному заключению можно было бы прийти, не обращаясь к исходной функции. Взяв первый член, сумму первых двух, трех, четырех и т.д. членов, Лейбниц получил 1, 0, 1, 0, ... Следовательно, счел он, 0 и 1 равновероятны и их среднее арифметическое, равное ½, – наиболее вероятное значение суммы ряда. Якоб, Иоганн и Даниил Бернулли, а также Лагранж согласились с доводами Лейбница. Признав, что его доводы носят не столько математический, сколько метафизический характер, Лейбниц сослался на распространенность такого рода аргументации: в математике, по его словам, метафизических истин гораздо больше, чем обычно думают.

В одном из писем, датированных 1745 г., и в работе 1754–1755 гг. Эйлер предпринял попытку решить проблему суммирования рядов. Ряд, сумма которого по мере увеличения числа членов всё меньше отличается от некоторого фиксированного числа, называется сходящимся, я само это число – <u>суммой</u> ряда. По Эйлеру, ряд сходится, если члены его монотонно убывают. Ряд, члены которого не убывают и могут даже возрастать, расходится, а так как ряды такого типа порождаются хорошо известными явными функциями, то Эйлер предложил считать суммой ряда значение функции (при соответствующем значении x).

Теория Эйлера породила дополнительные проблемы. Взяв разложение

$$1/(1+x)^2 = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots ,$$

Эйлер получил при $x = -1$

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots .$$

Результат, казалось бы, вполне осмысленный. Но затем Эйлер рассмотрел ряд для функции $1/(1-x)$:

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - \ldots$$

и получил при $x = 2$

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots .$$

Так как сумма ряда, стоящего в правой части этого ряда, должна превышать сумму предыдущего ряда, Эйлер заключил, что –1 больше, чем бесконечность. Некоторые из современников Эйлера утверждали даже, что отрицательные числа, которые больше бесконечности, отличаются от отрицательных чисел, меньших нуля. С этим Эйлер не согласился: по его мнению, бесконечность разделяет положительные и отрицательные числа так же, как нуль.

Взгляды Эйлера на сходимость и расходимость рядов были ошибочными. В его время уже были известны ряды с монотонно убывающими членами, тем не менее не имеющие суммы по Эйлеру, – да и ему самому приходилось работать с рядами, которые не были порождены явными функциями. «Теория» бесконечных рядов Эйлера была явно неполной. Кроме того, Николай Бернулли (1687–1759) в ныне утерянном письме (1743), по-видимому, обратил внимание Эйлера на то, что различные аналитические выражения могут порождать один и тот же ряд, и если следовать предложенному Эйлером определению суммы ряда, то этому ряду надлежит приписать различные суммы. В письме Гольдбаху (1745) Эйлер ответил, что Бернулли не привел никаких примеров в подтверждение своих слов и что он, видимо, сам не верит в то, что два истинно различных алгебраических выражения могут порождать один и тот же ряд. Однако Жан Шарль Калле (1744–1799) предложил пример ряда, порождаемого двумя различными функциями. Лагранж пытался опровергнуть пример Калле, но, как выяснилось впоследствии, аргументы Лагранжа были ошибочными.

Подход Эйлера к бесконечным рядам был неадекватен и по другим причинам. Ряды можно дифференцировать и интегрировать, и то, что дифференцирование и интегрирование ряда приводит соответственно к производной и антипроизводной функции, породившей ряд, требует особого обоснования. Несмотря на это, Эйлер провозгласил: «Всякий раз, когда бесконечный ряд получается при разложении некоторого замкнутого выражения [формулы для функции], его допустимо использовать в математических операциях как эквивалент этого выражения даже при тех значениях переменной, при которых ряд расходится». Мы можем обратить себе на пользу расходящиеся ряды, утверждал Эйлер, и защитить их применение от всяких возражений.

Другие математики XVIII в. также сознавали необходимость отличать ряды, называемые ныне сходящимися, от рядов, которые мы называем расходящимися, хотя и не знали, где именно проходит различие между теми и другими. Трудность была вызвана новизной понятия: подобно первопроходцам, математикам XVIII в. приходилось прорубать себе дорогу через девственный лес. Первоначальная идея Ньютона, принятая Лейбницем, Эйлером и Лагранжем (ряд не более чем «длинный» многочлен и, следовательно, относится к области алгебры), не могла служить основой для обоснования операций, производимых с рядами.

В XVIII в. господствовал формальный подход к бесконечным рядам. Математики того времени отменили все ограничения на операции над рядами, например перестали заботиться о сходимости ряда. Использование рядов давало полезные результаты – и математики довольствовались практическим подтверждением правильности применяемых ими методов. Они далеко вышли за пределы того, что могли бы обосновать, но в целом обращались с расходящимися рядами довольно осторожно.

Хотя арифметика и алгебра были обоснованы ничуть не лучше математического анализа, математики сосредоточили свои усилия на последнем, надеясь изгнать из дифференциального и интегрального исчисления любую неоднозначность. Столь явное предпочтение математическому анализу объяснялось, несомненно, тем, что к началу XVIII в. различные типы чисел стали привычными и казались вполне естественными, в то время как понятия математического анализа по-прежнему оставались странными и даже загадочными, а потому менее приемлемыми. Кроме того, применение чисел не приводило к противоречиям, тогда как применение дифференциального и интегрального исчисления, бесконечных рядов и других разделов математического анализа рождало противоречия.

Ньютоновский подход к анализу потенциально легче поддавался обоснованию, чем подход Лейбница, хотя методология Лейбница отличалась большей гибкостью и была более удобной для приложений. Английские математики всё еще надеялись обосновать оба подхода, связав их с евклидовой геометрией. К тому же они путали ньютоновские моменты (приращения неделимых, нынешние дифференциалы) и его непрерывные переменные. Математики, жившие в континентальной Европе, придерживались подхода Лейбница и пытались обосновать введенное им понятие дифференциала (бесконечно малой). Книги, посвященные объяснению и обоснованию подходов Ньютона и Лейбница, слишком многочисленны и противоречивы, чтобы подробно говорить о них.[13]

Пока одни математики предпринимали усилия, чтобы обосновать математический анализ, другие подвергали сомнению его правильность. Самым сильным нападкам математический анализ подвергся со стороны философа епископа Джорджа Беркли (1685–1753), опасавшегося, что вдохновляемая математикой философия механицизма и детерминизма создает растущую угрозу религии. В 1734 г. Беркли опубликовал сочинение под названием «Аналитик, или Рассуждение, адресованное одному неверующему математику [таковым он называл Эдмонда Галлея], в котором исследуется, являются ли предмет, принципы и заключения современного анализа более отчетливо познаваемыми и с большей очевидностью выводимыми, чем религиозные таинства и положения веры» [21][14]. «Вынь бревно из глаза своего, и ты узришь соринку в глазу брата своего». Беркли с полным основанием сетовал на загадочность и непонятность того, чем занимаются математики, поскольку те никак не обосновывали и не объясняли своих действий. Беркли подверг критике многие из рассуждений Ньютона, и в частности указал на то, что в «Рассуждении о квадратуре кривых» Ньютон (обозначавший приращение через x, а не h, как это сделали мы) выполнил несколько алгебраических операций, после чего отбросил члены, содержавшие h, мотивируя это тем, будто приращение h теперь обратилось в нуль. [Ср. равенства (3) и (4), с. 154.] Поступая так, продолжал Беркли, Ньютон допустил вопиющее нарушение закона противоречия. Такого рода рассуждения в теологии были бы признаны неприемлемыми. Беркли утверждал, что первые флюксии (первые производные),

[13] Обзор этих работ см. в кн.: Cajori F. A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse. – Chicago: The Open Court Publishing Co., 1915. См. кроме того: Boyer C. The Concepts of the Calculus. – N.Y.: Columbia University Press, 1939, а также (переиздание): Dover Publications, 1949. [Из более поздних работ можно указать, например, брошюру [40: Eleckenstein S.O. Der Prioritätsstreit zwischen Leibnitz und Newton. – Basel: Birkhäuser, 1976] и более обстоятельные книги [41: Boyer C.B. The History of the Calculus and Its Conceptual Development. – N.Y.: Dover, 1959], [42: Baron M.E. The Origins of the Infinitesimal Calculus. – Oxford: Pergamon, 1969], [43: Priestley W.M. Calculus: An Historical Approach. – N.Y.: Springer, 1979] и особенно [44: Edwards C.H. The Historical Development of the Calculus. – N.Y.: Springer, 1979]. – Прим. ред.]

[14] Беркли Дж. Сочинения. – М.: Мысль, 1978.

по-видимому, выходят за рамки человеческого разумения, поскольку находятся за пределами конечного.

> А если непостижимы первые [флюксии], то что можно сказать о вторых, третьих [производных от производных] и т. д.? Тот, кто сумеет постичь начало начал или конец концов... возможно, окажется достаточно проницательным, чтобы понять подобные вещи. Но, по моему глубокому убеждению, большинство людей не в состоянии понять их в каком бы то ни было смысле... Тому, кто сумеет превратить вторую и третью производную, думается... вряд ли стоит особо привередничать по поводу того или иного пункта в Священном писании.

Говоря об исчезновении (обращении в нуль) h и k, Беркли заметил: «Предполагая, что приращения исчезают, мы, несомненно, должны предположить, что их пропорции, выражения и всё, вытекающее из их существования, исчезает вместе с ними». По поводу предложенного Ньютоном представления о производной как об отношении двух исчезающе малых величин h и k, Беркли высказался так: «Они не конечные величины, не величины бесконечно малые, не ничто. Как же не назвать их призраками покинувших нас величин?».

Столь же критически Беркли отнесся и к подходу Лейбница. На введенные Лейбницем понятия он обрушился еще в своей ранней работе «Трактат о принципах человеческого знания» (1710, переработанное издание – 1734) ([21][15], с. 149–248):

> Некоторые яз них, имеющие громкое имя, не довольствуются мнением, будто конечные линии могут быть делимы на бесконечное число частей, но утверждают далее, что каждая из этих бесконечно малых частей в свою очередь делима на бесконечное число других частей, или бесконечно малых величин второго порядка, и т.д. *ad infinitum*. Они утверждают, говорю я, что существуют бесконечно малые части бесконечно малых частей и т.д. без кюнца... Другие утверждают, что все порядки бесконечно малых величин ниже первого порядка суть ничто... ([21], с, 234.)

Критику идей Лейбница Беркли продолжил в своем «Аналитике» [«Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику» ([211, с. 395–442)]:

> Лейбниц и его последователи в их *calculus differentialis* без тени сомнения сначала предполагают и затем отвергают бесконечно малые величины, что не может не заметить любой мыслящий человек, наделенный ясным умом и здравостью суждений и не относящийся к такого рода вещам с предвзятой благосклонностью.

Отношение дифференциалов, утверждал Беркли, геометрически должно означать тангенс угла наклона секущей, а не касательной. Эту ошибку математики совершают, пренебрегая высшими дифференциалами. Так, «благодаря двойной ошибке вы приходите хотя и не к науке, но всё же к истине», потому что одна ошибка компенсирует другую. Неудовольствие Беркли вызвал и второй дифференциал Лейбница $d\ (dx)$ – «разность величины dx, которая и сама едва различима».

«Можно ли назвать действия современных математиков, – спрашивал Беркли, имея в виду подход как Ньютона, так и Лейбница, – действиями людей науки, если они с гораздо большим рвением стремятся применить свои принципы, нежели понять их?» «Во всякой другой науке, – утверждал Беркли, – люди доказывают правильность заключений, исходя из принятых ими принципов, а не принципы, исходя из заключений».

Беркли завершал свой «Аналитик» целой серией вопросов. Вот некоторые из них:

> Разве математики, столь чувствительные в вопросах религии, столь же скрупулезно придирчивы в своей науке? Разве не полагаются они на авторитет, принимая многое на веру, и разве не веруют они в вещи, непостижимые для разума? Разве нет у них своих таинств и, более того, своих нссовместимостей и противоречий?

Многие математики выступили с ответом на критику Беркли, и каждый из них пытался, но безуспешно, обосновать математический анализ. Наиболее значительную попытку предпринял Эйлер. Он полностью отверг геометрию как основу анализа и стал работать с функциями чисто формально, т.е. строить рассуждения, исходя из алгебраического (аналитического) представления

---

[15] Беркли Дж. Сочинения. – М.: Мысль, 1978.

функций. Эйлер отверг и предложенное Лейбницем понятие бесконечно малой как величины, которая меньше любого заданного числа, но всё же не равна нулю. В своем сочинении «Основы дифференциального исчисления» (*Institutiones calculi differentialis,* 1755), классическом курсе математического анализа XVIII в., Эйлер привел следующее рассуждение:

> Каждая величина, несомненно, может уменьшиться настолько, что исчезнет полностью и растает. Но бесконечно малая величина есть не что иное, как исчезающая величина, и поэтому сама равна нулю. Это полностью согласуется также с определением бесконечно малых величин, по которому эти величины должны быть меньше любого заданного числа. Ясно, что такая величина не может не быть нулем, ибо если бы она была отлична от нуля, то вопреки предположению не могла бы быть меньше самой себя.

Такие бесконечно малые, как dx (обозначение Лейбница), равны нулю, следовательно, равны нулю $(dx)^2$, $(dx)^3$ и т.д., утверждал Эйлер, потому что последние принято считать бесконечно малыми более высокого порядка, чем dx. Производная dy/dx (в обозначениях Лейбница), бывшая для Лейбница отношением бесконечно малых, понимаемых в его смысле, для Эйлера, по существу, обращалась в неопределенность 0/0. Эйлер утверждал, что 0/0 может принимать много значений, так как $n \cdot 0 = 0$ при любом числе n, и, разделив равенство на 0, мы получим $n = 0/0$. Какое именно значение принимает 0/0 для вполне определенной функции, можно установить с помощью обычного метода вычисления производной. Эйлер демонстрирует это на примере функции $y = x^2$. Придадим переменной x приращение h (Эйлер обозначал приращение ω). Пока h, по предположению, не равно нулю. [Ср. сказанное в связи с выражениями (1) – (4).] Следовательно,

$$k/h = 2x + h.$$

Там, где Лейбниц считал приращение h бесконечно малым, но не равным нулю, Эйлер положил h равным нулю, после чего отношение k/h, т.е. 0/0, оказалось равным $2x$.

Эйлер подчеркивал, что эти дифференциалы (предельные значения k и h) – абсолютные нули и из них нельзя извлечь ничего, кроме их отношения, которое и было вычислено в заключение и оказалось конечной величиной. В третьей главе «Основ анализа» Эйлера есть немало рассуждений такого рода. Стремясь приободрить читателя, Эйлер замечает, что понятие производной не столь уж загадочно, как обычно думают, хотя оно в глазах многих делает дифференциальное исчисление подозрительным. Разумеется, предложенное Эйлером обоснование метода нахождения производной было ничуть не более здравым, чем обоснования, предлагавшиеся Ньютоном и Лейбницем.

Формальный, некорректный подход Эйлера всё же явился большим шагом вперед, ибо, избавляя математический анализ от традиционной основы – геометрии, подводил под него базу арифметики и алгебры. Этот шаг впоследствии привел к обоснованию анализа на основе понятия числа.

Наиболее претенциозная из последующих попыток заложить фундамент анализа была предпринята в XVIII в. Лагранжем. Подобно Беркли и другим своим предшественникам, Лагранж считал, что полученные с помощью анализа правильные результаты объясняются наложением и взаимной компенсацией ошибок. Свою собственную реконструкцию анализа Лагранж изложил в книге под названием «Теория аналитических функций» (1797; 2-е изд. – 1813)[16]. Подзаголовок книги гласил: «Содержащая основные теоремы дифференциального исчисления, [доказанные] без использования бесконечно малых, исчезающих величин, пределов и флюксий, и сведенная к искусству *алгебраического анализа конечных величин*» (курсив М.К.).

Критикуя Ньютона, Лагранж, в частности, указывал, что, рассматривая предел отношения дуги к хорде, тот считал хорду и дугу равными не до и не после, а в момент исчезновения. В этой связи Лагранж заметил:

> Такой метод чрезвычайно неудобен тем, что величины приходится рассматривать в тот самый момент, когда они, так сказать, перестают быть величинами, ибо, хотя мы всегда хорошо представляем отношения двух величин, покуда они остаются конечными, их отношение не дает уму никакого ясного и точного представления, коль скоро обе величины исчезают одновременно.

[16] **Яглом:** В этой книге излагался курс, который Лагранж читал студентам знаменитой парижской Политехнической школы; продолжение и дальнейшее развитие идей Лагранжа содержат учебники еще одного профессора Политехнической школы – О. Коши, о которых пойдет речь в следующей главе.

Лагранж не был удовлетворен ни бесконечно малыми величинами Лейбница, ни абсолютными нулями Эйлера, так как оба этих понятия, «хотя и правильны в действительности, всё же недостаточно ясны для того, чтобы служить основанием науки, надежность выводов которой зиждется на ее очевидности».

Лагранж хотел придать математическому анализу всю строгость доказательств древних и стремился достичь желаемого путем сведения математического анализа к алгебре. В частности, Лагранж предложил использовать для строгого обоснования анализа бесконечные ряды, которые в то время было принято относить к алгебре, хотя с их обоснованием дело обстояло хуже, чем с обоснованием математического анализа. Лагранж «скромно» заметил, что его метод почему-то не пришел в голову Ньютону.

Нам нет необходимости вдаваться в подробности обоснования анализа «по Лагранжу». Помимо совершенно неудовлетворительного использования рядов Лагранж производил множество алгебраических преобразований, призванных скорее помешать читателю обнаружить немаловажное обстоятельство: отсутствие строгого определения производной. Все результаты, полученные Лагранжем, были обоснованы столь же плохо, как и результаты его предшественников. Лагранж был убежден, что ему удалось избавиться от понятия предела и построить весь анализ на основе алгебры. Несмотря на все допущенные Лагранжем ошибки, предложенный им вариант обоснования анализа имел несколько выдающихся продолжателей.

Мнение о том, что математический анализ представляет собой лишь продолжение алгебры, было подкреплено фундаментальным трехтомным трудом Сильвестра Франсуа Лакруа (1765–1843), вышедшим в 1797–1800 гг. Лакруа шел по стопам Лагранжа. В меньшей по объему однотомной работе под названием «Элементарный трактат по дифференциальному и интегральному исчислению» (1802) Лакруа использовал теорию пределов (точнее, то, что понимали под теорией пределов в начале XIX в.) – правда, по словам Лакруа, лишь для того, чтобы сэкономить место.

Некоторые английские математики начала XIX в. решили взять реванш над превосходившими их математиками из континентальной Европы. Чарлз Бэббедж (1792–1871), Джон Гершель (1792–1871) и Джордж Пикок (1791–1858), бывшие тогда выпускниками Кембриджского университета, основали Аналитическое общество и перевели краткий курс математического анализа Лакруа.[17] Однако в предисловии переводчиков говорилось следующее:

> Сочинение Лакруа, перевод которого предлагается вниманию публики... может рассматриваться как сокращенный вариант его фундаментального труда по дифференциальному и интегральному исчислению, хотя при доказательстве первых принципов автор пользовался методом пределов Д'Аламбера вместо наиболее правильного и естественного метода Лагранжа, который он применил в более обширном своем сочинении... .

[17] **Яглом:** Деятельность молодых кембриджских математиков (Пикок – Бэббедж – Гершель) имела еще один аспект, не связанный с проблемами обоснования математики, но чрезвычайно важный в тот период для английской науки. Дело в том, что крайне неприятные приоритетные споры об открытии математического анализа, развернувшиеся в XVII в. между Ньютоном и Лейбницем, формально окончились как будто полной победой Ньютона, не потерпевшего в результате их ни малейшего материального или морального ущерба, тогда как Лейбниц из-за этих споров умер буквально в нищете. Однако исторически победителем здесь оказался именно Лейбниц, а научным наследникам Ньютона эти беспредметные дискуссии о первенстве принесли вполне ощутимый вред. Вся континентальная Европа восприняла дифференциальное и интегральное исчисление в том обличье, которое ему придал Лейбниц – с более удобной лейбницевской символикой н терминологией (*производная* и *интеграл*, а не *флюксия* и *флюэнта*; исчисление *дифференциалов*, а не *моментов*). Существенную роль здесь сыграла отмеченная в книге темпераментная защита Лейбницем своих позиций, а также выдающаяся научная школа Лейбница, возглавляемая братьями Якобом и Иоганном Бернулли. Напротив, в Англии из-за приоритетных соображений на систему обозначений и терминов Лейбница был буквально наложен запрет, что лишало возможности молодых английских ученых следить за достижениями своих континентальных коллег и привело к резкому отставанию английской науки. Даже возрождение английской математики в середине XIX столетия (!), предвестником которого явились названные молодые кембриджцы, было первоначально встречено на континенте с большим недоверием. И деятельность Пикока и его друзей, в частности перевод ими на английский язык «лейбницианского» по форме учебника Лакруа, ставила своей целью приблизить английскую математику к континентальной.

Пикок утверждал, что теория пределов неприемлема, так как она отделяет принципы дифференциального исчисления от алгебры. Гершель и Бзббедж выразили полное согласие с мнением своего коллеги.

Насущная необходимость надлежащего обоснования математического анализа остро ощущалась в конце XVIII в. всем математическим миром, и по предложению Лагранжа отделение математики Берлинской академии наук, директором, которой он состоял в 1766–1878 гг., назначила в 1784 г. приз (который должен был быть вручен в 1786 г.) за лучшее решение проблемы бесконечности в математике. Объявление об условиях конкурса гласило:

> Своими предложениями, всеобщим уважением и почетным титулом образцовой «точной науки» математика обязана ясности своих принципов, строгости своих доказательств и точности своих теорем.
>
> Для обеспечения непрестанного обновления столь ценных преимуществ этой изящной области знания необходима ясная и точная теория того, что называется в математика бесконечностью.
>
> Хорошо известно, что современная геометрия [математика] систематически использует бесконечно большие и бесконечно малые величины. Однако геометры античности и даже древние аналитики всячески стремились избегать всего, что приближается к бесконечности, а некоторые знаменитые аналитики современности усматривают противоречивость в самом термине бесконечная величина.
>
> Учитывая сказанное, Академия желает получить объяснение, каким образом столь многие правильные теоремы были выведены из противоречивого предположения, вместе с формулировкой точного, ясного, короче говоря, истинно математического принципа, который был бы пригоден для замены принципа бесконечного и в то же время не делал бы проводимые на его основе исследования чрезмерно сложными или длинными. Предмет должен быть рассмотрен во всей возможной общности и со всей возможной строгостью, ясностью и простотой.

К участию в конкурсе допускались все желающие, за исключением членов Академии. Всего на рассмотрение жюри поступило двадцать три работы. Официальное решение, опубликованное после окончания работы жюри, гласило:

> Академия получила много работ на объявленную тему. Авторы всех работ не смогли объяснить, каким образом из противоречивого предположения – о существовании бесконечно большой величины – удалось вывести так много правильных теорем. Все авторы в большей или в меньшей степени пренебрегли требованиями ясности, простоты, а главное – строгости. Большинство из авторов даже не осознали, что принцип, который им надлежало найти, должен был не ограничиваться дифференциальным исчислением, а распространяться также на алгебру и геометрию, рассматриваемые в духе древних.
>
> Учитывая изложенное, Академия считает, что ее требования удовлетворены не полностью.
>
> Тем не менее жюри нашло, что в наибольшей мере удовлетворил требованиям участник конкурса, представивший работу на французском языке под девизом «Бесконечность – пучина, в которой тонут наши мысли». Ему и присужден приз.

Победителем оказался швейцарский математик Симон Люилье. В том же 1876 г. Берлинская академия опубликовала его «Элементарное изложение высшего анализа». Несомненно, решение, принятое математическим отделением Академии, по существу было правильным. Ни в одной из других работ (за исключением работы, представленной Карно; см. гл. VII) даже не делалось попытки объяснить, каким образом в математическом анализе исходя из ложных посылок удается вывести так много правильных теорем. Люилье, несомненно, заслуживал награды, хотя основная идея его работы была далеко не оригинальна. По словам самого Люилье, его работа представляла «развитие идей... бегло намеченных Д'Аламбером и как бы изложенных в его статье «Дифференциал», опубликованной в «Энциклопедии», и в его сочинении «Разное». Во вводной главе своего сочинения Люилье излагает слегка усовершенствованный вариант теории пределов. Впервые в печатном тексте он ввел для обозначения предела символ lim. Производную dP/dx (ранее встречавшуюся как отношение k/h) Люилье обозначал $\lim \Delta P/\Delta x$, но вклад самого Люилье в теорию пределов был крайне незначительным.

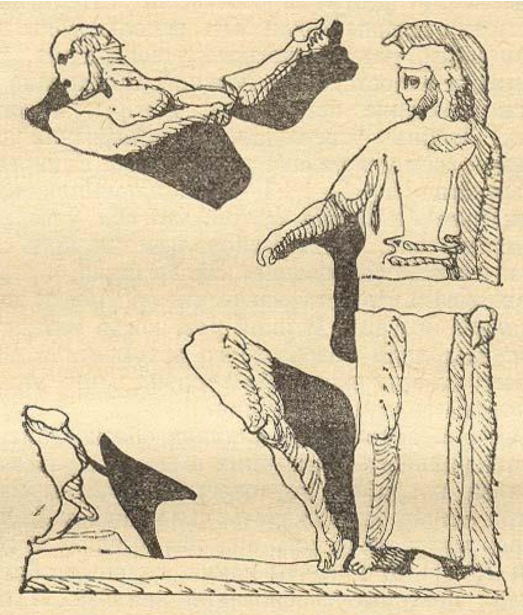
Хотя почти каждый математик XVIII в. предпринимал попытку обосновать математический анализ или по крайней мере высказывал свое мнение по поводу столь важной проблемы, а два–три математика были на верном пути, все усилия оказались тщетными. Математики XVIII в. либо умышленно обходили все сколько-нибудь важные и тонкие проблемы, либо просто не замечали их. Различие между очень большим числом и бесконечно большой величиной они ощущали с трудом. Математикам XVIII в. казалось очевидным, что теорема, которая выполняется при любом конечном n, должна выполняться и при бесконечном n. Разностное отношение k/h, [см. выражение (3)] они охотно заменяли производной, а сумму членов вида (7) с трудом отличали от интеграла. Переход от конечного к бесконечному как в одну, так и в другую сторону совершался ими необыкновенно легко и просто. Суть математики XVIII в., пожалуй, наиболее точно выразил Вольтер, охарактеризовавший [математический] анализ как «искусство считать и точно измерять то, существование чего непостижимо для разума». Предпринимавшиеся на протяжении века попытки строгого обоснования анализа, в особенности попытки, предпринятые такими гигантами науки, как Эйлер и Лагранж, лишь окончательно запутали и завели в тупик как их современников, так и математиков последующих поколений. В целом подобные попытки оказались безнадежно ошибочными – от них можно было бы прийти в отчаяние и усомниться в том, что математикам вообще когда-нибудь удастся разрешить проблему обоснования анализа.

Математики верили в символы больше, чем в логику. Поскольку бесконечный ряд имеет один и тот же вид при всех значениях x, различие между значениями x, при которых ряд сходится, и теми значениями, при которых он расходится, не привлекало должного внимания. И хотя было известно, что некоторые ряды, например 1+2+3..., имеют бесконечную сумму, математики предпочитали пытаться придать какой-то смысл бесконечной сумме, чем усомниться в применимости суммирования. Было бы неверно утверждать, что математики XVIII в. не ощущали необходимости доказательства некоторых утверждений. Мы видели, что Эйлер пытался обосновать использование расходящихся рядов. Более того, Эйлер, Лагранж и многие другие математики пытались обосновать математический анализ. Но немногочисленные попытки достичь желаемой строгости (ценные тем, что они показали, как изменяются со временем критерии математической строгости) не увенчались успехом. Математический анализ, созданный трудом многих людей на протяжении почти столетия, по-прежнему оставался под сомнением. И математики, можно сказать, сознательно прибегли к житейской мудрости: если анализ нельзя излечить, необходимо хотя бы продлить ему жизнь. В своих рассуждениях мыслители XVIII в. нередко обращались к термину «метафизика». Под ним понимали совокупность истин, лежащих за пределами собственно математики. В случае необходимости эти истины могли быть использованы для обоснования того или иного математического утверждения, хотя природа метафизических истин оставалась неясной. Обращение к метафизике означало использование аргументов, которые не подкреплялись разумом. Так, Лейбниц утверждал, что метафизика используется в математике шире, чем можно себе представить. Единственным «обоснованием» равенства $1/2 = 1–1 + 1–1 + ...$ и принципа непрерывности было утверждение Лейбница о том, что оба утверждения «обоснованы» метафизически. Предмет спора исчезал, коль скоро появлялось метафизическое «обоснование». Эйлер также обращался к метафизике и доказывал, что метафизические аргументы должны приниматься в анализе на веру. Всякий раз, когда математики XVII–XVIII вв. не находили подобающего аргумента в подтверждение того или иного утверждения, они говорили, что это утверждение верно по метафизическим причинам.

Итак, XVIII в. закончился, оставив обоснование дифференциального и интегрального исчисления и высших разделов математического анализа в крайне неудовлетворительном состоянии. Без преувеличения можно было сказать, что к началу XIX в. ситуация с обоснованием математического анализа выглядела гораздо хуже, чем в канун XVIII в. Гиганты науки, главным образом Эйлер и Лагранж, дали неверные обоснования анализа. А поскольку их авторитет был чрезвычайно велик, многие из их коллег воспринимали и некритически повторяли всё, что делали корифеи, и даже пытались строить новые теории на возведенных теми ложных основаниях. Другие, менее доверчивые, не были удовлетворены тем, что предлагали Эйлер и Лагранж, но надеялись достичь полного обоснования путем незначительных поправок и дополнений. Нужно ли говорить, что и они стояли на неверном пути.

VII. Нелогичное развитие: серьезные трудности на пороге XIX в.

Почто, о боги, в этом мире
Должно быть дважды два – четыре?
Александр Поп



К началу XIX в. математика оказалась в весьма парадоксальной ситуации. Ее успехи в описании и предсказании физических явлений превзошли самые смелые ожидания. Но при этом многие математики еще в XVIII в. отмечали, что всё огромное здание математической науки было лишено логического фундамента и держалось на столь шатких основаниях, что не было уверенности в «правильности» этой науки. Подобная ситуация сохранялась и в течение всей первой половины XIX в. Многие математики с головой ушли в новые области физики и добились там значительных успехов, а об основаниях математики никто попросту не задумывался. Естественно, что критика по поводу учения об отрицательных и комплексных числах, а также в адрес алгебры, дифференциального и интегрального исчисления и других разделов стремительно развивавшегося математического анализа не утихала.

С какими же трудностями столкнулась математика в начале XIX в.? Вряд ли необходимо останавливаться на возражениях, которые продолжали выдвигаться против использования иррациональных чисел: ведь, как мы уже отмечали, иррациональные числа можно представлять как точки на прямой – и потому на чисто интуитивном уровне их принятие вряд ли было сопряжено с большими трудностями, чем использование целых и дробных чисел; польза же от введения иррациональных чисел была несомненна. В результате иррациональные числа, не имевшие сколько-нибудь серьезного научного обоснования, были приняты без особых возражений. Однако отрицательные и комплексные числа по-прежнему доставляли немало беспокойства, так как интуитивно казались неприемлемыми. В XIX в., как и в предыдущие столетия, многие их всё еще просто отвергали или довольно злобно критиковали их использование.

Уильям Френд (1757–1841), тесть Огастеса де Моргана и член совета колледжа Иисуса Кембриджского университета, в предисловии к своей книге «Начала алгебры» (1796) заявлял без обиняков:

> [Любое число] допустимо вычитать из большего числа, но любая попытка вычесть какое-либо число из меньшего числа смехотворна сама по себе. Тем не менее именно это пытаются делать алгебраисты, толкующие о числах, меньших нуля; об умножении отрицательного числа на отрицательное, дающем положительное произведение; о мнимых числах. Они разглагольствуют о двух корнях любого уравнения второй степени и предлагают тому, кто их слушает, попытать счастья с доставшимся ему уравнением; они толкуют о решении уравнения, имеющего лишь невозможные, или мнимые корни; они умеют находить невозможные числа, которые при многократном переумножении дают единицу. Всё это не более чем жаргон, в котором нет ни капли здравого смысла. Но будучи однажды принят, он, подобно многим другим измышлениям, находит множество горячих приверженцев среди тех, кто охотно принимает на веру всякую бессмыслицу и не склонен к серьезным размышлениям.

В статье, послужившей как бы приложением к сочинению барона Мазера (1800), о котором мы уже упоминали в гл. V, Френд подверг критике общее правило, согласно которому число корней уравнения равно его степени. Френд утверждал, что оно верно лишь для **некоторых** уравнений, и, разумеется, в качестве примера приводил уравнения, все корни которых положительны. О математиках, приемлющих названное общее правило, Френд говорил, что «они, дабы скрыть ложность принимаемого ими общего утверждения или придать ему хотя бы на словах видимость истины, оказываются вынужденными дать особые названия тому скопищу величин, которые им хотелось бы выдать за корни уравнения, хотя те таковыми не являются».

Знаменитый французский геометр Лазар Никола́ Карно (1753–1823) известен не только своими оригинальными работами, но и как автор обстоятельного методологического сочинения «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых» (1797, 2-е (переработанное) изд. – 1813), переведенного на многие языки [45][18]. Карно прямо утверждал: нелепо думать, будто что-то может быть меньше, чем ничто. Отрицательные числа, по мнению Карно, можно вводить в алгебру как некие фиктивные величины, облегчающие вычисления, но, разумеется, это не настоящие величины, и они могут приводить к неверным заключениям.

Начавшийся в XVIII в. спор о логарифмах отрицательных и комплексных чисел совершенно лишил математиков душевного покоя, так что даже в XIX в. они испытывали настоятельную потребность усомниться в существовании как отрицательных, так и комплексных чисел. Роберт Вудхаус из Кембриджского университета опубликовал статью «О непременной истинности некоторых заключений, получаемых с помощью мнимых величин», где, в частности, утверждалось: «Парадоксы и противоречия, в которых обвиняют друг друга математики, вовлеченные в спор относительно логарифмов отрицательных и мнимых величин, можно использовать как веские аргументы против использования этих величин в исследованиях».

Коши – несомненно, один из величайших математиков первой половины XIX в. и создатель теории функций комплексного переменного – как это ни парадоксально, в первые десятилетия XIX в. сам отказывался считать числами такие выражения, как $a + b\sqrt{-1}$. В своем знаменитом «Курсе анализа» (*Cours d'analyse,* 1821) он назвал подобные выражения «количествами, лишенными всякого смысла». Тем не менее, продолжал он, эти «бессмысленные количества» позволяют высказывать некие утверждения относительно (реально существующих) вещественных чисел a и b; так, например, равенство

$$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1}$$

указывает, что $a = c$ и $b = d$. По утверждению Коши, «каждое равенство, связывающее мнимые числа, есть не более как символическая запись двух равенств вещественных чисел». Даже в 1847 г. он выдвинул весьма сложную теорию, призванную обосновать операции над комплексными числами без использования при этом величины $\sqrt{-1}$, от которой, говорил Коши, «мы можем полностью отречься и которую должны оставить без сожаления, поскольку нам не известно, ни что означает этот символ, ни какой смысл надлежит ему приписывать».

В 1831 г. Огастес де Морган, автор знаменитых «законов де Моргана» математической логики, внесший немалый вклад в развитие алгебры, высказал свои возражения против отрицательных и комплексных чисел в книге «Об изучении и трудностях математики», в которой, по его словам, не содержалось ничего, что нельзя было бы найти в лучших учебниках, используемых в те времена студентами Оксфорда и Кембриджа:

> Мнимое выражение $\sqrt{-a}$ и отрицательное выражение $-b$ сходны в том, что каждое из них, встречаясь как решение задачи, свидетельствует о некоторой противоречивости или абсурдности. Что же касается реального смысла, то оба выражения надлежит считать одинаково мнимыми, так как $0 - a$ столь же непостижимо, как и $\sqrt{-a}$.

В качестве примера де Морган приводит следующую задачу; отцу – 56 лет, а сыну – 29; через сколько лет отец будет вдвое старше сына? Де Морган составляет уравнение $56 + x = 2(29 + x)$ и, решая его, получает $x = -2$. Такой ответ он считает абсурдным, но замечает, что если x заменить на $-x$, то данное уравнение перейдет в $56 - x = 2(29 - x)$, откуда следует, что $x = 2$. Отсюда де Морган делает вывод, что исходная задача была неверно поставлена: отрицательный ответ указывает на ошибку в первоначальной формулировке задачи, где на самом деле следует спрашивать: «Сколькими годами ранее отец был вдвое старше сына?»

По поводу комплексных чисел де Морган замечает:

> Мы показали, что символ $\sqrt{-a}$ лишен смысла или, точнее, внутренне противоречив и абсурден. Тем не менее такие символы позволили создать часть алгебры, приносящую немалую пользу.

[18] Карно Л. Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. – М.–Л.: Гостехиздат, 1933.

Объясняется эго тем, что применение к таким выражениям [комплексным числам] общих правил алгебры, как должно быть проверено на опыте, никогда не приводит к ложным результатам. Обращение к опыту такого рода, по-видимому, противоречит первым принципам, положенным и основу алгебры. Мы не можем отрицать, что в действительности всё обстоит именно так. Не следует, однако, забывать, что та область алгебры, о которой идет речь, составляет лишь небольшую и изолированную часть обширного предмета, ко всем прочим частям которого указанные принципы применимы в полном объеме. [Принципы, которые упоминает де Морган, представляют собой математические истины, с необходимостью выводимые из аксиом с помощью дедуктивных рассуждений.]

Далее де Морган сравнивает отрицательные и комплексные корни:

Итак, между отрицательными и мнимыми решениями уравнения различие всё же существует. Если задача допускает отрицательное решение, то, изменив знак неизвестного *x* в уравнении, которое привело к такому решению, мы можем либо обнаружить ошибку, допущенную при составлении уравнения, либо показать, что вопрос задачи чрезмерно сужен, и, расширив его надлежащим образом, мы получим удовлетворительное решение. Если же задача допускает мнимое решение, то дело обстоит совсем не так.

Несколько дальше де Морган замечает:

Нам отнюдь не хотелось бы воспрепятствовать проникновению в суть предмета тому, кто впервые изучает алгебру, поэтому мы не станем приводить здесь во всех подробностях доводы за и против по таким вопросам, как применение отрицательных чисел и т.д., недоступные пониманию учащегося и не вполне убедительные. Вместе с тем мы считаем своим долгом предуведомить тех, кто изучает алгебру, о существующей трудности и указать на природу ее. Мы надеемся, что учащийся, рассмотрев достаточное число примеров, разобранных отдельно, обретет уверенность в тех результатах, к которым приводят правила.

Не более чем де Морган был склонен принимать отрицательные и комплексные числа Уильям Роуан Гамильтон, один из самых выдающихся математиков XIX в., о котором мы упоминали ранее. Свои возражения против необычных чисел он сформулировал в работе от 1837 г.:

Не требуется особого скептицизма, чтобы усомниться или даже не поверить в учение об отрицательных и мнимых [числах], излагаемое, как это обычно принято, на основе таких принципов, как то, что бóльшую величину можно вычесть из меньшей и что разность может быть меньше, чем ничто, что два отрицательных числа, т.е. числа, означающие величины, каждая из которых меньше нуля, можно умножить одно на другое и произведение при этом будет положительным, иначе говоря, числом, означающим величину, которая больше нуля, и что хотя квадрат числа, или произведение числа на самого себя, всегда положителен независимо от того, положительно или отрицательно само число, тем не менее можно найти, представить себе или определить числа, называемые мнимыми, и производить над ними действия по всем правилам, используемым для положительных и отрицательных чисел, как если бы мнимые числа удовлетворяли этим правилам, хотя эти числа имеют отрицательные квадраты и, следовательно, не должны считаться ни положительными, ни отрицательными числами и ни нулем, в силу чего обозначаемые ими величины не могут быть ни больше, чем ничто, ни меньше, чем ничто, ни равны ничему. Трудно, должно быть, возводить науку на таких основах, хотя правила логики позволяют построить из мнимых чисел симметричную систему выражений и можно выучиться практическому искусству правильно применять полезные правила, по-видимому связанные с этими несуществующими или мнимыми числами.[19]

Джордж Буль (1815–1864), один из создателей (наряду с де Морганом) математической логики, в своем труде «Исследование законов мышления» (1854) называет $\sqrt{-1}$ неинтерпретируемым символом. Однако, используя этот символ в тригонометрии, мы, по мнению Буля, переходим с помощью неинтерпретируемых выражений от одних интерпретируемых выражений к другим, тоже интерпретируемым.

С комплексными числами математиков несколько примирила не логика, а их геометрическое представление, предложенное Весселем, Арганом и Гауссом (см. гл. IV). Тем не менее в

[19] В следующей главе мы узнаем, как решил проблему комплексных чисел сам Гамильтон.

работах Гаусса отчетливо ощущается его нежелание принять комплексные числа. Гаусс предложил четыре доказательства основной теоремы алгебры, утверждающей, что многочлен n-й степени имеет ровно n корней. В первых трех доказательствах (1799, 1815 и 1816) Гаусс рассматривает многочлены с вещественными коэффициентами и, кроме того, предполагает, хотя нигде не определяет его явно, взаимно-однозначное соответствие между точками декартовой (координатной) плоскости и комплексными числами. По существу это еще не было геометрическим представлением комплексных чисел $x + iy$: Гаусс рассматривал x и y как координаты точки на вещественной плоскости. Кроме того, во всех трех доказательствах Гаусс не использовал теорию функций комплексного переменного, так как вещественную и мнимую части встречающихся функций рассматривал отдельно. В письме к Бесселю (1811) Гаусс высказался более определенно: числу $a + bi$ соответствует точка (a, b) на комплексной плоскости; из одной точки комплексной плоскости в другую можно перейти по многим путям. Если судить по этим трем доказательствам и другим неопубликованным работам, то Гауссу не давала покоя мысль о статусе комплексных чисел и функций комплексного переменного. В письме от 11 декабря 1825 г. Гаусс признавался, что не может оторваться от «истинной метафизики отрицательных и мнимых величин. Истинный смысл $\sqrt{-1}$ неотступно сидит у меня в голове, но его трудно выразить словами».

Однако к 1831 г. Гаусс – если у него еще оставались какие-то сомнения относительно того, принимает ли он сам и другие математики комплексные числа, – преодолел эти сомнения и опубликовал работы по геометрическому представлению комплексных чисел. В работах, вышедших из-под пера Гаусса в тот год, всё было сформулировано в явном виде. Гаусс не только предложил представлять число $a + bi$ точкой на комплексной плоскости, но и дал геометрическое толкование сложения и умножения комплексных чисел (гл. IV). Он отметил, что к тому времени уже сложилось достаточно четкое понимание дробей, а также отрицательных и вещественных чисел. К комплексным же числам, несмотря на всю их значимость, отношение было в лучшем случае терпимым. Многие математики считали комплексные числа не более чем игрой с символами. Но «здесь [в геометрическом представлении] доказательство интуитивного понимания числа $\sqrt{-1}$ полностью обосновано и не нуждается более в необходимости относить указанные величины в область объектов, изучаемых арифметикой». Из этого высказывания видно, что сам Гаусс был согласен с интуитивным пониманием мнимых чисел. Гаусс утверждал также, что если бы величины 1, –1 и $\sqrt{-1}$ назывались соответственно не положительной, отрицательной и мнимой единицей, а прямой, обратной и побочной, то у людей не создавалось бы впечатления, что с этими числами связана какая-то мрачная тайна. По словам Гаусса, геометрическое представление дает истинную метафизику мнимых чисел в новом свете. Именно Гаусс ввел термин «комплексные числа» (в противоположность «мнимым числам» Декарта) и использовал для обозначения $\sqrt{-1}$ символ i. Однако Гаусс не обмолвился ни словом относительно того, что и он сам, и его современники свободно использовали вещественные числа, не имея никакого их обоснования, хотя этот момент был не менее важен.

В работе от 1840 г., о которой в дальнейшем мы расскажем несколько подробнее, Гаусс использовал комплексные числа более свободно, отметив, что «теперь их знают все». Но Гаусс заблуждался. Еще долго после того, как была создана (главным образом трудами Коши в первой трети XIX в.) теория комплекснозначных функций комплексного переменного, нашедшая применение в гидродинамике, профессора Кембриджского университета испытывали непреодолимое отвращение к «сомнительной» величине $\sqrt{-1}$ и с помощью громоздких построений стремились изгнать ее отовсюду, где она только появлялась.

В первой половине XIX в. логические основания алгебры характеризовались попросту их полным отсутствием. Основная проблема состояла в том, что вместо всех типов чисел в алгебре использовались буквы и все действия над этими буквами производились так, как если бы они обладали хорошо известными и интуитивно приемлемыми свойствами положительных целых чисел, такими, как коммутативность сложения ($a + b = b + a$) или ассоциативность умножения $[(ab)c = a(bc)]$. Полученные с использованием этих свойств результаты оставались верными при подстановке вместо букв любых чисел: отрицательных, иррациональных или комплексных. Но поскольку природа этих чисел оставалась непонятой, а их свойства не были логически обоснованы, такое использование буквенных символов вызывало справедливые нарекания. Создавалось впечатление, что алгебра буквенных выражений обладала своей собственной логикой, которая и была причиной непостижимой эффективности и правильности алгебры. Так в 30-х годах XIX в.

математики столкнулись с проблемой обоснования операций, производимых над буквенными, или символическими, выражениями.

Впервые анализом этой проблемы занялся профессор математики Кембриджского университета Джордж Пикок (1791–1858). Он ввел различие между арифметической алгеброй и символической алгеброй. Первая оперировала с символами, представляющими положительные целые числа, и поэтому имела под собой прочную основу. При этом в арифметической алгебре допустимыми считались только операции, приводящие к положительным числам. Символическая алгебра, по мнению Пикока, перенимает правила арифметической алгебры, но распространяет их с положительных целых чисел на произвольные. Все результаты, полученные в рамках арифметической алгебры, выражения которой общи по виду, но частны по допускаемым ими значениям, остаются в силе и в символической алгебре, где помимо общности вида обретают общность и принимаемые рассматриваемыми выражениями значения. Так, равенство $ma + na = (m + n)a$ выполняется в арифметической алгебре, если a, m и n – положительные целые числа; следовательно, оно справедливо и в символической алгебре, где уже a, m и n могут быть какими угодно. Аналогично разложение бинома $(a + b)^n$, справедливое при положительных целых n, остается в силе при **всех** n, если рассматривать его в общем виде безотносительно к последнему члену. Идея Пикока, известная под названием «принцип перманентности эквивалентных форм», была выдвинута им в 1833 г. в «Докладе о последних достижениях и современном состоянии некоторых областей анализа», прочитанном на заседании Британской ассоциации поощрения науки. Пикок догматически утверждал:

> Если алгебраические формы эквивалентны, когда символы имеют общий вид, но могут принимать лишь частные [положительные целые] значения, то они эквивалентны и в том случае, когда символы не только имеют общий вид, но и могут принимать общие значения.

Свой принцип Пикок использовал, в частности, для обоснования операций над комплексными числами. Во избежание возможных нападок Пикок и сделал осторожную оговорку «...когда символы имеют общий вид». Тем самым его принцип не охватывал только числа 0 и 1, поскольку эти числа обладают необщими, специфическими свойствами.

Во втором издании своего «Трактата по алгебре» (1842–1845), (1-е изд. – 1830) Пикок вывел предложенный им принцип из аксиом. Он в явном виде сформулировал, что алгебра, подобно геометрии, является дедуктивной наукой. Следовательно, алгебраические методы должны основываться на полном наборе явно сформулированных законов, или аксиом, которым подчиняются операции, используемые в алгебраических процедурах. Символы операций не имеют (по крайней мере в алгебре как дедуктивной науке) иного смысла, кроме того, который придают им аксиомы. Так, сложение означает не более чем любой процесс, сопоставляющий двум элементам третий (который мы уславливаемся называть суммой первых двух элементов) и удовлетворяющий законам сложения. К числу законов, о которых говорит Пикок, относятся, например, коммутативный и ассоциативный законы для сложения и умножения или закон, состоящий в том, что если $ac = bc$ и $c \neq 0$, то $a = b$. Таким образом, принцип перманентности форм был обоснован принятием определенной системы аксиом.

Точка зрения на алгебру, утвержденная Пикоком, просуществовала на протяжении большей части XIX в. С небольшими видоизменениями она была принята Дунканом Ф. Грегори (1813–1844), Огастесом де Морганом и немецким математиком Германом Ганкелем (1839–1873).

По существу принцип перманентности форм был произвольным. Естественно, напрашивался вопрос: почему числа различных типов обладают теми же свойствами, что и целые числа? Принцип перманентности форм был санкционирован декретом как эмпирически правильный, но логически не обоснованный. Пикок, Грегори и де Морган, по-видимому, полагали, что алгебре можно придать смысл независимо от свойств вещественных и комплексных чисел. Вряд ли нужно говорить, что если какое-либо правило правой (или левой) руки назвать принципом, то его логическое обоснование от этого не улучшится. Но, как заметил епископ Беркли, «древние и глубоко укоренившиеся предрассудки нередко переходят в принципы, и не только сами утверждения, которые обретают силу и репутацию принципа, но и выводимые из них следствия принято считать во всех отношениях выделенными».

Принцип перманентности форм подходит к алгебре как к науке о символах и правилах комбинирования символов. Такому подходу недоставало ни ясности, ни гибкости. Сторонники принципа настаивали на столь жестком параллелизме арифметики и алгебры, что, осуществись он, общности алгебры был бы нанесен серьезный ущерб. По-видимому, этим математикам никогда не приходило в голову, что формула, истинная при одной интерпретации символов, может быть ложной при другой интерпретации тех же символов. Создание кватернионов подорвало самые основы принципа перманентности, потому что умножение кватернионов, ставших первым примером так называемых гиперкомплексных чисел, не обладало коммутативным свойством (гл. IV). А это означало, что буквенные символы, принимающие кватернионные значения, не обладают всеми свойствами вещественных и комплексных чисел: математики обнаружили «гиперчисла», свойства которых разнятся от свойств известных им ранее чисел. Тем самым принцип перманентности был низложен. Пикок и его последователи не учли, что вскоре (после открытия кватернионов) стало очевидным: существует не одна-единственная алгебра, а много разных алгебр и алгебру вещественных и комплексных чисел можно обосновать, лишь доказав, что буквенные символы, принимающие вещественные или комплексные значения, обладают всеми свойствами, которые приписываются этим буквенным символам.

В начале XIX в. «логический туман» окутывал не только алгебру, но и анализ. Предложенное Лагранжем обоснование математического анализа (гл. VI) удовлетворяло не всех математиков, и некоторые из них вновь встали на позицию Беркли и других критиков, считавших, что благополучие в этой области обеспечивается лишь за счет того, что ошибки взаимно компенсируются. Такого же мнения придерживался и Лазар Карно в своих «Размышлениях о метафизике исчисления бесконечно малых»: его метафизика «объясняла», что одни ошибки компенсируют другие. После длительного обсуждения различных подходов к математическому анализу Карно приходит к выводу, что, хотя все эти методы, равно как и введенное Д'Аламбером понятие предела, в действительности эквивалентны греческому методу исчерпывания, бесконечно малые позволяют быстрее получать результат. Карно внес свою лепту в разъяснение и уточнение понятий анализа, но вклад его не был особенно велик. Кроме того, сопоставляя идеи Ньютона, Лейбница и Д'Аламбера с греческим методом исчерпывания, он сделал явно рискованный шаг: ведь в греческой геометрии и алгебре не существовало общего понятия производной.

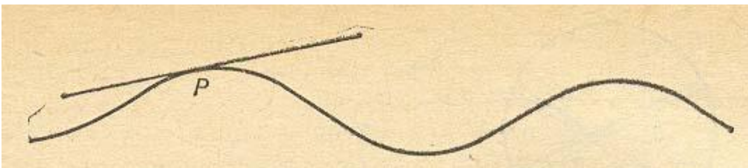


Рис. 7.1. График непрерывной функции

Грубые ошибки в области математического анализа были, увы, нередки у математиков XIX в. Можно было бы привести немало примеров этого, но мы ограничимся одной–двумя иллюстрациями. В основе всего математического анализа лежат понятия непрерывной функции и производной от функции. Чисто интуитивно, непрерывная функция – это такая кривая, которую можно начертить одним росчерком пера, не отрывая его от бумаги (рис. 7.1). Геометрический смысл производной к такой функции – тангенс угла наклона касательной, проведенной к кривой в точке P. Казалось бы, очевидно, что непрерывная функция должна иметь касательную в **каждой** точке. Однако некоторые математики XIX в. сумели подняться над интуитивными представлениями и вознамерились доказать всё, что́ возможно, чисто логическим путем.

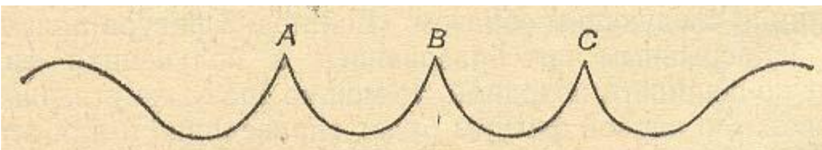


Рис. 7.2. Непрерывная, но не дифференцируемая (в точках A, B и C) функция

К сожалению, непрерывная функция с точками излома не имеет в них производной (функция, изображенная на рис. 7.2, не имеет производной в точках излома A, B и C). Тем не менее Андре Мари Ампер (1775–1836) «доказал» в 1806 г., что любая функция имеет производную во всех точках, где она непрерывна. Другие или аналогичные «доказательства» этого были приведены Лакруа в его знаменитом трехтомном «Трактате по дифференциальному и интегральному исчислению» (2-е изд.– 1810–1819) и почти во всех основных учебниках математического анализа XIX в. Жозеф Луи Франсуа Бертран (1822–1900) «доказал» в 1875 г. дифференцируемость непрерывной функции! Разумеется, все эти «доказательства» были ошибочными. Заблуждение некоторых авторов «доказательств» дифференцируемости было вполне простительным, если учесть, что в течение долгого времени не было точно определено само понятие функции, но примерно к 30-м годам прошлого века этот пробел был наконец восполнен.[20]

Если вспомнить, что непрерывность и дифференцируемость – два основных понятия математического анализа и что основной областью математики с середины XVII в. и, пожалуй, вплоть до настоящего времени являлся именно математический анализ, то нельзя не ужаснуться неясности и неопределенности этих фундаментальных понятий. Ошибки в рассуждениях и даже ошибочные заключения в вопросах, связанных с непрерывностью и дифференцируемостью, зачастую были столь значительны, что сегодня они считались бы непростительными даже для студентов младших курсов, – а ведь их совершали знаменитейшие математики: Фурье, Коши, Галуа, Лежандр, Гаусс, а также другие ведущие математики того времени, хотя и более низкого ранга.

Принятые в XIX в. учебники математического анализа по-прежнему свободно оперировали такими терминами, как дифференциал или бесконечно малая величина, которые всё еще оставались неясными или противоречивыми: они вроде бы одновременно и равнялись нулю, и были отличны от нуля. Это не могло не озадачивать тех, кто только начинал изучать математический анализ. Единственно, что им оставалось делать, – это следовать совету Д'Аламбера: «Будьте настойчивы, и вера к вам придет». Бертран Рассел, учившийся в 1890–1894 гг. в Тринити-колледже Кембриджского университета, вспоминал в своей автобиографической книге «Мое философское развитие»: «Те, кто преподавал мне дифференциальное исчисление, не знали правильных доказательств основных теорем и пытались заставить меня принять официальную софистику как акт веры».

Логические трудности, вставшие перед математиками XVII– XIX вв., достигли наибольшей остроты в таких разделах математического анализа, как дифференциальное и интегральное исчисление, а также теория бесконечных рядов и дифференциальных уравнений. Но в начале XIX в. излюбленной областью исследования математиков вновь стала геометрия. Евклидова геометрия расширилась. Новую область геометрии, так называемую проективную геометрию (занимавшуюся изучением тех свойств фигуры, которые сохраняются при ее проектировании, подобном, скажем, проектированию реальной трехмерной сцены на кинопленку, осуществляемому объективом кинокамеры), впервые подробно рассмотрел Жан Виктор Понселе (1788–1867). Как можно было ожидать, исходя из предшествующей истории математики, Понселе и другие геометры благоговейно относились к многим теоремам, доказывая которые они столкнулись с бесчисленными трудностями. К тому времени, благодаря главным образом работам Декарта и Ферма (XVII в.), уже возникли алгебраические методы доказательства геометрических теорем; однако геометры первой половины XIX в. считали алгебраические методы чуждыми геометрии, геометрической интуиции и всему, что составляет дух «истинно геометрического» исследования.

Чтобы «доказать» свои теоремы чисто геометрическими методами, Понселе широко использовал принцип непрерывности. В своем «Трактате о проективных свойствах фигур» (1822) он сформулировал этот принцип следующим образом:

> «Если одна фигура получается из другой непрерывным преобразованием и полученная фигура не уступает по общности исходной, то можно сразу же утверждать, что любое свойство первой фигуры будет справедливо и для второй фигуры».

Никаких пояснений по поводу того, в каких случаях конечную фигуру можно считать не уступающей по общности исходной фигуре, Понселе не дает.

Для «доказательства» правильности своего принципа Понселе воспользовался теоремой евклидовой геометрии, согласно которой произведения отрезков пересекающихся хорд равны (на рис. 7.3 $ab = cd$). Понселе заметил, что, когда точка пересечения хорд сдвигается во внешнюю по

---

[20] **Яглом:** Современное определение функции как любого правила или закона, сопоставляющего каждому значению x из области X (определения функция) единственное число y – значение функции в «точке» x, было еще в 1817 г. предложено чешским математиком Бернардом Больцано (1781–1848), однако замечено оно было только после повторения его в 40-х годах XIX в. авторитетным немецким математиком Петером Густавом Дирихле (1805–1859). Раньше Дирихле определение «по Больцано» использовал в своих работах по математическому анализу Н.И. Лобачевский, что, однако, тоже никем не было замечено.

отношению к окружности область, равными становятся произведения секущих и их внешних отрезков (на рис. 7.4 $ab = cd$). Никаких доказательств не требовалось, так как принцип непрерывности гарантировал правильность этого заключения. Кроме того, когда одна из секущих вырождается в касательную, она становится равной своему внешнему отрезку, а их произведение продолжает оставаться равным произведению другой секущей на ее внешний отрезок (на рис. 7.5 $ab = c^2$). Этими результатами Понселе воспользовался, чтобы продемонстрировать, как принцип непрерывности приводит к трем хорошо известным теоремам, удовлетворяющим данному принципу и в какой-то мере воплощающим его. Но, разумеется, эти рассуждения не заменяют доказательства принципа непрерывности, а Понселе, предложивший термин «принцип непрерывности», рассматривал его как абсолютную истину и смело применял в своем «Трактате» для «доказательства» многих новых теорем проективной геометрии.

В действительности принцип непрерывности не был «изобретением» Понселе. В широком философском смысле этот принцип восходит к Лейбницу. В гл. VI мы уже рассказывали о том, как Лейбниц использовал математический принцип непрерывности при построении дифференциального и интегрального исчисления. Однако принцип непрерывности не получил достаточно широкого распространения, пока Гаспар Монж (1746–1818), вдохнув в него новую жизнь, не применил этот принцип для доказательства теорем некоторых типов. Монж сначала доказывал общую теорему для особым образом расположенной фигуры, а затем утверждал, что теорема верна и в общем случае, хотя при переходе к общему положению некоторые элементы фигуры становились мнимыми. Так, для доказательства теоремы о кривой и прямой Монж сначала рассмотрел бы случай, когда кривая и прямая пересекаются, а затем стал бы утверждать, что доказанная теорема остается верной и в том случае, когда кривая и прямая не пересекаются, т.е. когда их точки пересечения становятся мнимыми.

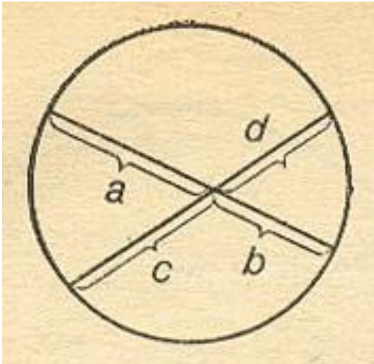


Рис. 7.3. Теорема о пересекающихся хордах

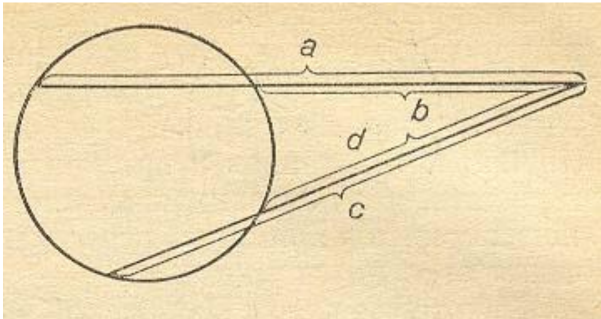


Рис. 7.4. Теорема о секущих, проходящих через одну точку вне окружности

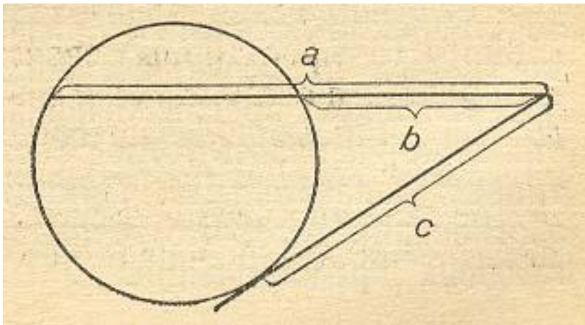


Рис. 7.5. Теорема о секущей и касательной, проведенных к окружности из одной точки

Некоторые члены Парижской академии наук весьма скептически отнеслись к принципу непрерывности, считая, что он лишен доказательной силы и имеет лишь чисто эвристическое значение. В частности, по поводу этого принципа критически высказывался Коши:

> Собственно говоря, речь идет о чисто индуктивном принципе, позволяющем распространять теоремы, доказанные при определенных ограничениях, на те случаи, когда эти ограничения более не существуют. Примененный к кривым второго порядка, этот принцип приводит автора к правильным результатам. Тем не менее мы считаем, что он неприемлем в общем случае и ко всем вопросам геометрии и даже анализа. Придавая принципу непрерывности чрезмерно большое значение, мы рискуем иногда впасть в очевидные ошибки.

К сожалению, критикуя принцип непрерывности, Коши приводил неудачные примеры, в которых правильность результатов, получаемых с помощью этого принципа, подтверждалась другими методами.

Критики обвиняли Понселе и других математиков между прочим и в том, что якобы их уверенность в правильности принципа непрерывности основывается на возможности его обоснования алгебраическими методами, тогда как «чистые геометры» такие методы не признавали. Из записей, которые Понселе делал, находясь в плену в России (он был офицером наполеоновской армии), видно, что он действительно использовал алгебру для **проверки** правильности принципа непрерывности. Понселе не возражал против доказательства, основанного на алгебре, считая, однако, что принцип не зависит от такого доказательства. Тем не менее не подлежит сомнению, что если Понселе и прибегал к алгебраическим методам, то только как к эвристическим, после чего подкреплял геометрические результаты, используя для их обоснования принцип непрерывности.

Несмотря на критику, принцип непрерывности воспринимался в XIX в. как интуитивно ясный и потому вполне приемлемый как метод доказательства; геометры широко пользовались им. Но с точки зрения логического развития математики принцип непрерывности был не более чем догматическим, искусственно вводимым утверждением, предназначенным для обоснования того, что математикам не удавалось тогда обосновать с помощью «истинных» дедуктивных доказательств. Принцип был специально изобретен для обоснования того, что устанавливалось интуитивно, на основе наглядных представлений.

Утверждение справедливости принципа непрерывности Понселе и применение этого принципа – лишь один из примеров тех извилистых путей, по которым приходится идти математикам, когда они стремятся обосновать то или иное утверждение, не располагая для этого убедительными доказательствами. Но с непротиворечивостью геометрии дело обстояло из рук вон плохо. Как уже говорилось (гл. V), лишь создание в конце XVIII – начале XIX вв. неевклидовой геометрии позволило обнаружить серьезные изъяны в дедуктивной структуре евклидовой геометрии. Однако и после этого математики не торопились ликвидировать обнаруженные изъяны, пребывая в полной уверенности, что в действительности выведенные ими теоремы абсолютно надежны. Интуитивную основу теорем и подтверждение их правильности многочисленными практическими применениями геометрии математики считали столь убедительными, что не придавали особого значения дефектам ее логической структуры.

Несколько иная ситуация сложилась в неевклидовой геометрии. В начале XIX в. лишь немногие ученые помимо ее создателей – Ламберта, Гаусса, Лобачевского и Бойаи – воспринимали неевклидову геометрию как заслуживающую внимания область математики, ибо ее дедуктивная структура была далеко не так разработана, как дедуктивная структура классической евклидовой геометрии. Однако после появления работ Гаусса и Римана не только основатели новой науки, но и их последователи уверовали в непротиворечивость неевклидовой геометрии (т.е. в то, что никакие ее теоремы не противоречат другим теоремам), которая отнюдь не была доказана.[21] Стало очевидным, что Саккери заблуждался, полагая, будто он пришел к противоречию; однако возникшая после этого общая уверенность в том, что он **не мог** прийти к противоречию, первоначально также не была ничем обоснована.

Ведь вполне могло случиться, что противоречие в неевклидовой геометрии всё же существует, но пока оно еще не обнаружено. Если бы это было так, то допущение основной аксиомы гиперболической геометрии было бы невозможно – и аксиома Евклида о параллельных оказалась бы, как некогда считал Саккери, следствием остальных евклидовых аксиом. Так, не располагая доказательством непротиворечивости или какими-либо данными о применимости новой геометрии, многие математики приняли то, что их предшественники считали абсурдным. Принятие неевклидовой геометрии было актом веры. Вопрос о непротиворечивости неевклидовой геометрии оставался открытым на протяжении еще полувека (гл. VIII).

[21] **Яглом:** Из числа создателей неевклидовой геометрии ее аксиоматически-логический статут больше всего беспокоил Яноша Бойаи, который подходил к развитой им науке с чисто аристотелевских позиций («дедуктивная», или «выводная», наука) и одно время даже полагал, что доказал противоречивость новой геометрии. Лобачевсккй и Гаусс воспринимали новую геометрическую систему более «физично» – как возможную систему описания свойств окружающего нас реального пространства. В частности, Лобачевский, дальше всех продвинувшийся в области «гиперболической» геометрии, был весьма близок к строгому доказательству ее непротиворечивости, поскольку он владел тем, что мы сегодня называем «бельтрамиевыми координатами» точек гиперболической плоскости, которые послужили основой для создания «модели Бельтрами» (или «модели Бельтрами–Клейна»), доказывающей непротиворечивость геометрии Лобачевского. Однако Лобачевский не сделал здесь последнего шага, ибо, будучи твердо уверенным в «истинности», или непротиворечивости, своей геометрии, не чувствовал необходимости этого.

Итак, в начале XIX в. не была обоснована практически ни одна область математики. Арифметика вещественных чисел, алгебра, евклидова и более новые неевклидова и проективная геометрии либо имели неполноценные обоснования, либо вообще были лишены логического фундамента. Математическому анализу, т.е. дифференциальному и интегральному исчислению, теории рядов и другим разделам недоставало не только строгой теории (даже просто определения!) широко использующихся здесь вещественных чисел и полноты логической структуры алгебры, но и ясности в определении основных понятий анализа – производной, интеграла и бесконечного ряда. С полным основанием можно сказать, что в математике начала XIX в. ничто не было обосновано хоть сколько-нибудь надежно.

Отношению многих математиков XVIII–XIX вв. к доказательству нельзя не удивляться, если вспомнить, что математику было принято считать непревзойденным образцом дедуктивной (или, по Аристотелю, «выводной») науки. В XVIII в. многие пробелы в обосновании математического анализа были вполне очевидны, и некоторые математики, работавшие в этой области, просто перестали заботиться о строгости. Так, Мишель Ролль (1652–1719) утверждал, что математический анализ представляет собой набор хитроумных логических парадоксов. Другие математики пошли еще дальше и, уподобляясь персонажу известной басни о лисе и винограде, принялись открыто высмеивать строгость греческой математики. Так, в своих «Элементах геометрии» (1741) Алекси Клод Клеро писал:

> Евклид заботился о доказательстве того, что две пересекающиеся окружности не имеют общего центра, что сумма сторон треугольника, заключенного внутри другого треугольника, меньше, чем сумма сторон объемлющего треугольника, и это не удивительно. Ведь этому геометру приходилось убеждать упрямых софистов, почитавших за доблесть отрицание очевиднейших истин. Чтобы успешно парировать придирки, геометрия должна, подобно логике, опираться на формальные рассуждения.

Далее Клеро добавляет: «Но теперь всё обстоит иначе. Все рассуждения, приводящие к результатам, заранее известным из соображений здравого смысла, ныне игнорируются – ведь они служат лишь для того, чтобы сокрыть истину и утомить читателя»[22].

Умонастроение, господствовавшее в XVIII – начале XIX вв., выразил Юзеф Гене-Вронский (1775–1853), искусный вычислитель, нисколько не заботившийся о строгости. Комиссия Парижской академии наук раскритиковала одну из представленных им работ. Отвечая на критику, Гене-Вронский охарактеризовал мнение комиссии как «педантизм, ставящий средства достижения цели превыше самой цели».

Во втором издании (1810–1819) трехтомного «Трактата по дифференциальному и интегральному исчислению» маститого Лакруа в предисловии к первому тому говорилось: «Нам нет дела до тех тонкостей, о которых так заботились греки». Типичным для того времени был недоуменный вопрос: почему мы должны брать на себя труд и доказывать с помощью хитроумных рассуждений то, что ни у кого не вызывает сомнений, и почему более очевидные истины необходимо доказывать ссылками на менее очевидные?

Даже в конце[23] XIX в. Карл Густав Якоб Якоби (1804–1854), в работах которого по теории эллиптических функций осталось множество неразрешенных вопросов, говаривал: «На гауссовскую строгость у нас нет времени, господа». Многие математики действовали так, будто то, что им не удавалось доказать, попросту не нуждалось в доказательстве. Большинство математиков вообще не заботилось о строгости. Нередко то, чему, по их утверждениям, можно было бы придать строгий смысл, если воспользоваться методом Архимеда, не могло быть доказано строго никакими новыми Архимедами. В частности, это относится к работам по дифференциальному

---

[22] **Яглом:** Французская школа давно имела традиции «антиевклидовского» изложения курса геометрии, где широко использовались наглядность, соображения симметрии и движения, которых старался избегать Евклид, и ставились во главу угла наиболее важные для практики вопросы измерения геометрических величин. Первый подобный учебник составил страстный борец против схоластики и метафизики Аристотеля (а заодно и против идущих от Аристотеля методологических установок Евклида) Питер Рамус (или Пьер де ла Раме, 1515–1572), поплатившийся жизнью за эту свою деятельность: он был убит в Варфоломеевскую ночь, причем убийство Рамуса было организовано враждебными ему профессорами Парижского университета (Сорбонны). Позиции Рамуса целиком разделял Д'Аламбер, который глубоко развил их в статье «Геометрия», напечатанной в «Энциклопедии». Той же линии придерживался в своем учебнике «Элементы геометрии» и один из крупнейших аналитиков XVII в. А.К. Клеро.

[23] **В.Э.:** Как он мог это говорить «в конце XIX века», если он умер в 1854 году?

исчислению, не имевшему параллелей в греческой математике. Слова Д'Аламбера; «До сих пор больше внимания уделялось расширению здания, чем освещению входа, возведению новых этажей, чем укреплению фундамента» – применимы к математике на протяжении всего XVIII в. и начала XIX в.

К середине XIX в. значение доказательства упало настолько, что некоторые математики не считали необходимым проводить полные доказательства даже в тех случаях, где это было возможно. Один из выдающихся приверженцев использования алгебраических методов в геометрии, создатель так называемой матричной алгебры (гл. IV) Артур Кэли (1821–1895) сформулировал теорему о матрицах, получившую впоследствии название теоремы Кэли–Гамильтона. (Для непосвященных сообщим, что матрицей в математике называют прямоугольную таблицу чисел. Если матрица квадратна, то в каждой ее строке и в каждом столбце стоят по n чисел.) Кэли проверил, что его теорема выполняется для (2×2)-матриц, и заявил (в работе 1858 г.): «Я не считаю необходимым обременять себя формальным доказательством теоремы в общем случае матрицы любого порядка [т.е. ($n\times n$)-матрицы]».

Один из ведущих алгебраистов Англии Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897) был в 1876–1884 гг. профессором университета Джона Гопкинса в Балтиморе. В одной из своих лекций он сказал: «Я не доказал этого, но уверен, насколько можно быть вообще в чем-либо уверенным, что это действительно так», после чего воспользовался результатом, о котором шла речь, для доказательства новых теорем. Нередко в конце очередной лекции Сильвестру приходилось признавать, что утверждение, в истинности которого он не сомневался на предыдущей лекции, оказалось неверным. В 1893 г. Сильвестр доказал одну теорему для (3×3)-матриц и лишь наметил те несколько пунктов, которые необходимо дополнительно рассмотреть, чтобы доказать теорему и для ($n\times n$)-матриц.

Если учесть, как прекрасно начал строить Евклид дедуктивную систему геометрии и теорию целых чисел, то нелогичность истории математики естественно подводит нас к вопросу: почему математики так много и так безуспешно пытались обосновать иррациональные, отрицательные и комплексные числа, алгебру, дифференциальное и интегральное исчисление, теорию функций вещественного и комплексного переменного, в то время как евклидова геометрия и теория чисел возводилась на столь шатком основании, и почему это никого не смущало? Ответ на этот вопрос частично уже известен (гл. V): поскольку развивавшиеся Евклидом разделы математики затрагивали интуитивно совершенно ясные понятия (как точка или целое положительное число), найти фундаментальные принципы, или аксиомы, из которых надлежало выводить остальные свойства, было сравнительно просто, хотя аксиоматика Евклида вовсе не была лишена недостатков и в ней отсутствовали как понятие неопределяемого объекта, так и полноценные определения начальных понятий. Что же касается иррациональных, отрицательных и комплексных чисел, операций над буквенными символами, понятий дифференциального и интегрального исчисления, то они для понимания гораздо труднее тех понятий, с которыми имели дело древние греки, и поэтому некритическое их использование вызывает большую неудовлетворенность.

Но была и более глубокая причина. Сами того не желая, великие математики вызвали своими трудами едва уловимое изменение в самой природе математики. До XVI в. математические понятия были идеализациями или абстракциями, почерпнутыми непосредственно из опыта. Правда, к тому времени отрицательные и иррациональные числа уже были приняты индийцами и арабами. Но хотя мы отнюдь не склонны недооценивать вклада, внесенного арабами и индийцами в развитие математики, в вопросах обоснования они полагались главным образом на интуицию и «внематематический» опыт. Когда же появились комплексные числа, а также алгебра, широко использующая буквенные коэффициенты, производные и интегралы, главенствующее положение в математике заняли понятия, представляющие собой абстракции более высокого ранга. Так, понятие производной, или мгновенной скорости изменения величины, хотя оно и не лишено интуитивной основы (ибо существует физическое понятие скорости), является весьма абстрактным. Качественно оно имеет совсем иную природу, чем, например, понятие треугольника. Аналогичным образом были обречены на провал все попытки математиков – еще не осознавших, что все эти понятия не основаны непосредственно на опыте, а являются абстракциями более высокой степени, – понять, что такое бесконечно большие величины, которых так старательно избегали греки, бесконечно малые величины, которые греки так искусно обходили, а также отрицательные и комплексные числа.

Иначе говоря, математики создавали понятия, а не черпали абстрактные идеи из реального мира. В поисках источника математических идей математики стали обращаться не к ощущениям», а к человеческому разуму. По мере того как новые идеи оказывались всё более полезными в приложениях, их принимали – сначала недовольно, а потом с жадностью. Становясь привычными, новые понятия отнюдь не становились более приемлемыми: привычка лишь рождала у математиков некритичность и создавала ощущение естественности там, где этой естественности на самом деле не было. Начиная с XVIII в. в математику входило всё больше далеких от непосредственного опыта, всё более абстрактных понятий, которые тем не менее принимались с всё меньшими трудностями. Математикам, вознесенным ими же созданной ракетой, не оставалось ничего другого, как рассматривать свою науку с высоты, намного превышающей уровень земной поверхности.

Не почувствовав изменения, происшедшего в характере новых понятий, математики тем самым лишили себя возможности признать необходимость иной основы для аксиоматического построения своей науки, чем самоочевидные истины. Разумеется, новые понятия отличались от старых большей тонкостью, и заложить надлежащий аксиоматический фундамент, как мы теперь знаем, здесь было совсем не так уж просто.

Как же математики могли узнать, в каком направлении следует двигаться, и, если учесть древнюю традицию доказательства, как они могли даже осмеливаться применять полученные результаты и утверждать что-либо о надежности своих выводов? Несомненно, что выбирать направление развития математики помогали как постановка, так и решение физических проблем. Как только физические проблемы облекались в математические формулировки, на передний план выступало виртуозное владение математическим аппаратом, возникали новые методы, рождались новые выводы. Таким образом, физический смысл стал путеводной звездой на разных этапах математического творчества; нередко он становился источником различного рода соображений, позволявших, по крайней мере частично, восполнить недостающие этапы. По существу этот процесс мало чем отличался от доказательства геометрической теоремы, опирающегося на чертеж, но не подкрепляемого ни аксиомами, ни ранее доказанными теоремами.

Помимо физического смысла в развитии новой математики известную роль играли и чутье – здоровая интуиция разумно мыслящего человека. Ведь основная идея и суть метода всегда интуитивно постигаются задолго до того, как они находят рациональное обоснование. Великих математиков, сколь бы рискованными ни были их рассуждения, всегда отличала тонкая интуиция, позволяющая избегать катастрофических ошибок. Интуиция гения более надежна, чем дедуктивное доказательство посредственности.

Постигнув суть физической проблемы в той или иной ее математической постановке, математики XVIII в. не могли устоять перед соблазном формул. По-видимому, формулы обладали в их глазах такой притягательной силой, что процесс вывода одной формулы из другой с помощью какой-нибудь формальной процедуры, например, путем дифференцирования, доставлял им глубокое удовлетворение. Восхищение перед символами переполняло их и лишало способности рассуждать. Восемнадцатое столетие окрестили Героическим веком в истории математики, потому что именно тогда математики дерзнули совершить столь небывалые по своим масштабам и значимости научные завоевания, пользуясь столь слабым логическим оружием.

Напрашивается еще один вопрос: почему математики были так уверены в своих результатах, хотя они прекрасно понимали (особенно в XVIII в.), что основные понятия математического анализа сформулированы недостаточно ясно, а доказательства неадекватны? Отчасти такая уверенность объясняется тем, что многие математические результаты были подкреплены опытом и наблюдением. Мы уже рассказывали (гл. II) о замечательных предсказаниях в астрономии, сделанных на основе математических расчетов. Но математики XVII–XVIII вв. верили в правильность своих результатов и еще по одной причине: они были убеждены в том, что мир сотворен богом на основе математических принципов, а они призваны постепенно раскрывать планы творца (гл. II). И хотя их открытия не носили общего характера, математики считали эти открытия составными частями единой основополагающей истины. Вера в то, что они открывают детали божественного замысла и в конечном счете достигнут когда-нибудь «земли обетованной» и вечных истин, поддерживала дух математиков XVII–XVIII вв., вселяла в них бодрость, а плодотворные научные результаты были для них манной небесной, питавшей разум и облегчавшей их тяготы.

Математики обнаружили лишь часть тех сокровищ, поиском которых занимались, и, судя по многим признакам, еще немало интересных открытий ожидало их впереди. Так стоило ли придираться к тому, что математическим законам, так хорошо согласующимся с природой, недостает строгого логического доказательства? Слабое или несуществующее обоснование подменялось религиозным убеждением, подкрепляемым научными фактами. Математикам XVII–XVIII вв. так не терпелось постичь божественную истину, что они продолжали возводить здание, не подведя под него прочного фундамента. Успех заглушал у них муки сомнений. Более того, опьянение от успеха оказалось столь сильным, что на протяжении почти двух веков теория и строгость были забыты. Возникавшие трудности они пытались преодолевать, обращаясь к философским или мистическим доктринам, и трудности, казалось, исчезали. С точки зрения логической обоснованности математика XVII, XVIII и начала XIX вв., несомненно, выглядела весьма примитивной, однако ее методы оказались необычайно плодотворными. Математики конца XIX в. и XX в., стремясь приуменьшить триумф своих предшественников, иногда были не вполне объективны, акцентируя внимание на их ошибках и промахах.

Математику XVII–XVIII вв. можно сравнить с мощной торговой фирмой, которая совершает многочисленные деловые сделки и приносит внушительную прибыль, но из-за неправильной постановки дела стоит на грани банкротства. Разумеется, ни покупатели (ученые, потребляющие «математические товары»), ни кредиторы (общество, которое без колебаний вкладывает средства в развитие математики) не знали об истинном финансовом положении «фирмы».

Итак, ситуация сложилась весьма парадоксальная. Никогда еще логика быстро расширяющей свои границы математики не находилась в столь плачевном состоянии. Но успехи математики в описании и предсказании явлений природы были настолько внушительными, что все мыслители XVIII в. с еще большим убеждением, чем древние греки, выдвигали тезис о существовании основанной на математических принципах системы мира и превозносили математику как великолепный и возвышенный продукт человеческого разума. Перефразируя слова «Гимна» Джозефа Эддисона, обращенные к небесным телам, можно сказать: «Их усладил глас, доступный слуху разума».

Сейчас всё это славословие в адрес математических рассуждений кажется невероятным. То, чем в действительности оперировали тогда математики, правильнее было бы назвать лишь обрывками рассуждений. Век разума (XVIII в.), когда разгорелись жаркие споры по поводу смысла и свойств комплексных чисел, логарифмов отрицательных и комплексных чисел, обоснования дифференциального и интегрального исчисления, суммирования рядов и других вопросов, которые мы не затрагивали, с большим основанием заслуживал бы названия Века безумия. К началу XIX в. математики были более уверены в результатах, чем в их логическом обосновании. В результаты верили – но не более того. Как мы увидим, Веком разума скорее следовало бы назвать вторую половину XIX в.

В то время как большинство математиков без особых колебаний устремились за новыми результатами, мало заботясь о доказательствах, иные выдающиеся математики, которые составляли явное меньшинство, были серьезно обеспокоены плачевным состоянием математики. Отчаянность ситуации, сложившейся в математическом анализе, замечательный норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802–1829) охарактеризовал в письме (1826) к профессору Кристоферу Ханстену. Абель жаловался на «необычайную неразбериху, несомненно царящую в математическом анализе»:

> В нем не чувствуется плана, полностью отсутствует всякая система. Странно, что столько людей занимаются математическим анализом. Хуже всего, что в нем ничего не рассматривалось строго. В высших разделах анализа имеется лишь несколько теорем, доказанных с более или менее приемлемой строгостью. Повсюду встречаются жалкие заключения от частного к общему. Странно, что такой способ доказательства не привел к гораздо большему числу парадоксов.

В частности, по поводу расходящихся рядов Абель писал в январе 1826 г. своему бывшему учителю Берндту Хольмбе:

> Расходящиеся ряды – поистине изобретение дьявола, и основывать на них какое бы то ни было доказательство – стыд и позор. Используя их, можно прийти к любому заключению, именно потому эти ряды и породили так много логических ошибок и парадоксов... Я так болезненно реагирую на всё это, потому что, за исключением геометрической прогрессии, нет ни одного бесконечного ряда, сумма которого была бы строго определена. Иначе говоря, то, что имеет наибольшее

значение в математике, обосновано хуже всего. Удивительно, что многие из результатов, несмотря на всё сказанное, верны. Я пытаюсь понять, в чем здесь причина. Это чрезвычайно интересный вопрос.

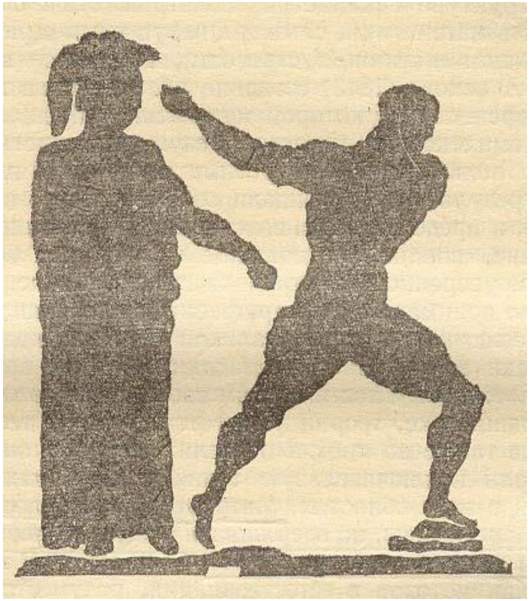
Как не все люди склонны топить свои печали в алкоголе, так и далеко не все математики старались заглушить свое беспокойство по поводу необоснованности математических понятий, превознося успехи математики в описании и предсказании физических явлений. Но утешение, которое эти более отважные люди искали в убеждения, что они открывают детали замысла самого творца, было сведено на нет, когда в конце XVIII в. естествоиспытатели отказались от идеи о божественном плане творения (гл. IV). Утратив столь мощную духовную поддержку, математики сочли своим долгом критически пересмотреть полученные ранее результаты – и обнаружили нечетко сформулированные понятия, отсутствие доказательств в одних случаях и неадекватность существующих доказательств в других, противоречия и полную неразбериху относительно того, что правильно и что неправильно в полученных ранее результатах. В конце XVIII в. математики осознали, что созданная ими наука отнюдь не была тем образцом строгости, каким ее считали. Вместо дедуктивных рассуждений в ней широко использовалась интуиция, геометрическая наглядность, физические соображения, принципы, взятые «с потолка» (например, принцип перманентности форм), а в качестве аргумента для обоснования принимаемого обращались к метафизике.

Идеал логической структуры, несомненно, был выяснен и провозглашен древними греками. Немногих математиков, задавшихся целью достичь его в арифметике, алгебре и анализе, поддерживала вера, что по крайней мере в одном весьма важном случае – в евклидовой геометрии – столь высокий идеал был достигнут. А если кому-то удалось однажды взойти на Олимп, считали они, то не исключено, что и другие сумеют покорить вершину. Эти математики и не предполагали, что подведение строгого обоснования под всю существующую математику окажется задачей несравненно более трудной и тонкой, чем можно было представить в середине XIX в. Не могли они предвидеть и новых трудностей, которые возникнут на их пути.

VIII. Нелогичное развитие: у врат рая

Можно сказать, что ныне достигнута абсолютная строгость.[24]

Анри Пуанкаре



Основатели так называемого критического движения в математике сознавали, что на протяжении более двух тысячелетий математики бродили в непролазных дебрях интуитивных представлений, правдоподобных аргументов, индуктивных рассуждений и формального манипулирования символами. Они предложили подвести прочный логический фундамент под те разделы математики, где он отсутствовал, исключить противоречия и те понятия, которые не имели четких определений, а также усовершенствовать обоснование таких разделов математики, как евклидова геометрия. Осуществление этой программы началось в 20-х годах XIX в., хотя в тот период критическое движение затронуло лишь немногих математиков. Когда исследования по неевклидовой геометрии приобрели более широкую известность, это, естественно, весьма стимулировало критическое движение, поскольку были обнаружены существенные изъяны в структуре евклидовой геометрии: стало очевидным, что даже эта часть математики, слывшая нерушимым оплотом и недосягаемым эталоном «истинной» строгости, нуждается в критическом пересмотре. А вскоре (1843) создание кватернионов поставило под сомнение уверенность, с которой математики обращались с вещественными и комплексными числами. Разумеется, многие математики по-прежнему пользовались нестрогими рассуждениями и, получая правильные результаты, убеждали себя в том, что как их доказательства, так и представления, изложенные на страницах учебников по математике, вполне обоснованны и логичны. Однако теперь подобной самоуверенностью страдали далеко не все.

Прекрасно понимая, что от претензий математики на роль носительницы абсолютных истин о реальном мире необходимо отказаться, критически мыслившие математики в то же время отдавали должное колоссальным достижениям своей науки в механике, акустике, гидродинамике, теории упругости, оптике, теории электромагнетизма, а также во многих отраслях техники; они по достоинству оценивали исключительную точность даваемых математикой предсказаний в этих областях. Математика сражалась под непобедимым знаменем истины, но одерживать победы ей позволяла какая-то скрытая и даже таинственная сила. Необычайная эффективность математических методов в естествознании, разумеется, нуждалась в объяснении (гл. XV), но отрицать мощь математики как инструмента познания и отмахиваться от нее не осмеливался никто. Без сомнения, эту мощь не следовало подрывать, погружаясь в лабиринты логических трудностей и противоречий. И хотя математики, поступившись строгими обоснованиями, нарушили собственные принципы доказательности, в их намерения отнюдь не входило навсегда оставлять математику на прагматической основе. На карту был поставлен престиж математиков, ибо как иначе они могли провести грань, отделяющую их возвышенную деятельность от прозаической работы инженеров и ремесленников?

И некоторые математики вознамерились еще раз пройти по едва различимым следам прошлого, оставленным в процессе бурного развития своей науки, и проложить надежные пути к

[24] Пуанкаре А. *О науке*. – М.: Наука, 1983, с. 164.

тому, что уже достигнуто. Свои усилия они решили прежде всего направить на построение (или критическую перестройку) оснований математики.

Чтобы привести в порядок здание математики, требовались решительные и крутые меры. К тому времени уже стало ясно, что не существует твердой почвы, на которой можно было бы без опасений заложить фундамент математики: столь надежная на первый взгляд опора на истину оказалась обманчивой. Но, может быть, гигантское здание математики станет устойчивым, если под него подвести прочный фундамент иного рода, представляющий собой полную систему четко сформулированных аксиом, определений и явных доказательств всех результатов, сколь бы интуитивно очевидными они ни казались? Основной акцент делался не на истинность утверждений, а на их логическую совместимость, т.е. непротиворечивость. Теснейшая зависимость между аксиомами и теоремами должна была придать устойчивость всему зданию математики. Отдельные части этого здания оказались бы накрепко стянутыми скрепами независимо от того, насколько прочно само оно опирается на землю. Так колеблется под напором ветра гигантский небоскреб, оставаясь тем не менее единой, цельной конструкцией от крыши до фундамента.

Математики начали с оснований математического анализа. Но поскольку математический анализ предполагает использование арифметики вещественных чисел и алгебры, не имевших обоснования, нелогичность такого шага станет более очевидной, если обратиться к следующей аналогии. Представьте себе, что владелец пятидесятиэтажного дома со множеством жильцов, битком набитого мебелью и различной утварью, узнав о шаткости здания, решает перестроить его – и начинает капитальный ремонт с двадцатого этажа!

Но при всей кажущейся нелогичности выбор отправной точки для перестройки математики всё же имел объяснение. К началу XIX в. различные типы чисел стали настолько привычными, что, хотя их использование и не было обосновано в рамках формальной логики, сами по себе свойства чисел не вызывали никаких сомнений. Не возникало трудностей и с применением евклидовой геометрии, хотя она и утратила ореол непогрешимости: безотказное служение человечеству на протяжении двух тысячелетий вселяло уверенность в те ее положения, которые не удавалось обосновать с помощью логики. Однако математический анализ был постоянной мишенью для критики. В этом обширном разделе математики встречались нестрогие доказательства, парадоксы и даже противоречия. К тому же многие результаты не были подкреплены даже практически.

В начале XIX в. проблема строгого обоснования математического анализа привлекла внимание трех мыслителей: священника, философа и математика Бернарда Больцано, Нильса Хенрика Абеля и Огюстена Луи Коши. К сожалению, Больцано жил в Праге, и его работы долгие годы оставались неизвестными. Абель умер в возрасте 27 лет и не успел продвинуться в обосновании анализа сколько-нибудь существенно. Коши работал в Париже, столице математического мира того времени, и к 20-м годам XIX в. имел репутацию одного из величайших математиков мира. Именно поэтому его заслуги в движении за обоснование математики получили наибольшее признание, именно поэтому он оказал наибольшее влияние на своих современников.

Коши решил построить обоснование математического анализа на понятии числа. Почему именно это понятие привлекло его внимание? Англичане, следуя Ньютону, пытались обосновать математический анализ, используя геометрию, – и потерпели неудачу. Коши понимал, что геометрия не может служить основой математического анализа. К тому же математики континентальной Европы, следуя Лейбницу, всегда использовали аналитические методы. Кроме того, хотя к 20-м годам XIX в. работы по неевклидовой геометрии не получили еще широкой известности, математики, по-видимому, были достаточно наслышаны о них, что побуждало их относиться к геометрии с некоторым недоверием. С другой стороны, в царстве чисел математики чувствовали себя достаточно уверенно вплоть до 1843 г., когда Гамильтон создал свои кватернионы; впрочем, даже это знаменательное событие первоначально не вызвало ни малейшего сомнения в том, что с вещественными числами все обстоит благополучно.

Коши поступил весьма мудро, решив построить математический анализ на понятии предела. Как это неоднократно случалось в истории математики, избранный Коши правильный подход уже предлагался ранее некоторыми проницательными умами. Еще в XVII в. Джон Валлис в «Арифметике бесконечно малых» (1655) и шотландский профессор Джеймс Грегори в «Истинной квадратуре окружности и гиперболы» (1667), а затем в XVIII в. Д'Аламбер со всей определенностью указали на понятие предела как на наиболее подходящую основу построения анализа.[25] Особое значение имели взгляды Д'Аламбера, базировавшиеся на трудах Ньютона, Лейбница и Эйлера. Свое понимание предела Д'Аламбер отчетливо сформулировал в статье «Предел», написанной для «Энциклопедии» (1751–1765):

> Говорят, что одна величина есть предел другой величины, если вторая величина может приблизиться к первой настолько, что будет отличаться от нее меньше чем на любую заранее заданную сколь угодно малую величину, хотя величина, которая стремится к другой величине, никогда не может превзойти ее[26]...
>
> Теория пределов составляет основу истинной метафизики дифференциального исчисления...

Д'Аламбер написал для «Энциклопедии» также статью «Дифференциал», в которой дал обзор работ Барроу, Ньютона, Лейбница, Ролля и других математиков и утверждал, что дифференциал – бесконечно малая величина, т.е. меньше любой «наперед заданной величины». Д'Аламбер счел нужным пояснить, что использует такую терминологию, следуя установившейся традиции. Что же касается самой терминологии, то она, по мнению Д'Аламбера, отличается еще большей краткостью и неясностью, чем подлежащее определению понятие. Правильная терминология и правильный подход должны быть основаны на понятии предела. Д'Аламбер критиковал Ньютона за то, что тот «объяснял» производную как скорость: ведь ясного представления о мгновенной скорости не существует, и такое «объяснение», по мнению Д'Аламбера, вводит в математику чисто физическое понятие – движение. В своем сочинении «Разное» (*Mélanges*, 1767) Д'-Аламбер повторил: «Любая величина есть либо нечто, либо ничто. Если величина есть нечто, то ей не дано исчезнуть бесследно. Если величина есть ничто, то она исчезает полностью». Д'Аламбер указал также на понятие предела. Но сам он не развил свою идею о пределе применительно к обоснованию математического анализа, и его современники не смогли оценить ее по достоинству.

Концепцию предела можно также обнаружить в «Размышлениях о метафизике исчисления бесконечно малых» Карно, в работе Люилье от 1786 г., удостоенной премии Берлинской академии наук, и в работе Карно, не получившей премии, но тем не менее удостоенной похвального отзыва той же академии. Весьма возможно, что все эти работы оказали влияние на формирование взглядов Коши. Во всяком случае, во введении к знаменитому ныне «Курсу алгебраического анализа» (*Cours d'analyse algébrique*, 1821) Коши высказался со всей определенностью: «Что же касается методов, то я стремился придать им ту степень строгости, которая достижима в математике».

Несмотря на слово «алгебраический», которое Коши вынес в заголовок своего курса, он не разделял традиционной веры в «общность алгебры». Коши имел здесь в виду рассуждения, неявно используемые его современниками: то, что истинно для вещественных чисел, истинно и для комплексных чисел; то, что истинно для сходящихся рядов, истинно и для расходящихся рядов; то, что истинно для конечных величин, истинно и для бесконечно малых величин. Коши очень тщательно определил и установил свойства основных понятий математического анализа: функции, предела, непрерывности, производной и интеграла. Он также ввел различие между бесконечными рядами, имеющими сумму в указанном им смысле, и бесконечными рядами, не имеющими такой суммы, т.е. различие между <u>сходящимися</u> и <u>расходящимися</u> рядами. Последние Коши объявил «вне закона»[27]. В октябре 1826 г. Абель имел все основания сообщить в письме своему бывшему учителю Хольмбе, что Коши «в настоящее время единственный, кто знает, как следует действовать в математике». Далее Абель называет Коши глупцом и фанатиком, но замечает, что тот по крайней мере считает необходимым «воздать дьяволу дьяволово».

---

[25] **Яглом:** Концепцию предела как исходного пункта математического анализа иногда связывают также и с Ньютоном, различавшим «первое число» (с которого переменная начинает изменение) и «последнее число» (предел (!) – значение, к которому она приходит) и придававшим особое значение «последним числам». Однако увлеченный физической интерпретацией анализа (производная как скорость), Ньютон не потрудился даже дать понятию «последнего числа» сколько-нибудь отчетливое определение, что лишало основанные на этом понятии конструкции доказательной силы.

[26] **Яглом:** В данном Д'Аламбером определении предела ныне вызывает сомнение лишь замечание о том, что стремящаяся к a величина не может a превзойти; Д'Аламбер требовал, чтрбы из $x \to a$ следовало постоянство знака разности $x—a$, в то время как Коши это последнее условие отбросил.

[27] Вряд ли было бы уместно входить здесь в технические детали приводимых Коши определений и доказательств. Для нас важно лишь подчеркнуть, что именно Коши приступил к планомерному обоснованию математического анализа.

Хотя Коши поставил своей целью обоснование математического анализа и заявил в переиздании своего курса (1829), что достиг мыслимых пределов строгости, он допустил немало ошибок, впрочем вполне понятных, если учесть тонкость затронутых им понятий. Приведенные Коши определения функции, предела, непрерывности и производной по существу были правильными, но язык, которым ему приходилось пользоваться, не отличался ни ясностью, ни точностью. Подобно своим современникам, Коши был убежден, что из непрерывности следует дифференцируемость (гл. VII), и сформулировал множество теорем, в условиях которых предполагал только непрерывность, тогда как в доказательстве использовал дифференцируемость, причем упорствовал в своих заблуждениях, даже когда ему указывали на ошибку. Введя со всеми необходимыми оговорками определение столь важного понятия, как «определенный интеграл», Коши намеревался показать, что для любой непрерывной функции значение такого интеграла существует и единственно; однако предложенное им доказательство оказалось ошибочным (поскольку Коши не сознавал необходимости введения более тонкого понятия – **равномерной** непрерывности)[28]. Ясно понимая различие между сходящимися и расходящимися рядами, Коши тем не менее неоднократно предлагал неверные теоремы о расходящихся рядах и приводил ошибочные доказательства. Так, он утверждал – и более того, доказывал, – что сумма бесконечного ряда непрерывных функций непрерывна (это верно лишь при условии равномерной непрерывности). Коши почленно интегрировал бесконечные ряды, утверждая, что проинтегрированный ряд соответствует интегралу от функции, представленной исходным рядом (и в этом случае его ошибка была обусловлена непониманием необходимости равномерной сходимости). Коши предложил критерий сходимости последовательности, ныне известный под названием критерия Коши, но не сумел доказать его достаточность, так как для доказательства этого требовалось использовать такие свойства вещественных чисел, которые не были известны ни Коши, ни его современникам. Коши был также убежден, что если функция двух переменных имеет в некоторой точке предел, когда каждая из переменных в отдельности стремится к точке, то эта функция должна стремиться к пределу и в том случае, когда обе переменные изменяются одновременно и (переменная) точка $M(x, y)$ стремится к рассматриваемой точке $N\ (a, b)$[29].

С самого начала работы по обоснованию математического анализа носили сенсационный характер. После заседания Парижской академии наук, на котором Коши изложил свою теорию сходимости рядов, Лаплас поспешил домой и оставался там взаперти до тех пор, пока не проверил на сходимость все ряды, которые он использовал в своей «небесной механике». Велика же была его радость, когда он обнаружил, что ряды сходятся.

Как ни парадоксально, сам Коши отнюдь не был склонен сковывать себя требованиями математической строгости. Написав три учебника (1821, 1823 и 1829) главным образом с целью строгого обоснования математического анализа, Коши в своих исследованиях продолжал полностью игнорировать строгость. Дав определение непрерывности, Коши никогда не доказывал, что рассматриваемые им функции непрерывны. Неоднократно подчеркивая важность сходимости рядов и несобственных интегралов, Коши оперировал с бесконечными рядами, преобразованиями Фурье и несобственными интегралами так, словно никаких проблем сходимости не существовало. Определив производную как предел, Коши предложил и чисто формальный подход, аналогичный предложенному Лагранжем (гл. VI). Коши допускал и полусходящиеся (осциллирующие) ряды, например $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ и перестановку членов в так называемых условно сходящихся рядах (некоторых рядах с положительными и отрицательными членами). Совершал он и другие «преступления», но безошибочная интуиция позволяла ему угадывать истину даже в тех случаях, когда ему не удавалось установить ее в соответствии со стандартами строгости, присущими его же собственным учебникам математического анализа.

Труды Коши вызвали к жизни многочисленные работы по обоснованию математического анализа. Но основной вклад в решение этой важной проблемы был внесен другим выдающимся математиком – Карлом Вейерштрассом (1815–1897). Именно ему суждено было завершить обоснование математического анализа. Результаты своих исследований Вейерштрасс начал

---

[28] **Яглом:** Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной*, скажем на интервале $a < x < b$, если для каждой точки x этого интервала и каждого (сколь угодно малого!) числа $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что $y(x) - y(x_0) < \varepsilon$, коль скоро $|x - x_0| < \delta$, и *равномерно непрерывной* на этом интервале, если соответствующее значение δ можно считать не зависящим от x_0 (а только от ε); тонкое (и важное) различие между непрерывностью и равномерной непрерывностью было осознано лишь Кантором и Вейерштрассом.

[29] **Яглом:** Неверность этого утверждения Коши следует из рассмотрения простейшей функции $Z = Z(x, y)$, где $Z=0$, при $xy = 0$ и $Z = 1$ при $xy \neq 0$.

излагать в лекциях, прочитанных в 1858–1859 гг. в Берлинском университете. Самые ранние из сохранившихся конспектов лекций Вейерштрасса были сделаны его учеником Германом Амандусом Шварцем весной 1861 г. Труды Вейерштрасса полностью освободили математический анализ от какой бы то ни было зависимости от движения, интуитивных представлений и геометрической наглядности, которые во времена Вейерштрасса выглядели уже довольно подозрительно.

К 1861 г. Вейерштрасс отчетливо понимал, что вопреки широко распространенному убеждению (гл. VII) дифференцируемость отнюдь не следует из непрерывности. Мир был потрясен, когда в 1872 г. Вейерштрасс представил Берлинской академии пример функции, непрерывной при всех вещественных x, но не дифференцируемой ни при одном значении x. (Он сам не опубликовал свой пример; это было сделано, разумеется со ссылкой на Вейерштрасса, Полем Дюбуа-Реймоном в 1875 г. Ранее Вейерштрасса примеры непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции были с помощью геометрических соображений построены Больцано в 1830 г. и Шарлем Селирье примерно в то же время, но второй из этих примеров был опубликован лишь в 1890 г., а первый – еще позже; в силу этого Больцано и Селирье не оказали влияния на развитие математики.)

То обстоятельство, что Вейерштрасс привел свой пример на позднем этапе развития математического анализа, следует расценивать как удачу, ибо, как сказал в 1905 г. Эмиль Пикар, «если бы Ньютон и Лейбниц знали, что непрерывные функции необязательно должны иметь производные, то дифференциальное исчисление никогда не было бы создано». Строгое мышление может стать препятствием для творческого начала.

Коши и даже Вейерштрасс – в начале своей деятельности по обоснованию математического анализа – рассматривали все свойства вещественных и комплексных чисел как нечто данное, не нуждающееся в обосновании. Первый шаг к логическому обоснованию вещественных и комплексных чисел был сделан в 1837 г. создателем кватернионов Гамильтоном. Гамильтон знал, что комплексные числа можно использовать для представления векторов на плоскости, и пытался найти (гл. IV) числа с тремя единицами, которые могли бы служить представлением векторов в пространстве. Гамильтон стал изучать свойства комплексных чисел с тем, чтобы обобщить их. Одним из результатов, изложенных в его работе «Алгебраические пары, с предварительным очерком о времени», было логическое обоснование комплексных чисел, при построении которого Гамильтон, однако, считал свойства вещественных чисел общеизвестными. Вместо комплексных чисел $a + b\sqrt{-1}$ Гамильтон ввел упорядоченные пары (a, b) вещественных чисел и определил операции над этими парами так, чтобы результаты совпадали с результатами операций, производимых над комплексными числами $a + b\sqrt{-1}$.[30] Следует заметить, что Гамильтону пришлось создавать новую теорию комплексных чисел, поскольку для него, как и для всех его предшественников, были неприемлемы не только символ $\sqrt{-1}$, но до какого-то времени и отрицательные числа.

Позднее в одной из своих работ Гамильтон писал:

> Настоящая теория пар опубликована, дабы продемонстрировать скрытый смысл [комплексных чисел] и показать на этом примечательном примере, что выражения, которые все считали чисто символическими и не допускавшими интерпретации, входят в мир идей, обретая реальность и значимость.

Далее в той же статье говорится следующее:

> В теории отдельных чисел символ $\sqrt{-1}$ *лишен всякого смысла* [курсив Гамильтона] и означает невозможное извлечение корня, или мнимое число, но в теории пар тот же символ $\sqrt{-1}$ обретает смысл и означает возможное извлечение корня, или вещественную пару, а именно (как мы только что убедились) главное значение квадратного корня из пары $(-1, 0)$. Следовательно, знак $\sqrt{-1}$ может быть надлежащим образом использован во второй теории, но отнюдь не в первой, и мы можем, если угодно, написать для любой пары (a_1, a_2)
> $$(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}$$

---

[30] **Яглом:** Другими словами, Гамильтон полагал $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Подобное же построение теории комплексных чисел ранее (около 1840 г.) было дано одним из создателей неевклидовой геометрии Я. Бойаи в работе, представленной на конкурс, объявленный Лейпцигским научным обществом. Но, к сожалению, эта работа не была должным образом оценена жюри конкурса и потому осталась неопубликованной.

...и интерпретировать символ √–1 в том же выражении как обозначающий вторую единицу, или чисто вторичную пару (0, 1).

Так Гамильтон убрал то, что он назвал «метафизическими камнями преткновения» в системе комплексных чисел.

В свою теорию пар Гамильтон включил и свойства вещественных чисел – пар вида (a, 0). В работе от 1837 г. он попытался логически обосновать систему вещественных чисел. Исходя из понятия времени, Гамильтон вывел свойства положительных целых чисел, а затем распространил эти свойства на рациональные (положительные и отрицательные целые числа и дроби) и иррациональные числа. Но развитая Гамильтоном теория была логически весьма несовершенна и особенно несостоятельна во всем, что касалось иррациональных чисел. Она была не только неясно изложена, но и неверна. Математический мир вполне справедливо просто не заметил эту работу Гамильтона. Интерес Гамильтона к обоснованию вещественных и комплексных чисел был ограниченным. Истинной целью его исследований были кватернионы. Но когда Гамильтону случалось работать в области математического анализа, он, подобно большинству своих современников, без малейших колебаний свободно оперировал свойствами вещественных и комплексных чисел.

Вейерштрасс первым понял, что обоснование математического анализа останется незавершенным, если не добиться более глубокого понимания системы вещественных чисел, и первым предложил строгое определение и вывод свойств иррациональных чисел на основе известных свойств рациональных чисел. Свои исследования Вейерштрасс начал еще в 40-х годах XIX в., но его результаты долгое время оставались неопубликованными; впервые они стали известны лишь из лекций, прочитанных Вейерштрассом в Берлинском университете в 60-е годы.

Некоторые другие математики, прежде всего Рихард Дедекинд и Георг Кантор, также правильно определили иррациональные числа и доказали их свойства, приняв за исходные свойства рациональных чисел. Работы этих математиков были опубликованы в 70-х годах XIX в. Дедекинд, как и Вейерштрасс, отчетливо сознавал необходимость ясной теории иррациональных чисел для последовательного изложения математического анализа. В небольшой книге «Непрерывность и иррациональные числа» (1872) [46][31] Дедекинд писал, что начиная с 1858 г. он «острее, чем когда-либо, ощущал отсутствие строгого обоснования арифметики». В работе о теоремах анализа (гл. IX) Кантор также признавал необходимость последовательной теории иррациональных чисел. Работы Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора позволили математикам наконец доказать, что $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Однако логическое обоснование рациональных чисел по-прежнему отсутствовало. Дедекинд понимал это и в работе «Что такое числа и для чего они служат» (1888) [47][32] описал основные свойства чисел, которые могли бы стать основой аксиоматического подхода к рациональным числам. Джузеппе Пеано (1858–1932), используя идеи Дедекинда и некоторые идеи, заимствованные из «Учебника арифметики» (1861) Германа Грассмана, построил в работе «Элементы арифметики» (1889) теорию рациональных чисел из аксиом, описывающих свойства положительных целых (натуральных) чисел.[33] Наконец логическая структура систем вещественных и комплексных чисел была создана.

Как побочный результат обоснования числовой системы была решена проблема обоснования привычной всем алгебры. Почему, свободно манипулируя символами так, как если бы они были натуральными числами, мы получаем верные результаты и в том случае, если вместо символов подставляем вещественные или комплексные числа? Это происходит потому, что вещественные и комплексные числа обладают такими же формальными свойствами, что и натуральные числа. Если не гнаться за строгостью, то можно сказать, что верно не только равенство $2{\cdot}3 = 3{\cdot}2$, но и равенство $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$.

Иначе говоря, ab можно заменить на ba независимо от того, означают ли a и b натуральные или иррациональные числа.

Весьма примечательна последовательность, в которой развивались события. Вместо того, чтобы, начав с целых чисел и дробей, перейти к иррациональным и комплексным числам,

[31] Дедекинд Р. *Непрерывность и иррациональные числа*. – Одесса: Матезис, 1923.

[32] Дедекинд Р. *Что такое числа и для чего они служат*. – Казань: Изд-во Императорского университета, 1905.

[33] **Яглом:** Систему аксиом, описывающую натуральные числа, несколько раньше (1888) Дж. Пеано указал Р. Дедекинд.

алгебре и математическому анализу, ученые решали проблему обоснования математики в обратном порядке. Они действовали так, будто крайне неохотно затрагивали проблемы, которые, как всем было ясно, можно было до поры до времени обходить стороной, и принимались за обоснование лишь в тех случаях, когда это вызывалось настоятельной необходимостью. Как бы то ни было, в 90-е годы XIX в., через каких-нибудь шесть тысяч лет (!) после того, как египтяне и вавилоняне «пустили в оборот» целые числа, дроби и иррациональные числа, математики смогли наконец доказать, что 2 + 2 = 4. Стало ясно, что даже великие математики должны заботиться о математической строгости.

В конце XIX в. была решена еще одна выдающаяся проблема. На протяжении 60 лет – с того времени, когда Гаусс выразил уверенность в непротиворечивости построенной им неевклидовой геометрии, вероятно, считая, что она может явиться геометрией реальной Вселенной, и вплоть до начала 70-х годов XIX в., когда были опубликованы работы Гаусса по неевклидовой геометрии и (впоследствии прославленная, а первоначально не оцененная) пробная лекция Римана на получение звания приват-доцента, – большинство математиков не принимали неевклидову геометрию всерьез (гл. IV). Выводы, напрашивающиеся из самого существования неевклидовой геометрии, настолько пугали своей непривычностью, что ученые предпочитали не задумываться над ними. У математиков всё еще теплилась надежда, что в один прекрасный день в каждой из нескольких предложенных неевклидовых геометрий вскроются противоречия и эти странные творения человеческой фантазии можно будет предать забвению как бессмысленные.

К счастью, вопрос о непротиворечивости элементарных неевклидовых геометрий наконец удалось разрешить. Метод, которым была решена эта проблема, заслуживает – особенно в свете последующих событий – того, чтобы познакомиться с ним подробнее. Одна из неевклидовых геометрий – так называемая удвоенная эллиптическая геометрия, идея которой содержалась в лекции Римана 1854 г., – существенно отличается от евклидовой геометрии. В этой геометрии нет параллельных; любые две прямые пересекаются в двух точках; сумма внутренних углов треугольника больше 180°. Многие другие ее теоремы также отличаются от своих евклидовых аналогов. В 1868 г. Эудженио Бельтрами (1835–1900) обнаружил, что удвоенная эллиптическая геометрия плоскости применима к поверхности сферы, если прямые в удвоенной эллиптической геометрии интерпретировать как большие окружности на сфере (окружности, центры которых совпадают с центром сферы, например окружности, образуемые меридианами).

Может показаться, что предложенная Бельтрами интерпретация удвоенной эллиптической геометрии неприемлема. Создатели всех неевклидовых геометрий показали, что в их геометриях прямые ничем не отличаются от евклидовых прямых. Напомним, однако, что предложенные Евклидом определения прямой и других понятий (гл. V) были излишними. В любой области математики, как подчеркивал Аристотель, мы должны начинать наши построения с неопределяемых понятий. От прямых требуется лишь, чтобы они удовлетворяли аксиомам. Но большие окружности на сфере удовлетворяют всем аксиомам удвоенной эллиптической геометрии. А поскольку аксиомы удвоенной эллиптической геометрии применимы к большим окружностям на сфере, к этим окружностям должны быть применимы и теоремы удвоенной эллиптической геометрии, так как они логически вытекают из аксиом.

Если исходить из интерпретации прямой как большой окружности, то непротиворечивость удвоенной эллиптической геометрии устанавливается следующим образом. Если бы в удвоенной эллиптической геометрии существовали противоречивые теоремы, то должны были бы существовать противоречивые теоремы и в сферической геометрии – геометрии на поверхности сферы. Но сфера – один из объектов, изучаемых евклидовой геометрией. Следовательно, если евклидова геометрия непротиворечива, то должна быть непротиворечива и удвоенная эллиптическая геометрия.

Доказать непротиворечивость гиперболической геометрии (гл. IV) оказалось не так просто. Но как непротиворечивость удвоенной эллиптической геометрии удалось доказать на модели – сферической поверхности, так и непротиворечивость гиперболической геометрии была доказана на модели – несколько более сложной поверхности трехмерного евклидова пространства, изучаемой в (евклидовой!) дифференциальной геометрии. Нам нет необходимости описывать эту модель (см., например, [48][34]). Заметим лишь, что непротиворечивость гиперболической геометрии означает помимо прочего независимость аксиомы Евклида о параллельных от остальных

---

[34] Делоне Б.Н. Элементарное доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. – М.: Гостехиздат, 1956.

аксиом евклидовой геометрии. Действительно, если бы аксиома Евклида о параллельных не была независима от остальных аксиом евклидовой геометрии, т.е. если бы ее можно было вывести из них, то она была бы **теоремой** гиперболической геометрии, так как, за исключением аксиомы о параллельных, все остальные аксиомы гиперболической геометрии совпадают с аксиомами евклидовой геометрии. Но эта евклидова «теорема» противоречила бы аксиоме о параллельных гиперболической геометрии и гиперболическая геометрия была бы противоречивой. Следовательно, полуторавековые попытки вывести аксиому Евклида о параллельных (пятый постулат Евклида) из других аксиом евклидовой геометрии были заранее обречены на провал.

Неевклидовы геометрии, задуманные как «геометрии реального пространства», где прямая имеет тот же смысл (тот же вид, то же строение), что и в евклидовой геометрии, оказались применимыми к фигурам, совершенно отличным от тех, которые имели в виду создатели неевклидовых геометрий, и это важное обстоятельство имело серьезные последствия: неевклидовы геометрии получили совершенно различные интерпретации, ибо (как мы уже неоднократно отмечали) в любой аксиоматике должны быть неопределяемые понятия, которым в принципе можно придать какой угодно смысл – только бы удовлетворялись определяющие эти понятия аксиомы. Интерпретации неевклидовых геометрий получили название моделей. Таким образом, физический смысл той или иной математической теории оказался необязательным: одна и та же теория могла применяться к совершенно различным физическим или математическим ситуациям.

Непротиворечивость неевклидовых геометрий была доказана в предположении, что евклидова геометрия непротиворечива. У математиков 70–80-х годов прошлого века непротиворечивость евклидовой геометрии сомнений не вызывала. Несмотря на работы Гаусса, Лобачевского, Бойаи и Римана, евклидову геометрию продолжали считать естественной и непременной геометрией реального мира, а сама мысль о том, что геометрия реального мира может быть внутренне противоречивой, казалась нелепой. Тем не менее непротиворечивость евклидовой геометрии не была доказана логически.

Многие математики, относившиеся к неевклидовой геометрии почти презрительно, с удовлетворением восприняли доказательства непротиворечивости ее различных вариантов совсем по другой причине: дело в том, что хотя неевклидовы геометрии обретали смысл, но, как следовало из приведенных доказательств, лишь как модели, которые строились в рамках евклидовой геометрии. Это позволяло принять их как геометрии, реализуемые на тех или иных поверхностях, а не как геометрии, применимые к физическому миру, где прямые понимались в обычном смысле. Разумеется, подобный подход полностью противоречил взглядам Гаусса, Лобачевского и Римана (а в несколько ином смысле – и Бойаи).

Нерешенной оставалась лишь одна фундаментальная проблема, связанная с наведением строгости в математике: в основаниях евклидовой геометрии обнаружились изъяны. Однако в отличие от математического анализа природа геометрии и ее понятий была ясна. Установить неопределяемые термины, уточнить определения, восполнить недостающие аксиомы и завершить доказательства было сравнительно простой задачей. Она была решена независимо Морицем Пашем (1843–1930), Джузеппе Веронезе (1854–1917) и Марио Пиери (1860–1904). Давид Гильберт (1862–1943), по достоинству оценивший вклад Паша, предложил свой вариант аксиоматического построения евклидовой геометрии, который наиболее широко используется в наши дни. На едином дыхании он заложил основания неевклидовой геометрии Ламберта, Гаусса, Лобачевского и Бойаи, а также других геометрий, созданных в XIX в., главным образом проективной геометрии.[35]

Так, к началу XX в. математическая строгость восторжествовала в арифметике, алгебре, математическом анализе (начала которого базировались на аксиомах для целых чисел) и геометрии (на основе аксиом для точек, прямых и других геометрических объектов). Многих математиков соблазняла возможность пойти еще дальше и построить на понятии числа всю геометрию – план, осуществимый с помощью аналитической геометрии. Сама геометрия как

[35] **Яглом:** Первым автором, полностью решившим задачу обоснования евклидовой геометрии, был, по-видимому, итальянец М. Пиери, ученик Дж. Пеано. Несколько позже в том же 1899 г. появились в значительной степени основанные на более ранних исследованиях Паша «Основания геометрии» Д. Гильберта, где производилось тщательное выделение отдельных групп аксиом, описывающих то или иное из неопределяемых отношений между основными элементами (точками, прямыми и плоскостями): принадлежность (точки, прямой или плоскости); понятие «между» и т.д. В настоящее время имеется много разных систем обоснования евклидовой геометрии (см., например, [49: Яглом И.М. Аксиоматические обоснования евклидовой геометрии. В кн.: Новое в школьной математике. – М.: Знание, 1972, с. 40–63]).

таковая по-прежнему не вызывала у них доверия. У математиков еще не изгладился из памяти один из уроков, преподанных им неевклидовой геометрией, которая выявила серьезные изъяны в евклидовой геометрии, считавшейся до сих пор образцом математической строгости. Однако к началу XX в. программа сведения всей геометрии к числу не была выполнена. Тем не менее большинство математиков того времени говорили об арифметизации геометрии, хотя правильнее было бы говорить об арифметизации математического анализа. Так, на II Международном конгрессе математиков, состоявшемся в 1900 г. в Париже, Пуанкаре утверждал: «На сегодняшний день в математическом анализе остались только целые числа, а также конечные и бесконечные системы целых чисел, связанных между собой системой отношений равенства или неравенства. Математика, можно сказать, арифметизована». Паскалю принадлежит следующее высказывание: «*Tout ce qui passe la Géométrie nous passe*» (всё, что выходит за рамки Геометрии, выходит за рамки нашего понимания). В начале XX в. математики предпочитали говорить иначе: «*Tout ce qui passe l'Arithmétique nous passe*» (всё, что выходит за рамки Арифметики, выходит за рамки нашего понимания).

Движения, первоначально ставившие перед собой довольно ограниченные цели, по мере своего разрастания нередко начинают охватывать гораздо более широкий круг проблем, чем ранее предполагалось. Критическое движение в области оснований математики со временем сделало мишенью своих атак и логику – законы мышления, используемые в математических доказательствах при переходе от одного заключения к другому.

Начало логике как науке было положено сочинением Аристотеля «Органон» (Инструмент [мышления], около 300 г. до н.э.) [см. прим. 3 к гл. IV][36]. По признанию Аристотеля, он выделил законы мышления, используемые математиками, абстрагировал их от частностей и обнаружил, что эти законы обладают универсальной применимостью. Так, один из фундаментальных законов аристотелевой логики, закон исключенного третьего, гласит: всякое имеющее смысл высказывание либо истинно, либо ложно. Закон исключенного третьего Аристотель мог абстрагировать, например, из такого математического утверждения, как «всякое целое число либо четно, либо нечетно». Логика Аристотеля в основном представляла собой силлогистику – набор правил о выводе новых утверждений из уже известных.

На протяжении более чем двух тысячелетий логика Аристотеля не вызывала возражений у мыслителей, в частности у математиков. Правда, Декарт, подвергавший сомнению любые убеждения и учения, задал вопрос: откуда нам известно, что законы логики правильны? И сам же ответил на него: господь бог не стал бы вводить нас в заблуждение. Так Декарт обосновал для себя всеобщую убежденность в правильности законов логики.

Декарт и Лейбниц надеялись, что им удастся расширить логику до универсальной науки о мышлении, применимой ко всем областям человеческого разума, – построить своего рода универсальное исчисление мышления. Они намеревались уточнить и облегчить применение законов мышления введением буквенной символики, подобной алгебраической. О математическом методе Декарт отзывался так: «Это более мощный инструмент познания, чем все остальные, что дала нам человеческая деятельность, ибо он служит источником всего остального».

По замыслам Лейбница, имевшим несколько более конкретный характер, чем планы Декарта, для построения универсальной логики необходимы три основных элемента. Первый элемент – универсальный научный язык (*characteristica universalis*), частично или полностью символический и применимый ко всем истинам, выводимым посредством рассуждений. Вторая составная часть – исчерпывающий набор логических форм мышления (*calculus ratiocinator*), позволяющих осуществить любой дедуктивный вывод из начальных принципов. Третий элемент – набор основных понятий (*ars combinatoria*), через которые определяются все остальные понятия, своего рода алфавит мышления, позволяющий сопоставить символ каждой простой идее. Комбинируя символы и производя над ними различные операции, мы получаем возможность выражать и преобразовывать более сложные понятия.

К числу фундаментальных принципов следует отнести, например, закон тождества: *A* есть *A* (и *A* не есть «не *A*»). Из таких законов можно было бы вывести все мыслимые истины, включая

---

[36] **В.Э.:** Это примечание звучит так: – **Яглом:** Андроник Родосский, выпустивший в I в. до н.э. собрание сочинений Аристотеля, назвал «Органоном» свод работ последнего по логике и строению наук, написанных независимо одна от другой и, видимо, в разное время; названием «Новый органон» Бэкон подчеркивал и близость свою к Аристотелю (по теме), и резкое различие (по установкам).

математические. Кроме того, существуют фактические истины, но они в значительной мере опираются на так называемый принцип достаточного основания, состоящий в том, что эти истины могут быть именно такими, а не какими-либо иными. Лейбниц был основоположником символической логики, однако его работы в этой области оставались неизвестными до 1901 г.

Ни Декарту, ни Лейбницу не удалось развить последовательно символическое исчисление логики. Они создали лишь отдельные фрагменты.[37] Вплоть до XIX в. логика Аристотеля сохраняла свои позиции. В 1797 г. Кант во втором издании «Критики чистого разума» назвал логику «замкнутым и полным учением». Хотя до начала XX в. большинство математиков в своих рассуждениях продолжали следовать неформальным, изложенным лишь словесно, а не символически, принципам аристотелевой логики, они пользовались и другими схемами рассуждений, не исследованными Аристотелем. Не вдаваясь в анализ используемых логических принципов, математики пребывали в уверенности, что их рассуждения не выходят за рамки адекватной дедуктивной логики. В действительности же они использовали интуитивно вполне разумные, но не сформулированные явно логические принципы.

В то время как внимание большинства математиков было сосредоточено на обосновании собственно математики, менее многочисленная группа занялась критическим пересмотром логики. Выдающихся успехов в этом направлении добился профессор математики Куинз-колледжа в Корке (Ирландия) Джордж Буль (1815–1864).[38]

В своей работе Буль, несомненно, вдохновлялся примером общей (или абстрактной) алгебры, основы которой были заложены кембриджской группой – Пикоком, Грегори и де Морганом (гл. VII). Хотя использованный этими авторами принцип перманентности форм в действительности не мог служить обоснованием алгебраических операций, производимых над буквенными коэффициентами с вещественными или комплексными значениями, Пикок, Грегори и де Морган косвенно способствовали возникновению нового взгляда на алгебру как на науку о символах и операциях, которые могут иметь любую природу и представлять любые объекты. Работа Гамильтона о кватернионах (1843) показала, что возможны другие алгебры, отличные от привычной алгебры вещественных и комплексных чисел. Обобщение алгебраических рассуждений в форме так называемой алгебры операторов предложил в 1844 г. Буль. Его также беспокоила мысль о том, что алгебра не обязательно должна заниматься рассмотрением одних лишь чисел и что законы алгебры не обязательно должны совпадать с законами арифметики вещественных и комплексных чисел. Упомянув об этом в начале своей работы «Математический анализ логики» (1847), Буль вскоре развил алгебру логики. Шедевром по праву считается работа Буля «Исследование законов мышления» (1854). Основная идея Буля, менее претенциозная, чем идея Лейбница об универсальной алгебре, и более близкая по духу лейбницевскому *calculus ratiocinator* (логическая форма мышления), состояла в том, что существующие законы мышления представимы в символическом виде, позволяющем придать более точный смысл обычным логическим рассуждениям и упростить их применение. В своей книге Буль так сформулировал программу построения алгебры логики:

---

[37] **Яглом:** Принадлежащие Лейбницу фрагменты «логического исчисления» были разработаны достаточно глубоко; однако они не удовлетворяли Лейбница, поскольку были весьма далеки от поставленной им (и, видимо, неразрешимой) задачи «свести любое рассуждение к вычислению», создать такое положение, при котором, по утопическим мечтам Лейбница, один из спорящих всегда смог бы сказать другому: «Вы утверждаете одно, я – другое; ну что же, проверим, кто из нас прав: вычислим, милостивый государь».

[38] **Яглом:** Дж. Буль родился в очень бедной семье мелкого торговца, в силу чего он сумел окончить лишь несколько начальных классов школы для бедных, которые, разумеется, ничего не дали ему в области математики. Все свои знания Буль приобрел путем самообразования. Стремясь разобраться в математике глубже, Буль обратился к трудам классиков науки; тогда и родились у него первые самостоятельные идеи, которые он изложил в статьях, направленных в «Кембриджский математический журнал». К счастью, редактору журнала, представителю «кембриджской группы» математиков Д. Грегори, поиски Буля оказались достаточно близкими. Именно с помощью «кембриджцев» Булю удалось в конце жиани стать профессором математики во вновь открытом католическом колледже (университете) в Корке. Характерно, что первая развернутая система формальной (символической) логики принадлежит самоучке Булю – не закончив даже средней школы, он тем самым не был связан путами традиционных взглядов и установок, смог взглянуть на математику свежим взглядом и оценить ее логический статут с той ясностью и полнотой, которая позволила Б. Расселу позже сказать: «Чистую математику открыл Буль в сочинении, которое называлось «Законы мысли».

> В предлагаемом вниманию читателей трактате мы намереваемся исследовать фундаментальные законы тех операций разума, посредством которых осуществляется мышление, дабы выразить их на символическом языке исчисления и на этой основе построить науку логики и ее метод.

Кроме того, Буля интересовали некоторые конкретные приложения логики, в частности к законам вероятности.

Буквенная символика обладает многими преимуществами. В ходе рассуждений тому или иному выражению иногда по ошибке можно придать смысл, отличный от первоначального, или употребить неправильное дедуктивное умозаключение. Так, при обсуждении света как оптического явления употребление выражения «повидать свет» может быть истолковано неверно (так как в обычной бытовой лексике оно означает «побывать во многих странах мира»). Но если свет как физическое явление обозначить, например, буквой l, то при любых преобразованиях буквенных выражений, содержащих l, эта буква будет означать только свет как физическое явление и ничего другого. Кроме того, все доказательства сводятся к преобразованию одних наборов символов в другие по заранее заданным правилам, заменяющим словесные формулировки законов логики. Правила преобразований выражают правильные законы логики в сжатом, четком и легко применимом виде.

Чтобы по достоинству оценить булеву алгебру логики, упомянем лишь некоторые из ее идей. Пусть символы x и y означают классы объектов, например класс собак и класс рыжих животных. Тогда xy означает класс объектов, принадлежащих одновременно классу x и классу y. Если x и y имеют предложенную нами интерпретацию, то xy означает класс рыжих собак. Равенство $xy = yx$ верно при любых x и y. Если z – класс белых объектов и если $x = y$, то $zx = zy$. Кроме того, из самого смысла «произведения» xy следует, что $xx = x$.

Символ $x + y$ означает класс объектов, принадлежащих <u>либо классу x, либо классу y, либо классам x и y одновременно</u>. (Это более поздняя модификация логических построений Буля, предложенная Уильямом Стенли Джевонсом (1835–1882)[39].) Так, если x – класс мужчин, а y – класс избирателей, то $x + y$ – класс мужчин и избирателей (включающий в себя помимо избирателей-мужчин также и избирателей-женщин). Нетрудно доказать, что если, скажем, z – класс людей старше 35 лет, то

$$z(x + y) = zx + zy.$$

Если x – некоторый класс объектов, то $1 – x$ (или $–x$) – множество всех объектов, не принадлежащих классу x. Так, если 1 – множество всех объектов, x – множество собак, то $1 – x$ (или $–x$) – множество всех объектов, не являющихся собаками. Соответственно $–(–x)$ означает множество собак. Равенство

$$x + (1 – x) = 1$$

означает, что все объекты либо относятся к собакам, либо нет. А это есть не что иное, как закон исключенного третьего для классов. Буль показал, как с помощью таких чисто алгебраических операций проводить рассуждения в самых различных областях.

Буль заложил также основы исчисления высказываний, хотя начало этой области логики восходит к стоикам (IV в. до н.э.). В интерпретации этого исчисления p, например, означает «Джон – человек». Утверждать p означает утверждать, что высказывание «Джон – человек» истинно. Тогда $1 – p$ (или $–p$) означает, что высказывание «Джон – человек» не истинно. Аналогично высказывание $–(–p)$ означает: «Неверно, что Джон не человек», т.е. «Джон – человек». Закон исключённого третьего для высказываний, гласящий, что любое высказывание либо истинно, либо ложно, Буль записывал в виде $p+(–p) = 1$, где 1 соответствует истине. Произведение pq истинно, когда истинны оба высказывания p и q, а сумма $p+q$ истинна, если истинно либо p, либо q (либо истинны оба высказывания).

Другое новшество было внесено де Морганом. В своем главном труде «Формальная логика» (1847) де Морган высказал идею о том, что логика должна заниматься изучением отношений в общем виде. Так, аристотелева логика занималась изучением отношения «быть» (x есть y). Классический пример: «Все люди смертны». Но аристотелева логика, по словам де Моргана, не в состоянии вывести из утверждения «Лошадь – животное» утверждение «Голова лошади – голова животного»: для этого необходимо ввести дополнительную посылку о том, что у всех животных есть головы. В сочинениях Аристотеля также есть фрагменты, посвященные

---

[39] **Яглом:** У самого Буля сумма $x + y$ обозначала класс объектов, принадлежащих либо x, либо y, но не x и y одновременно; сегодня в этом случае говорят не о сумме, а о «симметричной разности» x и y и пишут $x\Delta y$.

логике отношений, хотя писал он о них довольно невразумительно и сжато. Кроме того, многие труды Аристотеля и обобщения, сделанные средневековыми учеными, были безвозвратно утеряны к XVII в. В необходимости логики отношений убедиться нетрудно. Так, следующее рассуждение, построенное только на отношении «быть», как легко видеть, ложно:

A есть *p*;
B есть *p*.

Следовательно, *A* и *B* суть *p*.

Действительно, рассуждение

Джон – брат,
Питер – брат;
следовательно, Джон и Питер братья
(каждый доводится братом другому)

вполне может привести к неправильному заключению, если понятие «брат» расширить, включив в него и двоюродного брата. Аристотелевой логике не удалось построить логику отношений. На этот ее недостаток обращал внимание еще Лейбниц.

Отношения далеко не всегда удается перевести на язык субъекта и предиката, когда предикат лишь утверждает, что субъект принадлежит к задаваемому предикатом классу. Часто бывает необходимо рассматривать и такие утверждения, как «2 меньше 3» или «Точка *Q* лежит между точками *P* и *R*». Для подобных высказываний также необходимо определять, что означает их отрицание, т.е. обратное утверждение, сложное высказывание, составленное из нескольких таких высказываний, и т.д.

Логика отношений была развита в серии статей, опубликованных в 1870–1893 гг. Чарлзом Сандерсом Пирсом (1839–1914), и систематизирована Эрнстом Шредером (1841–1902). Пирс ввел специальную символику для обозначения высказываний, выражающих отношения. Так, символ l_{ij} означает, что i любит j. Построенная Пирсом алгебра была сложной и малополезной. Позднее мы увидим; как рассматривает отношения современная математическая логика.

Пирс внес в науку логики еще одно важное дополнение, которое лишь слегка затронул Буль: он подчеркнул важность пропозициональных функций (функций-высказываний). Подобно тому, как в математике мы рассматриваем функции, например $y = 2x$, отличая их от утверждений о конкретных числовых равенствах типа $10 = 2 \cdot 5$, так высказывание «Джон – человек» вполне конкретно, а высказывание «x – человек» означает пропозициональную функцию, зависящую от переменной x. Пропозициональные функции могут зависеть от двух и большего числа переменных: такова, например, функция «x любит y». Результаты Пирса позволили распространить логику и на пропозициональные функции.

Пирс ввел в логику и так называемые <u>кванторы</u>. Обычный язык неоднозначен по отношению к кванторам. В двух высказываниях:

Американец возглавлял войну за независимость;
Американец верит в демократию

субъект «американец» используется в двух различных смыслах: в первом высказывании речь идет о вполне конкретном лице – Джордже Вашингтоне, во втором – о любом американце. Обычно неоднозначность можно уменьшить, сославшись на контекст, в котором используется предложение, но в строгом логическом мышлении такая неоднозначность недопустима. Смысл высказывания должен быть ясен без всяких ссылок на контекст. Кванторы позволяют достичь однозначности высказываний. Мы можем утверждать, что какая-то пропозициональная функция истинна для всех индивидуумов из определенного класса, например для всех граждан США. В этом случае высказывание «Для всех x, x – люди» означает «Все граждане США – люди». Слова «для всех x» – квантор. Но мы можем также утверждать: существует по крайней мере один x, такой, что x – человек из США. В этом случае квантор – это слова «существует по крайней мере один x, такой, что». Каждый из этих типов кванторов имеет специальное обозначение: в первом случае $\forall x$; (квантор общности), во втором $\exists x$ (квантор существования).

Включение в логику отношений пропозициональных функций и кванторов позволило существенно расширить ее. Охватив те типы рассуждений, которые используются в математике, логика стала более полной.

Последний шаг в математизации логики в XIX в, был сделан профессором математики Йенского университета Готлобом Фреге (1848–1925). Его перу принадлежит несколько фундаментальных трудов: «Исчисление понятий» (1879), «Основания арифметики» (1884) и «Основные законы арифметики» (т. I – 1893, т. II – 1903). Восприняв идеи логики высказываний, логики отношений, пропозициональные функции и кванторы, Фреге внес свой вклад в развитие математической логики. Он ввел различие между простым утверждением высказывания и утверждением, что данное высказывание истинно. В последнем случае Фреге ставил перед высказыванием знак . Фреге проводил также различие между объектом x и множеством $\{x\}$, содержащим только x, между элементом, принадлежащим множеству, и включением одного множества в другое.

Фреге формализовал более широкое понятие импликации – так называемую материальную импликацию, хотя следы этого понятия в неформализованной, словесной форме можно проследить вплоть до Филона из Мегары (около III в. до н.э.)[40]. Логика имеет дело с рассуждениями относительно высказываний и пропозициональных функций, и весьма важная роль в этих рассуждениях отводится импликации. Так, если мы знаем, что Джои мудр и что мудрые люди живут долго, то с помощью импликации заключаем, что Джон будет жить долго.

Материальная импликация несколько отличается от обычно используемой импликации. Когда мы говорим, например, «Если пойдет дождь, то я отправлюсь в кино», между двумя высказываниями «Пойдет дождь» и «Я отправлюсь в кино» существует не просто какое-то отношение, а именно импликация: если антецедент (высказывание, стоящее в условном высказывании между «если» и «то») истинен, то из него с необходимостью следует консеквент (высказывание, стоящее в условном высказывании после «то»). Но в материальной импликации антецедентом p и консеквентом q могут быть любые высказывания. Между ними не обязательно должна существовать причинно-следственная связь и даже вообще какое бы то ни было отношение. Так, ничто не мешает нам рассматривать материальную импликацию «Если x – нечетное число, то я пойду в кино». Эта импликация ложна только в том случае, если x – нечетное число, а я всё равно не отправлюсь в кино.

На более формальном языке это означает, что если p и q – высказывания и p истинно, то из истинности импликации «Если p, то q» («из p следует q», или «p влечет за собой q») мы вправе заключить, что q также истинно. Если же p ложно, то независимо от того, ложно или истинно q, материальная импликация «Если p, то q» считается истинной. И только в том случае, если p истинно, а q ложно, импликация считается ложной. Понятие материальной импликации расширяет привычное употребление связки «если..., то...». Но такое расширение не приводит к каким-либо затруднениям, так как обычно мы используем импликацию «если p, то q», только когда знаем, что p истинно. Кроме того, материальная импликация в какой-то мере согласуется с тем смыслом, который мы обычно вкладываем в условные высказывания «Если..., то...». Рассмотрим предложение «Если Гарольд получит сегодня жалованье, то он купит продукты». Здесь p – высказывание «Гарольд получит сегодня жалованье», q – высказывание «Он купит продукты». Но Гарольд может купить продукты, даже если он не получит сегодня жалованье. Следовательно, импликацию «Если p, то q» мы можем считать истинной и в том случае, когда p ложно, а q истинно. Другим, возможно еще лучшим, примером разумности такого решения может служить условное предложение «Если бы дерево было металлом, то дерево было бы ковким». Мы знаем, что оба высказывания (и антецедент, и консеквент) ложны, тем не менее вся импликация в целом истинна. Следовательно, если p ложно и q ложно, то импликацию «Если p, то q» также надлежит считать истинной. Понятие материальной импликации находит важное применение, позволяя судить об истинности q по истинности p и импликации «Если p, то q». Обобщение на случай, когда p ложно, удобно для математической логики и представляется наиболее разумным из всех вариантов.

Поскольку если p ложно, то q следует из p независимо от того, истинно ли q или ложно, в случае материальной импликации из ложного высказывания может следовать что угодно – консеквент может быть любым. Упреки тех, кто видит в этом неисправимый «порок» материальной импликации, можно было бы отвергнуть, сославшись на то, что в непротиворечивой системе математики и логики не должно быть ложных высказываний. Тем не менее возражения против понятия материальной импликации всё же выдвигались. Так, Пуанкаре иронически заметил: «Но кто исправлял плохую кандидатскую математическую работу, тот мог

[40] **Яглом:** Выше уже указывалось, что логические сочинения Аристотеля (аристотелева силлогистика) формализовали в основном логическое отношение (не операцию, а именно отношение) следования; у Аристотеля можно найти также отчетливые фрагменты учения о кванторах. Полагают, что элементы логического исчисления – разумеется, не без влияния Аристотеля – были созданы в несколько более поздних стоической и мегарской школах, от которых до нас, однако, не дошли сколько-нибудь существенные письменные памятники мысли.

заметить, насколько правильно смотрит на дело Рассел. Кандидат часто много трудится для того, чтобы найти первое ложное уравнение; но лишь только он его получил, для него уже не представляет никакого труда сделать из него самые неожиданные выводы, из которых иные могут оказаться и точными» ([1][41], с. 379). Но, несмотря на все попытки усовершенствовать понятие импликации, именно материальная импликация стала стандартным понятием, по крайней мере в математической логике, используемой как основа всей современной математики.

Фреге внес в развитие логики еще один вклад, важность которого была по достоинству оценена много позднее. В логике известно много принципиальных схем рассуждений. Их можно сравнить с многочисленными утверждениями евклидовой геометрии о треугольниках, прямоугольниках, окружностях и других фигурах. В результате пересмотра других областей математики, произведенного в конце XIX в., многие утверждения геометрии были выведены из небольшого числа основных утверждений – аксиом. То же самое Фреге сделал в логике. Его обозначения и аксиомы были достаточно сложными, и мы ограничимся лишь словесным описанием предложенного Фреге аксиоматического подхода к логике (см. также гл. X). Вряд ли кто-нибудь усомнится принять за аксиому утверждение «Если *p*, то *p* или *q*», так как высказывание «*p* или *q*» истинно, если истинно по крайней мере одно из входящих в него высказываний, *p* или *q*, а если *p* истинно, то одно из высказываний, *p* или *q*, заведомо истинно.

Можно принять также за аксиому, что если какое-то высказывание (или комбинация высказываний) *A* истинно и если из *A* следует *B*, где *B* – другое высказывание (или комбинация высказываний), то *B* истинно. Эта аксиома, называемая правилом вывода, позволяет нам выводить новые высказывания и утверждать, что они истинны.

Из приведенных аксиом мы можем, например, вывести

p истинно или *p* ложно,

т.е. закон исключенного третьего.

Можно также вывести закон противоречия, словесная формулировка которого гласит: не верно, что *p* и не *p* оба истинны (истинным может быть только одно из двух высказываний: либо *p*, либо не *p*). Закон противоречия часто используется в математике в так называемых доказательствах от противного. В доказательствах такого рода мы, предположив, что *p* истинно, заключаем, что *p* ложно. Но тогда *p* и не *p* истинны одновременно, что невозможно. Следовательно, *p* ложно. Иногда доказательство от противного проводится несколько иначе. Предположив, что *p* истинно, мы доказываем, что из *p* следует *q*. Но о высказывании *q* известно, что оно ложно. Следовательно, по одному из законов логики должно быть ложным и *p*. Многие другие законы логики, широко используемые в математических доказательствах, также выводимы из аксиом. Начало дедуктивному построению логики было положено Фреге в его работе «Исчисление понятий» и продолжено им в «Основных законах арифметики».

Фреге поставил перед собой и более претенциозную задачу, о которой пойдет речь в дальнейшем (гл. X). Пока же, не вдаваясь в подробности, заметим, что Фреге стремился своими трудами по логике заложить новую основу арифметики, алгебры и математического анализа – более строгую, чем удалось создать за последние десятилетия XIX в., ознаменовавшиеся критическим движением в области оснований математики.

Значительную роль в использовании математической логики для достижения большей математической строгости сыграл Джузеппе Пеано. Занимаясь преподаванием математики, Пеано, как до него Дедекинд, обнаружил недостаточность строгости существовавших до него доказательств и посвятил всю свою жизнь усовершенствованию оснований математики. Символику математической логики Пеано применил для записи не только законов логики, но и математических аксиом, а также для вывода теорем из аксиом с помощью преобразования по правилам математической логики комбинаций символов, выражающих аксиомы. Пеано открыто и со всей определенностью говорил о необходимости отказаться от интуитивных представлений. Достичь намеченной цели можно было, лишь используя буквенную символику, так как при этом интерпретация символов не влияла на математическое доказательство. Символика позволяла избежать обращения к интуитивным ассоциациям, связанным с обычными словами.

Для обозначения понятий, кванторов и таких связок, как «и», «или» и «не», Пеано ввел собственные символы. Его символическая логика была весьма рудиментарной, но тем не менее Пеано оказал огромное влияние на развитие работ по основаниям математики. Он был основателем и главным редактором журнала *Revista di Matematica* (1891–1906) и пятитомного

---

[41] Пуанкаре А. *О науке*. – М.: Наука, 1983.

«Формуляра математики» (1894–1908). Именно в «Формуляре» Пеано впервые опубликовал уже упоминавшуюся нами аксиоматику целых чисел. Пеано основал школу математических логиков, в то время как работы Пирса и Фреге, по существу, оставались незамеченными, пока Бертран Рассел не «открыл» в 1901 г. труды Фреге. О работах Пеано Рассел узнал в 1900 г. и считал символику Пеано более удачной, чем символика Фреге.

От Буля до Шредера, Пирса и Фреге все нововведения в логике сводились к применению математического метода: символики и дедуктивного вывода логических законов из логических аксиом. Вся эта работа по созданию формальной или символической логики была благосклонно встречена логиками и математиками, так как использование символики позволило избегать психологических, теоретико-познавательных и метафизических смысловых неоднозначностей и ассоциаций.

Систему логики, включающую пропозициональные функции, отношения типа «*x* любит *y*» или «точка *A* лежит между точками *B* и *C*», ныне принято называть исчислением предикатов первой ступени. Хотя, по мнению некоторых логиков, такое исчисление охватывает не все типы рассуждений, используемых в математике, например оно не включает математическую индукцию, современные логики отдают предпочтение именно этой логической системе.[42]

Распространение логики на все типы рассуждений, используемых в математике, придание утверждениям большей точности за счет проведения различия между высказываниями и пропозициональными функциями, введение кванторов, несомненно, способствовали повышению математической строгости, к которой так стремились математики XIX в. Аксиоматизация логики полностью отвечала духу времени.

Имея в виду наш последующий анализ логической структуры математики, подчеркнем, что как в самой математике, так и в алгебре установление высоких стандартов строгости стало возможным благодаря аксиоматическому подходу, впервые использованному Евклидом. Движение за аксиоматизацию в XIX в. позволило выяснить некоторые особенности аксиоматического подхода. Рассмотрим их подробнее.

Одна из особенностей аксиоматического подхода – необходимость неопределяемых понятий. Математика строится независимо от остальных областей человеческого знания, поэтому одно математическое понятие приходится определять через другие. Но тогда возникла бы бесконечная цепочка определений. Выход из создавшегося затруднения состоит в том, что основные понятия должны быть неопределяемыми. Но как пользоваться неопределяемыми понятиями? Откуда мы знаем, что о них можно утверждать? Ответ на этот вопрос и дает аксиоматика: аксиомы содержат утверждения о неопределяемых (и определяемых) понятиях. Следовательно, аксиомы говорят нам, что можно утверждать о неопределяемых понятиях. Так, если точка и прямая неопределяемы, то аксиома о том, что две точки задают прямую и притом только одну, и аксиома о том, что три точки задают плоскость и притом только одну, служат теми утверждениями, которые мы можем использовать при выводе новых утверждений о точке, прямой и плоскости. Хотя Аристотель в «Органоне», Паскаль в «Трактате о геометрическом духе» и Лейбниц в «Монадологии» подчеркивали необходимость неопределяемых понятий, математики по непонятным причинам прошли мимо этих предупреждений и продолжали давать определения, не имевшие смысла. Еще в начале XIX в. Жозеф Диас Жергонн (1771–1859) высказал со всей определенностью важную мысль: аксиомы говорят нам всё, что мы можем утверждать о неопределяемых понятиях, т.е. как бы содержат неявные определения таких понятий. Но математики всерьез восприняли эту идею лишь после того, как в 1882 г. Мориц Паш вновь подтвердил необходимость неопределяемых понятий.

Осознание того, что любая дедуктивная система должна содержать неопределяемые понятия, которые можно интерпретировать как угодно, лишь бы вводимые объекты удовлетворяли аксиомам, подняло математику на новый уровень абстракции. Это весьма рано понял Герман Грассман, отметивший в своей «Теории линейной протяженности» (1844), что геометрия не сводится исключительно к изучению реального, физического, пространства. Геометрия – конструкция чисто математическая. Она применима для описания реального пространства, но

---

[42] По мнению некоторых логиков, чтобы охватить все типы рассуждений, используемых в математике, потребовалось бы ввести так называемое исчисление предикатов второй ступени, в котором кванторы применяются к предикатам. Так, чтобы выразить отношение равенства $x=y$, мы должны были бы утверждать дополнительно применимость к у всех предикатов, применимых к х, и для этого ввести квантор предикатов либо словесно («для всех предикатов»), либо с помощью символов $x=y \leftrightarrow (F)\ (F(x) \leftrightarrow F(y))$.

отнюдь не исчерпывается этой своей интерпретацией. Творцы аксиоматики, работавшие позднее, Паш, Пеано и Гильберт, всячески подчеркивали абстрактность геометрии. Тем не менее, отчетливо сознавая существование неопределяемых понятий, смысл которых ограничен лишь аксиомами, Паш в своих работах мысленно следовал единому образцу геометрии. Пеано, знавший работы Паша, в статье от 1889 г. высказал мысль о возможности многих других интерпретаций геометрии. Гильберт в «Основаниях геометрии» (1899) [50][43] заявил, что, хотя мы используем такие слова, как точка, прямая, плоскость и т.д., вполне можно было бы говорить о пивных кружках, стульях и любых других предметах, лишь бы они удовлетворяли аксиомам. То, что одна дедуктивная система допускает множество интерпретаций, можно расценивать как весьма благоприятное обстоятельство, позволяющее расширить круг возможных приложений, но вместе с тем оно приводит, как мы увидим в дальнейшем (гл. XII), и к некоторым неприятным последствиям.

Паш великолепно понимал современную аксиоматику. Именно ему принадлежит замечание (важность которого в конце XIX в. не была по достоинству оценена) о том, что во всех случаях необходимо дать доказательство **непротиворечивости** любой рассматриваемой системы аксиом, т.е. доказательство того, что выбранная система аксиом не порождает противоречащих друг другу теорем. Проблема непротиворечивости возникла в связи с неевклидовыми геометриями и была для них удовлетворительно разрешена. Однако неевклидова геометрия оставалась для многих довольно непривычной областью математики. Что же касается таких старых фундаментальных ее разделов, как арифметика или евклидова геометрия, то всякие сомнения в их непротиворечивости казались чисто академическими. Тем не менее Паш считал необходимым установить непротиворечивость и этих систем аксиом. Ему вторил Фреге, писавший в «Основаниях арифметики» (1884):

> Обычно поступают так, будто принятие постулатов само по себе достаточно для того, чтобы все постулаты выполнялись. Мы постулируем, что операция вычитания, деления или извлечения корня всегда выполнима, и считаем, что этого вполне достаточно. Но почему мы не постулируем, что через любые три точки можно провести прямую? Почему мы не постулируем, что все законы сложения и умножения остаются в силе для комплексных чисел с тремя единицами точно так же, как они выполняются для вещественных чисел? Это происходит потому, что такого рода постулаты содержат противоречие. Прекрасно! Но тогда первое, что нам необходимо сделать, – это доказать непротиворечивость наших остальных постулатов. А пока это не будет сделано, вся строгость, к которой мы так стремимся, останется столь же зыбкой и призрачной, как лунное сияние.

Пеано и его школа в 90-х годах XIX в. также стали несколько серьезнее относиться к проблеме непротиворечивости. Пеано был уверен в том, что методы, позволяющие доказывать непротиворечивость аксиом, не замедлят появиться.

Над проблемой непротиворечивости математики вполне могли бы задуматься еще древние греки. Почему же она выступила на передний план лишь в конце XIX в.? Как мы уже говорили, создание неевклидовой геометрии в значительной мере способствовало осознанию того, что геометрия является творением человека и лишь приближенно описывает происходящее в реальном мире. При всех неоспоримых достоинствах этого описания его нельзя считать истинным в том смысле, что оно не адекватно внутренней структуре окружающего мира и, следовательно, не обязательно непротиворечиво. Движение за аксиоматизацию математики в конце XIX в. заставило математиков понять, сколь глубокая пропасть отделяет математику от реального мира. Каждая аксиоматическая система содержит неопределяемые понятия, свойства которых задаются только аксиомами. Смысл неопределяемых понятий не зафиксирован раз и навсегда, хотя интуитивно мы представляем себе, что такое точки или прямые. Разумеется, предполагается, что аксиомы выбраны так, чтобы задаваемые ими свойства находились в согласии с теми, которые мы интуитивно с ними связываем. Но можем ли мы быть уверенными в том, что нам удалось выбрать аксиомы именно таким образом, что, формулируя их, мы не привнесли некоторое нежелательное свойство (или же оно следует из принятых нами аксиом), которое может привести к противоречию?

Паш отметил еще одну особенность аксиоматического метода. В любой области математики желательно, чтобы аксиомы были независимыми, т.е. чтобы любую из принятых аксиом нельзя было вывести из остальных, так как аксиома, выведенная из других, является уже

[43] Гильберт Д. *Основания геометрии*. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

не аксиомой, а теоремой. Метод доказательства независимости той или иной аксиомы состоит в указании интерпретации или построении модели, в которой все аксиомы, кроме проверяемой на независимость, выполняются, а проверяемая аксиома не выполняется. (Такая интерпретация не обязательно должна быть совместимой с отрицанием проверяемой аксиомы.) Так, для доказательства независимости аксиомы Евклида о параллельных от остальных аксиом евклидовой геометрии можно воспользоваться интерпретацией гиперболической неевклидовой геометрии, в которой выполняются все аксиомы евклидовой геометрии, кроме аксиомы о параллельных, а сама аксиома о параллельных не выполняется. Интерпретация, удовлетворяющая проверяемой аксиоме и противоположной аксиоме, не была бы непротиворечивой. Следовательно, прежде чем воспользоваться для доказательства независимости какой-либо аксиомы интерпретацией, или моделью, необходимо убедиться в том, что эта интерпретация, или модель, непротиворечива. Так, независимость аксиомы Евклида о параллельных была доказана на модели гиперболической евклидовой геометрии, реализуемой на поверхности в евклидовом пространстве.

В дальнейшем мы расскажем о сомнениях, неадекватностях и глубоких проблемах, которые породила аксиоматизация математики; однако в начале XX в. аксиоматический метод считался идеалом математической строгости. Никто не превозносил аксиоматический метод больше, чем Гильберт, ставший к тому времени признанным лидером мировой математики. В статье «Аксиоматическое мышление» (1918) он утверждал:

> Всё, что может быть предметом математического мышления, коль скоро назрела необходимость в создании теории, оказывается в сфере действия аксиоматического метода и тем самым математики. Проникая во всё более глубокие слои аксиом... мы получаем возможность всё дальше заглянуть в сокровенные тайны научного мышления и постичь единство нашего знания. Именно благодаря аксиоматическому методу математика, по-видимому, призвана сыграть ведущую роль во всем нашем знании.

Аналогичные мысли Гильберт высказывал и в 1922 г.:

> Аксиоматический метод поистине был и остается подходящим и неоценимым инструментом, в наибольшей мере отвечающим духу каждого точного исследования, в какой бы области оно ни проводилось. Аксиоматический метод логически безупречен и в то же время плодотворен; тем самым он гарантирует полную свободу исследования. В этом смысле применять аксиоматический метод – это значит действовать, понимая, о чем идет речь. Если ранее, до аксиоматического метода, приходилось действовать наивно, слепо веря в существование определенных отношений, то аксиоматический метод устраняет подобную наивность, сохраняя все преимущества уверенности.

Возможно, создается впечатление, что математики приветствовали установление прочной, строгой основы своей науки. Однако математикам ничто человеческое не чуждо. И далеко не все математики с энтузиазмом приветствовали точную формулировку таких основных понятий, как иррациональное число, непрерывность, производная и интеграл. Многие не поняли новой терминологии и сочли точные определения своего рода причудами, отнюдь не обязательными для понимания математики и даже для строгих доказательств. Те, кто так считал, полагались на свою интуицию, несмотря на сюрпризы, преподнесенные открытием непрерывных, но не дифференцируемых функций и других логически правильных, но противоречащих интуиции математических объектов. Так, в 1904 г. Эмиль Пикар (1856–1941), говоря о строгости в теории дифференциальных уравнений с частными производными, заметил: «Истинная строгость плодотворна и этим отличается от другой строгости, чисто формальной и утомительной, бросающей тень на затрагиваемые ею проблемы». Шарль Эрмит (1822–1901) в письме к Томасу Яну Стильтьесу от 20 мая 1893 г. признавался: «С чувством непреодолимого отвращения я отшатываюсь от достойного всякого сожаления зла – непрерывных функций, не имеющих производных». Пуанкаре (1854–1932), с чьей философией математики нам предстоит познакомиться в следующей главе, жаловался: «В прежние времена новые функции вводились для того, чтобы их можно было применять. Ныне же строят функции, чтобы прийти в противоречие с выводами наших предшественников. Такие функции не годятся ни для чего иного».

Многие авторы тех определений и доказательств, ошибочность которых стала очевидной, принялись утверждать, будто имели в виду именно тот смысл, к которому привела строгая теория. К подобному приему прибегал даже такой выдающийся математик, как Эмиль Борель. Другие возражали против, как они говорили, «выискивания блох». В одной из своих работ, опубликованной в 1934 г., Годфри Гарольд Харди назвал строгость неотъемлемым элементом математики. Другие математики не понимали природы математической строгости и, опасаясь неприятностей, поносили ее. Некоторые даже поговаривали об анархии в математике. Новые идеи, в частности те, которые способствовали установлению математической строгости, математики воспринимали ничуть не менее предвзято, чем обычно люди воспринимают любые новшества.

Успехи в области оснований математики обнаружили еще одну сторону математических творений. Строгость не только удовлетворяла потребностям математики XIX в., но и позволила нам кое-что понять в развитии математики. Предполагалось, что обоснованные по последнему слову «математической техники» строгие структуры гарантируют «доброкачественность» математики, но эти гарантии оказались необоснованными. Ни одна теорема арифметики, алгебры или евклидовой геометрии не была изменена в результате пересмотра оснований, и только некоторые теоремы математического анализа пришлось сформулировать точнее. Например, прежде чем воспользоваться производной непрерывной функции, современным математикам приходится вводить дополнительную гипотезу о том, что эта функция дифференцируема. В действительности все новые аксиоматические структуры и строгость лишь подтвердили то, в чем и без того не сомневались математики. Аксиомы позволили доказать уже известные, а не какие-то новые теоремы, так как «старые» теоремы в подавляющем большинстве были правильными. В целом это означало, что в основе математики лежит не логика, а здравый смысл и интуиция. Строгость, по выражению Жака Адамара, лишь освящает то, что завоевано интуицией. Герман Вейль назвал строгость гигиеной, с помощью которой математик поддерживает здоровье и силу своих идей.

Как бы то ни было, к началу XX в. строгость снова стала играть заметную роль в математике и служить, хотя и с большим запозданием, гарантией прочности и обоснованности достижений, накопленных математикой за много столетий. Математики могли наконец во всеуслышание заявить, что исполнили свой долг по отношению к стандарту, установленному древними греками, и не без облегчения отметить, что, за исключением незначительных поправок, здание, построенное ими на эмпирической или интуитивной базе, теперь было в основном подкреплено логикой. При мысли об этом математиков охватывало ликование и даже самодовольство. Оглядываясь в прошлое, они могли указать несколько кризисных ситуаций (иррациональные числа, математический анализ, неевклидова геометрия, кватернионы) и поздравить себя с тем, что всякий раз им удавалось успешно разрешить возникавшую проблему.

На II Международном конгрессе математиков, состоявшемся в 1900 г. в Париже, с докладом на пленарном заседании выступил Анри Пуанкаре, соперничающий тогда с Гильбертом в борьбе за лидерство в математике. Несмотря на скептическое отношение к ценности некоторых усовершенствований в основаниях математики» Пуанкаре не без гордости заметил:

> Достигли ли мы абсолютной строгости? Ведь на каждой стадии эволюции наши предки также верили в то, что достигли ее. Если они ошибались, то не ошибаемся ли и мы, подобно им?.. В новейшем анализе – если мы пожелаем взять на себя труд быть строгими – находят место силлогизмы и обращения к этой интуиции чистого числа, единственной интуиции, которая не может обмануть нас. Можно сказать, что ныне достигнута абсолютная строгость. ([1][44], с. 163–164.)

Пуанкаре повторил эти преисполненные гордости слова в одном из очерков, составивших его книгу «Ценность науки» (1905) [1]. И эта гордость вполне понятна, если учесть, какая проницательность потребовалась, чтобы добиться строгости в различных разделах математики. Наконец-то математика обрела основания, которые с радостью приняли все, за исключением нескольких тугодумов. Математикам было чему радоваться.

Один из персонажей «Кандида» Вольтера философ доктор Панглосс даже в ожидании повешения твердит о «лучшем из миров». Так и математики, не ведая, что вскоре их ожидает взрыв ими же заложенного сокрушительного заряда, с энтузиазмом рассуждали о том, что достигли наилучшего из возможных состояний. Между тем тучи уже сгущались, и если бы математики, собравшиеся в 1900 г. на конгресс, не были так поглощены заздравными тостами, то они без труда бы заметили их.

Но и среди участников достопамятного конгресса 1900 г. нашелся человек, который прекрасно понимал, что в основаниях математики разрешены далеко не все проблемы. На этом

[44] Пуанкаре А. *О науке*. – М.: Наука, 1983.

конгрессе Давид Гильберт выступил с знаменитым докладом, где перечислил 23 проблемы [51][45], решение которых, по его мнению, девятнадцатое столетие завещало двадцатому. Первая из названных проблем состояла из двух частей. Георг Кантор ввел трансфинитные числа для обозначения мощности (числа элементов) бесконечных множеств. В этой связи Гильберт предложил доказать, что трансфинитное число, выражающее мощность множества всех вещественных чисел, является ближайшим к трансфинитному числу, выражающему мощность множества всех целых чисел. К этой проблеме мы вернемся в гл. IX.

Во второй части первой проблемы Гильберта говорилось о необходимости поиска метода, который позволил бы переупорядочить вещественные числа, чтобы их множество стало вполне упорядоченным. С понятием вполне упорядоченного множества мы подробнее познакомимся в дальнейшем, а пока достаточно лишь сказать, что если множество всех вещественных чисел вполне упорядочено, то в любой извлеченной из него подпоследовательности должен существовать первый элемент. При обычном упорядочении вещественных чисел это требование не выполняется: например, если мы рассмотрим все числа, которые больше, например, 5, то в этом подмножестве первый элемент отсутствует.

Вторая проблема Гильберта была более очевидной и имела более широкое значение. Мы уже упоминали о проблеме непротиворечивости, поднятой в связи с неевклидовыми геометриями, и о доказательствах их непротиворечивости, исходивших из предположения о непротиворечивости евклидовой геометрии. Используя аналитическую геометрию, Гильберт показал, что евклидова геометрия непротиворечива, если непротиворечива арифметика. И содержание второй проблемы Гильберта составляло требование дать доказательство непротиворечивости арифметики.

Обе части первой проблемы Гильберта были известны еще Кантору. Паш, Пеано и Фреге обращали внимание также и на проблему непротиворечивости. Но только Гильберт в своем докладе 1900 г. в полной мере продемонстрировал фундаментальный, непреходящий характер этих проблем. Большинство математиков, слушавших доклад Гильберта, несомненно, считали проблемы непротиворечивости тривиальными, несущественными, своего рода математическими курьезами и придавали большее значение другим проблемам, сформулированным Гильбертом. Что же касалось непротиворечивости арифметики, то она ни у кого не вызывала сомнений. То, что многие сомневались в непротиворечивости неевклидовой геометрии, вполне понятно, если учесть, сколь необычной и даже противоречащей интуиции была эта геометрия. Но вещественные числа находились в обращении более пяти тысяч лет, и о них было доказано бесчисленное множество теорем. Никаких противоречий при этом обнаружено не было. Аксиомы вещественных чисел приводили к хорошо известным теоремам. Как же система аксиом вещественных чисел могла быть противоречивой?

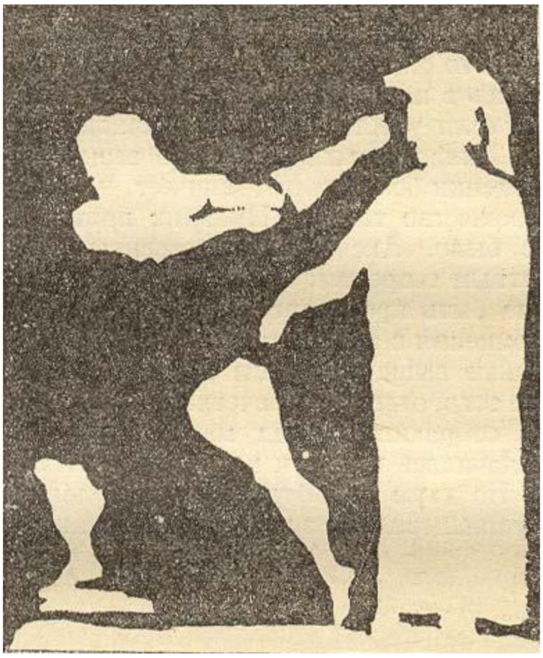
Но всякие сомнения в том, насколько мудро поступил Гильберт, включив названные выше проблемы в число 23 наиболее важных проблем и, более того, отведя им почетные первые места, вскоре рассеялись. Тучи, собравшиеся над математикой, закрыли теперь весь горизонт. Началась гроза, и некоторые математики услышали раскаты грома. Но даже Гильберт не мог предвидеть всё неистовство бури, обрушившейся на здание математики.

[45] *Проблемы Гильберта*. – М.: Наука, 1969.

IX. Изгнание из рая: новый кризис оснований математики

В математике нет настоящих противоречий.
Гаусс

Логика – это искусство уверенно совершать ошибки.
Неизвестный автор



Итак, после многовековых блужданий в тумане математикам как будто бы удалось к началу XX в. придать своей науке ту идеальную структуру, которая была декларирована Аристотелем и, казалось, осуществлена Евклидом в его «Началах». Математики наконец-то полностью осознали необходимость неопределяемых понятий; определения были очищены от неясных или вызывавших какие-либо возражения терминов; некоторые области математики были построены на строгой аксиоматической основе; на смену умозаключениям, опиравшимся на интуитивные соображения или эмпирические данные, пришли надежные, строгие, дедуктивные доказательства. Даже законы логики были расширены настолько, что охватывали теперь те типы рассуждений, которые ранее математики использовали неформально и порой неявно, хотя, как показывал опыт, эти рассуждения всегда приводили к правильным результатам. Как уже говорилось, в начале XX в. у математиков были поводы торжествовать. Но пока они праздновали свои победы, уже назревали события, которые в дальнейшем лишили математиков покоя в гораздо большей степени, чем создание неевклидовой геометрии и кватернионов в первой половине XIX в. По меткому замечанию Фреге, «едва здание было достроено, как фундамент рухнул».

Случившееся нельзя было считать полной неожиданностью: еще Гильберт обратил внимание математиков на то, что некоторые проблемы в основаниях математики оставались нерешенными (гл. VIII). Самой важной из этих проблем, по мнению Гильберта, была проблема установления непротиворечивости тех или иных аксиоматизируемых разделов математики. Гильберт отчетливо понимал, что аксиоматический метод базируется на исходном списке неопределяемых понятий, а также аксиом, которым эти понятия должны удовлетворять. Интуитивно смысл всех фигурирующих в математической теории понятий и аксиом был вполне ясен. Такие математические понятия, как точка, прямая и плоскость, имеют вполне конкретные физические аналоги, а аксиомы евклидовой геометрии содержат некоторые физически ясные утверждения, касающиеся этих понятий. Тем не менее, как подчеркивал Гильберт, абстрактная, чисто логическая схема евклидовой геометрии не требует, чтобы понятия точки, прямой и плоскости были привязаны к какой-то одной, например «физической», интерпретации. Что же касается аксиом, то их формулируют, вкладывая в них как можно меньше, с тем, чтобы извлечь из них возможно больше. И хотя аксиомы принято формулировать так, чтобы их физический смысл не вызывал сомнений, тем не менее существует опасность, что сформулированные даже самым тщательным образом аксиомы могут оказаться противоречивыми, т.е. привести к противоречию. Паш, Пеано и Фреге сознавали эту опасность, и в своем докладе на II Международном математическом конгрессе 1900 г. Гильберт также обратил внимание математиков на это обстоятельство.

Слабости абстрактной формулировки понятий, отношений и фактов, заимствованных из физической реальности, можно проиллюстрировать на таком примере, конечно весьма грубо отражающем суть дела. Представим себе, что было совершено какое-то преступление (многие, возможно, согласились бы с тем, что математика – это преступление). Следователь, которому поручено раскрыть преступление, располагает неопределяемыми понятиями: преступник, время совершения преступления и т.д. Все обнаруживаемые в ходе следствия факты следователь скрупулезно записывает. Это его аксиомы. Затем следователь начинает делать логические выводы в надежде, что это позволит ему выдвинуть какие-то версии. Весьма вероятно, что его выводы, хотя они и основаны на правдоподобных предположениях относительно происходивших событий, окажутся противоречивыми, так как исходные предположения либо не соответствуют подлинным событиям, либо недостаточно точно их отражают. В реальной же (физической) ситуации никаких противоречий нет и быть не может. Было совершено преступление, был преступник. Но логические выводы могут привести следователя, скажем, к заключению, что преступник одновременно и низкого роста (около 1,5 м), как следует из анализа следов преступления, и высокого роста (около 1,8 м), как показывает кто-то из свидетелей.

Вряд ли математики сочли бы ключевой проблемой доказательство непротиворечивости нескольких аксиоматических структур, если бы не дальнейшее развитие событий. К началу XX в. математики отчетливо сознавали, что в вопросах непротиворечивости они не могут полагаться на «физическую реализуемость» математики. Ранее, когда евклидова геометрия считалась геометрией реального физического пространства, мысль о том, что непрерывная дедуктивная цепочка теорем может когда-нибудь привести к противоречию, казалась дикой. Но к началу XX в. стало ясно, что евклидова геометрия представляет собой лишь логическую структуру, возведенную на фундаменте из примерно двадцати аксиом, не данных нам богом или природой, а сформулированных человеком. В такой системе вполне могли быть и противоречащие друг другу теоремы. Подобное открытие обесценивало многое из того, что было достигнуто ранее: достаточно было где-нибудь оказаться двум взаимно исключающим теоремам, как их могли использовать для доказательства новых противоречий и полученные в таком случае новые теоремы не имели бы смысла. Гильберт отверг столь страшную возможность, доказав, что евклидова геометрия непротиворечива, если непротиворечива логическая структура арифметики, т.е. система вещественных чисел. Предложенное Гильбертом доказательство в тот период еще не вызывалось насущной необходимостью и потому не привлекло особого внимания математиков (гл. VIII).

Но к всеобщему ужасу в самом начале XX в. противоречия были обнаружены в теории, лежащей в основе наших представлений о числе и далеко простирающейся за пределы арифметики. К 1904 г. выдающийся математик Альфред Принсхейм (1850–1914) имел все основания утверждать, что истина, поиском которой занимается математика, – это не больше и не меньше как непротиворечивость. И когда в работе 1918 г. Гильберт вновь подчеркнул важность проблемы непротиворечивости, у него были теперь для этого гораздо более веские доводы, чем в 1900 г.

Новой теорией, которая привела к противоречиям и открыла многим глаза на противоречия, существовавшие в более старых областях математики, была теория бесконечных множеств. Наведение математической строгости в анализе привело к необходимости учитывать различие между сходящимися (т.е. имеющими конечную сумму) и расходящимися бесконечными рядами. Некоторые из таких рядов, например бесконечные ряды тригонометрических функций, названные рядами Фурье – в честь активно использовавшего их Жозефа Фурье, стали играть важную роль, и при попытке строгого обоснования анализа породили немало проблем. К решению этих проблем и приступил Георг Кантор (1845–1918). Логика исследования привела его к рассмотрению теории числовых множеств, в частности к введению мощностей таких бесконечных множеств, как множество всех нечетных чисел, множество всех рациональных чисел (включающее в себя положительные и отрицательные целые числа, а также дроби) и множество всех вещественных чисел.

Кантор порвал с многовековой традицией уже тем, что рассматривал бесконечные множества как единые сущности, притом сущности, доступные человеческому разуму. Начиная с Аристотеля математики проводили различие между актуальной бесконечностью объектов и потенциальной бесконечностью. Чтобы пояснить эти понятия, рассмотрим возраст Вселенной. Если предположить, что Вселенная возникла в какой-то момент времени в далеком прошлом и будет существовать вечно, то ее возраст потенциально бесконечен: в любой момент времени возраст Вселенной конечен, но он продолжает возрастать и в конце концов превзойдет любое число лет. Множество (положительных) целых чисел также потенциально бесконечно: оборвав счет, например, на миллионе, мы всегда можем затем прибавить к нему 1, 2 и т.д. Но если

Вселенная существовала в прошлом всегда, то ее возраст в любой момент времени актуально бесконечен. Аналогично множество целых чисел, рассматриваемое в «готовом виде» как существующая совокупность, актуально бесконечна.

Вопрос о том, следует ли считать бесконечные множества актуально или потенциально бесконечными, имеет длинную историю. Аристотель в своей «Физике» ([6][46], т. 3, с. 59–221) утверждал: «Остается альтернатива, согласно которой бесконечное имеет потенциальное существование... Актуально бесконечное не существует». По мнению Аристотеля, актуальная бесконечность не нужна математике. Греки вообще считали бесконечность недопустимым понятием. Бесконечность – это нечто безграничное и неопределенное. Последующие дискуссии нередко лишь затемняли существо дела, так как математики говорили о бесконечности как о числе, не давая явного определения понятия бесконечности и не указывая свойства этого понятия. Так, Эйлер довольно легкомысленно утверждал в своей «Алгебре» (1770), что 1/0 – бесконечность, хотя и не счел нужным определить, что такое бесконечность, а лишь ввел для нее обозначение ∞. Без тени сомнения Эйлер утверждал также, что 2/0 вдвое больше, чем 1/0. Еще больше недоразумений возникало в тех случаях, когда речь шла об использовании символа ∞ для записи пределов при n, стремящемся к бесконечности (например, для записи того, что предел $1/n$ при n, стремящемся к ∞, равен 0). В подобных случаях символ ∞ означает лишь, что n неограниченно возрастает и может принимать сколь угодно большие (но конечные!) значения, при которых разность между 0 и $1/n$ становится сколь угодно малой. Необходимость в обращении к актуальной бесконечности при таких предельных переходах не возникает.

Большинство математиков (Галилей, Лейбниц, Коши, Гаусс и другие) отчетливо понимали различие между потенциально бесконечными и актуально бесконечными множествами и исключали актуально бесконечные множества из рассмотрения. Если им приходилось, например, говорить о множестве всех рациональных чисел, то они отказывались приписывать этому множеству число – его мощность. Декарт утверждал: «Бесконечность распознаваема, но не познаваема». Гаусс писал в 1831 г. Шумахеру: «В математике бесконечную величину никогда нельзя использовать как нечто окончательное; бесконечность – не более чем *façon de parle* [манера выражаться], означающая предел, к которому стремятся одни величины, когда другие бесконечно убывают».

Таким образом, введя актуально бесконечные множества, Кантор выступил против традиционных представлений о бесконечности, разделяемых великими математиками прошлого. Свою позицию Кантор пытался аргументировать ссылкой на то, что потенциальная бесконечность в действительности зависит от логически предшествующей ей актуальной бесконечности. Кантор указывал также на то, что десятичные разложения иррациональных чисел, например числа $\sqrt{2}$, представляют собой актуально бесконечные множества, поскольку любой конечный отрезок такого разложения дает лишь конечное приближение к иррациональному числу. Сознавая, сколь резко он расходится во взглядах со своими предшественниками, Кантор с горечью признался в 1883 г.: «Я оказался в своего рода оппозиции к общепринятым взглядам на математическую бесконечность и к нередко отстаиваемым суждениям о природе числа».

В 1873 г. Кантор не только занялся изучением бесконечных множеств как «готовых» (т.е. реально существующих) сущностей, но и поставил задачу классифицировать актуально бесконечные множества ([15*][47], [53][48]). Введенные Кантором определения позволяли сравнивать два актуально бесконечных множества и устанавливать, содержат ли они одинаковое «число элементов» или нет. Основная идея Кантора сводилась к установлению взаимно-однозначного соответствия между множествами. Так, 5 книгам и 5 шарам можно сопоставить одно и то же число 5 потому, что книги и шары можно разбить на пары, каждая из которых содержит по одной, и только одной книге, и по одному, и только одному, шару. Аналогичное разбиение на пары Кантор применил, устанавливая взаимно-однозначное соответствие между элементами бесконечных множеств. Например, взаимно-однозначное соответствие между положительными целыми числами и четными числами можно установить, объединив те и другие в пары:

[46] Аристотель. Сочинения в 4-х томах. – М.: Мысль, 1976 (т.1), 1981 (т. 3).

[47] Cantor G. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. – New York: Dover Inc., 1955. [Немецкий оригинал: в кн.: Cantor G. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. – Heidelberg Springer, 1980; русский перевод (неполный): Кантор Г. *Теория ансамблей*. – Спб.: Образование, 1914 («Новые идеи в математике», вып. 6).]

[48] Даубен Д.-У. *Георг Кантор и рождение теории трансфинитных множеств*. – В мире науки, 1983, № 8, с. 76–78.

1 2 3 4 5 ...
2 4 6 8 10 ...

Каждому целому числу при этом соответствует ровно одно четное число (равное удвоенному целому), а каждому четному числу соответствует ровно одно целое число (равное половице четного). Следовательно, в каждом из двух бесконечных множеств – множестве целых чисел и множестве четных чисел – элементов **столько же**, сколько в другом множестве. Установленное соответствие (то, что всё множество целых чисел можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с частью этого множества) казалось неразумным предшественникам Кантора[49] и заставляло их отвергать все попытки рассмотрения бесконечных множеств. Но это не испугало Кантора. С присущей ему проницательностью он понял, что бесконечные множества могут подчиняться новым законам, не применимым к конечным совокупностям или множествам, подобно тому как, например, кватернионы подчиняются законам, не применимым к вещественным числам. И Кантор **определил** бесконечное множество как такое множество, которое можно поставить во взаимно-однозначное соответствие со своим собственным (т.е. отличным от всего множества) подмножеством.

Идея взаимно-однозначного соответствия привела Кантора к неожиданному результату: он показал, что можно установить взаимно-однозначное соответствие между точками прямой и точками плоскости (и даже точками n-мерного пространства). По поводу этого результата он писал в 1877 г. своему другу Рихарду Дедекинду: «Я вижу это, но не могу в это поверить». Тем не менее Кантор поверил в правильность полученного им результата и, следуя принципу взаимно-однозначного соответствия, установил для бесконечных множеств отношение эквивалентности, или равенства («равномощности» двух множеств).

Кантор выяснил также, в каком смысле следует понимать, что одно бесконечное множество **больше** другого[50]: если множество A можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с частью или собственным подмножеством множества B, а множество B невозможно поставить во взаимно-однозначное соответствие с множеством A или собственным подмножеством множества A, то множество B по определению больше множества A. Это определение по существу обобщает на бесконечные множества то, что непосредственно очевидно в случае конечных множеств. Если у нас имеется 5 шаров и 7 книг, то между шарами и частью книг можно установить взаимно-однозначное соответствие, но невозможно установить взаимно-однозначное соответствие между всеми книгами и всеми шарами или частью шаров. Используя свои определения равенства и неравенства бесконечных множеств, Кантор сумел получить поистине удивительный результат: множество целых чисел равно («равномощно») множеству рациональных чисел (всех положительных и отрицательных целых чисел и дробей), но меньше множества всех вещественных (рациональных и иррациональных) чисел.

Подобно тому, как количество элементов в конечных множествах мы обозначаем числами 5, 7, 10 и т.д., Кантор предложил ввести специальные символы n для обозначения количеств элементов в бесконечных множествах. Множество целых (или натуральных) чисел и множества, которые можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с этим множеством, содержат одинаковое количество (или «число») элементов, которое Кантор обозначил символом $\aleph_0$ (алеф-нуль; алеф – первая буква алфавита на иврите). Так как, по доказанному, множество всех вещественных чисел больше множества целых чисел, Кантор обозначил количество элементов в множестве всех вещественных чисел новым символом – c.

Кантору удалось доказать, что для любого заданного множества всегда найдется множество, большее исходного. Так, <u>множество всех подмножеств данного множества</u> всегда больше

---

[49] **Яглом:** Впрочем, еще Галилей, исходя из сходных соображений, утверждал, что квадратов натуральных чисел имеется столько же, сколько и самих натуральных чисел.

[50] **Яглом:** Фундаментом идущей от Кантора «иерархии бесконечностей» является (ныне широкоизвестная и в ряде стран включаемая даже в школьные учебники математики) *теорема Кантора–Бернштейна*, согласно которой если два множества A и B таковы, что существует взаимно-однозначное соответствие между A и частью (подмножеством) B и между B и частью A, то можно установить также и взаимно-однозначное соответствие между A и B; таким образом, любые два множества либо «одинаковы» (эквивалентны, равномощны), либо одно из них «больше» другого. Кантор хорошо понимал важность этой теоремы, но доказательство ее долго ему не давалось. О своих затруднениях он сообщил Р. Дедекинду, который познакомил с поставленной Кантором задачей своих студентов, после чего (в первой половине 90-х годов XIX в.) соответствующая теорема была очень быстро доказана совсем еще юным учеником Дедекинда, студентом Гёттингенского университета Феликсом Бернштейном.

первого множества. Не вдаваясь в подробности доказательства этой теоремы, продемонстрируем разумность этого результата на примере конечных множеств. Если множество состоит из 4 элементов, то из них можно составить 4 различных подмножества, содержащих по 1 элементу; 6 различных подмножеств, содержащих по 2 элемента; 4 различных подмножества, содержащих 3 элемента; наконец, 1 множество, содержащее 4 элемента. Если добавить сюда еще пустое множество, совсем не содержащее элементов, то общее число подмножеств окажется равным 16 = 2^4, что, разумеется, больше 4. В соответствии с результатом, имеющим место для конечных множеств, Кантор обозначил количество подмножеств (бесконечного!) множества, содержащего α элементов (где α – трансфинитное число), через 2^α; его результат гласил: $2^\alpha>\alpha$. Рассматривая все возможные подмножества множества целых чисел, Кантор сумел показать, что $2^{\aleph_0} = c$, где c – «число» всех вещественных чисел.

Когда Кантор в 70-х годах XIX в. приступил к созданию теории бесконечных множеств и еще много лет спустя, эта теория находилась на периферии математической науки. Доказанные им теоремы о тригонометрических рядах не были столь уж фундаментальными. Но к началу XX в. канторовская теория множеств нашла широкое применение во многих областях математики. Кантор и Рихард Дедекинд понимали, сколь важна теория множеств для обоснования теории целых чисел (конечных, или «финитных», и трансфинитных), для анализа понятий линии или размерности и даже для оснований математики. Другие математики, в частности Эмиль Борель и Анри Леон Лебег, к тому времени уже работали над обобщением интеграла, в основу которого была положена канторовская теория бесконечных множеств.

Поэтому, когда сам Кантор обнаружил, что его теория множеств сопряжена с определенными трудностями, это было далеко не маловажным событием. Как уже говорилось, Кантор установил, что существуют всё большие бесконечные множества, т.е. всё большие трансфинитные числа. Но в 1895 г. у Кантора возникла идея рассмотреть множество всех множеств. Мощность такого «сверхмножества» должна была бы быть самой большой из возможных. Но еще ранее Кантор доказал, что множество всех подмножеств любого заданного множества должно обладать трансфинитным числом, которое превосходит трансфинитное число, отвечающее исходному множеству. Следовательно, заключил Кантор, должно существовать трансфинитное число, превосходящее наибольшее из трансфинитных чисел. Придя к столь нелепому выводу, Кантор сначала растерялся; однако затем он решил, что все множества можно разбить на противоречивые и непротиворечивые, и в 1899 г. сообщил об этом Дедекинду. Таким образом, множество всех множеств и соответствующее ему трансфинитное число попадали в разряд «противоречивых» – и тем самым исключались из рассмотрения.

Когда Бертран Рассел (1872–1970) впервые узнал о выводе, к которому пришел Кантор по поводу множества всех множеств, он усомнился в правильности рассуждений Кантора, В 1901 г. Рассел писал в своей работе, что Кантор, должно быть, «совершил очень тонкую логическую ошибку, которую я [Рассел] надеюсь объяснить в одной из следующих работ». Ясно, продолжал Рассел, что наибольшее трансфинитное число должно существовать, так как если взято всё, то не останется ничего и, следовательно, ничего нельзя добавить. Рассел принялся размышлять над этой проблемой – и лишь пополнил арсенал проблем своим собственным «парадоксом», с которым мы вскоре познакомимся. Когда шестнадцать лет спустя статья Рассела была перепечатана в сборнике «Мистицизм и логика», он счел нужным добавить к ней подстрочное примечание, в котором извинился за допущенную ранее ошибку, ибо объяснить парадокс Кантора ему так и не удалось.

Помимо уже описанных количественных трансфинитных чисел, названных <u>кардинальными</u>, Кантор ввел также порядковые трансфинитные (<u>ординальные</u>) числа. Различие между ними достаточно тонко. Если мы рассматриваем, например, множество монет одинакового достоинства, то обычно имеет значение лишь количество монет, но никак не порядок, в котором они расположены. Но если требуется упорядочить студентов по успеваемости, то всегда найдется первый, второй, третий студент и т.д. Если в группе десять студентов, то занимаемые ими места в таком перечне образуют множество от первого до десятого. Это и есть множество ординальных чисел. Хотя в некоторых ранее существовавших цивилизациях и проводилось различие между кардинальными и ординальными числами, количество элементов в упорядоченном множестве из десяти элементов обычно обозначалось тем же символом, что и количество элементов в неупорядоченном множестве из десяти элементов. Так же поступали и в дальнейшем; подобным образом действуем и мы. Действительно, установив, кто занял десятое место, мы тем самым находим, что число людей, которых мы предварительно расставили по ранжиру, или упорядочили, равно десяти, и обозначаем количество элементов как в упорядоченном, так и в неупорядоченном множестве из десяти людей одним и тем же символом 10. В случае бесконечных множеств различие между кардинальными и ординальными числами более существенно, и поэтому для обозначения их применяют различные символы. Так, Кантор обозначал ординальное число, соответствующее упорядоченному множеству целых чисел 1, 2, 3, ..., буквой ω. Упорядоченному множеству

1, 2, 3, ..., 1, 2, 3 (или, если угодно, 4, 5, 6, ..., 1, 2, 3)

в обозначениях Кантора (сохранившихся и поныне) соответствовал символ ω+3. Кантор ввел иерархию трансфинитных ординальных чисел. Эта иерархия простиралась до $\omega\cdot\omega$, ω^n, ω^ω и далее (ср. [53][51]).

Разработав теорию трансфинитных ординальных чисел, Кантор в 1895 г. понял, что с этими числами также связана определенная трудность, о чем и сообщил Гильберту в том же году. Первым, кто указал на эту трудность в опубликованной (1897) работе, был Чезаре Бурали-Форти (1861–1931). Кантор считал, что множество ординальных чисел можно упорядочить подходящим образом по аналогии с тем, как упорядочены по величине хорошо знакомые всем вещественные числа. Но одна из теорем о трансфинитных ординальных числах утверждает, что ординальное число множества всех ординальных чисел от 1 и вплоть до любого ординального числа α (включая и само число α) больше α. Например, ординальное число множества ординальных чисел 1, 2, 3, ..., ω равно ω+1. А это в свою очередь означает, что <u>множество **всех** ординальных чисел</u> должно иметь ординальное число, превышающее самое большое число этого множества. Действительно, заметил Бурали-Форти, даже и к самому большому ординальному числу мы всегда можем прибавить единицу и получить еще большее ординальное число. Возникает противоречие, так как рассматриваемое множество, по предположению, содержит **все** ординальные числа. Из этого Бурали-Форти заключил, что ординальные числа допускают только частичное упорядочение.

Столкнувшись всего лишь с этими двумя проблемами, большинство математиков, несомненно, могли бы и дальше пребывать в том состоянии безмятежности, которое они обрели в результате пересмотра оснований математики в XIX в. Над вопросом о том, существует ли наибольшее кардинальное и ординальное числа, они предпочитали не задумываться. Ведь не существует же наибольшего целого числа – и никого это никогда не беспокоило!

Тем не менее канторовская теория бесконечных множеств вызвала бурю протестов. Несмотря на то, что эта теория нашла, как уже говорилось, применение во многих областях математики, некоторые ученые по-прежнему отказывались принимать актуально бесконечные множества и всё, что с ними связано. Леопольд Кронекер, испытывавший к тому же личную антипатию к Кантору, называл того шарлатаном. Анри Пуанкаре называл теорию множеств тяжелой болезнью и считал ее своего рода математической патологией. «Грядущие поколения, – заявил он в 1908 г., – будут рассматривать теорию множеств как болезнь, от которой они излечились». Даже в 20-х годах XX в. многие математики стремились избегать использования трансфинитных чисел (гл. X). Кантор выступил в защиту своей теории. Он утверждал, что разделяет философию Платона и верит, что в окружающем нас мире идеи существуют независимо от человека. И чтобы осознать реальность этих идей, необходимо лишь задуматься над ними. Парируя критические замечания философов, Кантор приводил метафизические и даже богословские доводы.[52]

К счастью, у теории Кантора были не только противники, но и сторонники. Рассел назвал Кантора одним из великих мыслителей XIX в. В 1910 г. Рассел писал: «Решение проблем, издавна окутывавших тайной математическую бесконечность, является, вероятно, величайшим достижением, которым должен гордиться наш век». Расселу вторил Гильберт: «Никто не изгонит нас из рая, созданного Кантором». В 1926 г. Гильберт так отозвался о трудах Кантора: «Мне представляется, что это самый восхитительный цветок математической мысли и одно из величайших достижений человеческой деятельности в сфере чистого мышления».

[51] Даубен Д.-У. *Георг Кантор и рождение теории трансфинитных множеств*. – В мире науки, 1983, № 8, с. 76–78.

[52] **Яглом:** Являясь в соответствии с семейной традицией ревностным христианином (лютеранином), Кантор охотно использовал в своих высказываниях религиозные аргументы; но значение соображений такого рода для его научного творчества не было существенным (в литературе оно нередко преувеличивается). Однако с течением времени, когда творческая сила Кантора-математика пошла на убыль, его обращения к теологии стали более частыми.

Причину споров, которые породила теория множеств, очень тонко и точно охарактеризовал Феликс Хаусдорф в «Основаниях теории множеств» (1914)[53]. Теорию множеств он метко назвал «областью, где ничто не является очевидным, где истинные утверждения нередко звучат парадоксально, а правдоподобные зачастую оказываются ложными».

Большинство математиков были обеспокоены вытекавшими из теории Кантора следствиями по совершенно иной причине, нежели приемлемость или неприемлемость бесконечных множеств различной мощности. Противоречия, вскрытые Кантором при попытке сопоставить (трансфинитное) число множеству всех множеств и множеству всех ординальных чисел, заставили математиков осознать, что они используют аналогичные понятия не только в новых, но и в, казалось бы, хорошо обоснованных традиционных областях математики. Обнаруженные противоречия математики предпочитали называть парадоксами, так как парадокс может быть объяснен, а математиков не покидала надежда, что все встретившиеся трудности им в конце концов удастся разрешить. (В наше время то, что раньше называли парадоксами, чаще называют «антиномии».)

Приведем некоторые из парадоксов. Нематематическим примером парадоксов теории множеств может служить высказывание «Из всех правил имеются исключения». Само это высказывание является правилом. Следовательно, для него можно найти по крайней мере одно исключение. Но это означает, что существует правило, не имеющее ни одного исключения. Такого рода высказывания содержат ссылку на самих себя и отрицают самих себя.

Наибольшей известностью из нематематических парадоксов пользуется так называемый парадокс лжеца. Его разбирали Аристотель и многие другие логики, жившие позднее. В классическом варианте парадокса лжеца речь идет о высказывании «Это утверждение ложно». Обозначим предложение, стоящее в кавычках, через *S*. Если *S* истинно, то истинно то, что оно утверждает. Следовательно, *S* ложно. Если *S* ложно, то ложно то, что оно утверждает. Следовательно, *S* истинно.

Парадокс лжеца существует во многих вариантах. Например, комментируя какое-то свое высказывание, человек может заметить: «Всё, что я говорю, – ложь». Является ли высказывание «Всё, что я говорю, – ложь» истинным или ложным? Если человек действительно лжет, то, утверждая, что он лжет, он говорит правду, а если человек говорит правду, то, утверждая, что он лжет, он действительно лжет. В некоторых вариантах парадокса лжеца ссылка на себя менее очевидна. Так, два высказывания: «Следующее за этим утверждение ложно», «предыдущее утверждение истинно» – содержат противоречие, так как если второе утверждение истинно, то тогда заведомо ложно первое утверждение, сообщающее нам о том, что второе утверждение ложно. Если же второе утверждение, как и говорится в первом утверждении, ложно, то значит, первое утверждение ложно и, следовательно, второе утверждение должно быть истинным.

Курту Гёделю (1906–1978), величайшему логику XX в., принадлежит несколько иной вариант парадокса с противоречивыми высказываниями. 4 мая 1934 г. *A* произносит единственную фразу: «Любое высказывание, которое *A* сделает 4 мая 1934 г., ложно». Это высказывание не может быть истинным, так как утверждает о самом себе, что оно ложно. Но оно не может быть и ложным, так как, для того, чтобы оно было ложным, *A* должен был бы высказать 4 мая 1934 г. хоть одну истину, – а *A* сказал в этот день лишь одну фразу.

Первые математические противоречия, чреватые серьезными неприятностями, обнаружил Бертран Рассел и сообщил о них Готлобу Фреге в 1902 г. Фреге в то время занимался подготовкой к печати второго тома «Основных законов арифметики», в котором изложил новый

---

[53] **Яглом:** Автор первого в мировой литературе учебника теории множеств Феликс Хаусдорф (1868–1942) долгие годы был одним из признанных лидеров берлинской математической школы. Его учебник по теории множеств имел два варианта, настолько резко различающиеся между собой, что их вполне можно считать самостоятельными книгами: «Основы теории множеств» (Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, Teubner, 1914) и «Теория множеств» (Mengenlehre, Leipzig, Teubner, 1927). Совершенно самостоятельным произведением мировой математической литературы является русский вариант той же книги [54: Хаусдорф Ф. Теория множеств. – М.– Л.; Гостехиздат, 1937], в которой редакторы П.С. Александров и А.Н. Колмогоров предприняли (весьма удачную) попытку совместить все достоинства и первого и второго вариантов книги Хаусдорфа, одновременно доработав отдельные части книги, с тем, чтобы привести их в соответствие с новейшими достижениями науки. При этом устаревшие разделы «Основ теории множеств» были заменены новым текстом, заимствованным из написанных П.С. Александровым разделов книги [55: Alexandroff P.S., Hopf H. Topologie. – Berlin: Springer, 1935], которые пришлось несколько переработать, с тем, чтобы сохранить стиль Хаусдорфа.

подход к обоснованию числовой системы. (Подробнее о развитом Фреге подходе мы расскажем в следующей главе.) Свой подход Фреге в значительной мере основывал на теории множеств, или классов, – той самой теории, где Рассел обнаружил противоречие, о котором сообщил в письме Фреге и поведал математическому миру в книге «Принципы математики» (1903). Рассел занимался изучением парадокса Кантора о множестве всех множеств – и предложил свой вариант этого парадокса.

Парадокс Рассела относится к классам. Класс книг не является книгой и поэтому не содержит самого себя, но класс идей есть идея и содержит сам себя. Каталог каталогов – каталог. Следовательно, одни классы содержат (или включают) самих себя, другие не содержат. Пусть N – класс классов, не содержащих самих себя. К какой разновидности классов принадлежит N? Если N принадлежит N, то, по определению, N не должен принадлежать N. Если же N не принадлежит N, то по определению N должен принадлежать N. Когда Рассел впервые открыл это противоречие, он решил, что трудность здесь кроется в логике, а не в самой математике. Но обнаруженное противоречие ставит под удар само понятие множества, или класса объектов, широко используемое во всей математике. По словам Гильберта, парадокс Рассела был воспринят математическим миром как катастрофа.

В 1918 г. Рассел предложил популярный вариант своей антиномии, получивший название парадокс брадобрея. Один деревенский брадобрей объявил, что он бреет всех жителей деревни, которые не бреются сами, но, разумеется, не бреет тех жителей, которые бреются сами. Брадобрей похвалялся, что в парикмахерском деле ему нет равных, но однажды задумался над вопросом, должен ли он брить самого себя. Если он не бреется сам, то первая половина его утверждения (а именно та, в которой говорится, что брадобрей бреет всех, кто не бреется сам) требует, чтобы он самого себя брил. Но если брадобрей бреется сам, то вторая половина его утверждения (та, в которой говорится, что всех тех, кто бреется сам, он не бреет), требует, чтобы он самого себя не брил. Таким образом, брадобрей оказался в безвыходном положении – он не мог ни брить себя, ни не брить.

Другой парадокс, дающий представление о тех трудностях, с которыми столкнулись математики, был впервые сформулирован в 1908 г. математиками Куртом Греллингом (1886–1943) и Леонардом Нельсоном (1882–1927). Этот парадокс относится к прилагательным, описывающим самих себя и не описывающим самих себя. Такие прилагательные, как, например, «короткий» (-ая, -ое, -ие) или «русский» (-ая, -ое, -ие) описывают самих себя, т.е. применимы к себе, в то время как прилагательные «длинный» или «французский» к себе неприменимы (ведь прилагательное «длинный» вовсе не является длинным, а прилагательное «французский», конечно, русское, а не французское). Аналогично прилагательное «многосложное» является многосложным, но прилагательное «односложное» односложным не является. Назовем прилагательные, применимые к самим себе, автологическими, а прилагательные, неприменимые к самим себе, – гетерологическими. Если прилагательное «гетерологический» гетерологично, то оно применимо к самому себе и, следовательно, автологично. Если прилагательное «гетерологический» автологично, то оно не гетерологично. Но автологичное прилагательное по определению применимо к самому себе. Следовательно, прилагательное «гетерологический» гетерологично. Таким образом, какое бы допущение мы ни приняли, оно неизменно приводит к противоречию. В символической записи парадокс Греллинга–Нельсона гласит: x гетерологичен, если x есть «не x».

В 1905 г. Жюль Ришар (1862–1956), используя тот же метод, которым Кантор доказал, что вещественных чисел больше, чем целых, изобрел еще один «парадокс». Рассуждения Ришара довольно сложны, но противоречие, к которому он приходит, в упрощенном варианте содержится в парадоксе, о котором Дж.Дж. Берри из Бодлеанской библиотеки сообщил Бертрану Расселу (Рассел опубликовал этот парадокс в 1906 г.). Парадокс Берри получил название парадокса слов. Каждое целое число допускает множество различных словесных описаний. Например, число «пять» можно задать одним словом «пять» или фразой «число, следующее за числом четыре». Рассмотрим теперь все возможные описания, состоящие не более чем из 100 букв русского алфавита. Таких описаний не больше чем 33^{100}; поэтому существует лишь конечное множество целых чисел (не большее чем 33^{100}), задаваемых всеми возможными описаниями.[54] Следовательно, существуют какие-то целые числа, не задаваемые описаниями, состоя-

---

[54] **Яглом:** Обычно считают, что русский алфавит содержит 33 буквы (при этом буквы е и ё отождествляются, считаются за одну); поэтому общее число «100-буквенных последовательностей», где каждая буква имеет одно из указанных 33 «значений», равно 100^{33}. (Разумеется, большинство из

щими не более чем из 100 букв. Рассмотрим «наименьшее число, не задаваемое описанием, которое содержит не более ста букв». Но мы только что привели описание такого числа, содержащее менее 100 букв (оно содержит всего 65 букв).

Многие математики в начале XX в. попросту отмахивались от парадоксов, не придавая им особого значения, так как парадоксы относились к теории множеств – тогда еще новой области математики, лежащей далеко не в центре интересов математического мира. Но их оставшиеся в меньшинстве более проницательные коллеги понимали, что парадоксы затрагивают не только классическую математику, но и логику, и это их серьезно тревожило. Кое-кто пытался следовать совету, который Уильям Джеймс дал в своем «Прагматизме»: «Если вам встретится противоречие, введите более тонкое различие». Некоторые логики, начиная с Френка Пламптона Рамсея (1903–1930), пытались проводить различие между семантическими и истинными (т.е. логическими) противоречиями. «Парадокс слов», «гетерологический парадокс» и «парадокс лжеца» они относили к семантическим парадоксам, так как все эти парадоксы затрагивали такие понятия, как истинность и определяемость (или неоднозначность) того или иного словоупотребления. Предполагалось, что строгое определение таких понятий позволит разрешить семантические парадоксы. С другой стороны, парадокс Рассела, парадокс Кантора о множестве всех множеств и парадокс Бурали-Форти были отнесены к логическим противоречиям. Сам Рассел не проводил различия между семантическими и логическими противоречиями. По его мнению, все парадоксы возникают из-за одной логической ошибки, которую он назвал принципом порочного круга и описал следующим образом; «То, что содержит всё множество, не должно быть элементом множества». Принцип Рассела можно сформулировать иначе: «Если для того, чтобы определить множество, необходимо использовать всё множество, то определение не имеет смысла». Так в 1905 г. Рассел объяснил принцип порочного круга. В 1906 г. его объяснение принял Пуанкаре, предложивший специальный термин «непредикативное определение» (определение, в котором некий объект задается (или описывается) через класс объектов, содержащий определяемый объект). Такие определения незаконны.

Рассмотрим пример, приведенный Расселом в «Основаниях математики» (*Principia Mathematica* [95*][55], гл. X). Закон исключенного третьего утверждает, что каждое высказывание является либо истинным, либо ложным. Но закон исключенного третьего сам также является высказыванием. Следовательно, вопреки нашим намерениям сформулировать всегда истинный закон логики мы получили высказывание, которое, как и любое другое высказывание, может быть истинным, но может быть и ложным. «Такая формулировка логического закона, – заявил Рассел, – лишена смысла».

Приведем еще несколько примеров. Может ли всемогущее существо создать неразрушимый предмет? Разумеется, может – на то оно и всемогущее. Но коль скоро оно всемогущее, то ему ничего не стоит разрушить что угодно, в том числе и неразрушимый предмет. В этом примере слово «всемогущее» принимает значение из недопустимого множества. Такого рода парадоксы, как отметил логик Альфред Тарский, будучи семантическими, бросают вызов языку в целом.

Предпринимались и другие попытки разрешить названные парадоксы. Противоречие, заключенное в высказывании «Из всех правил имеются исключения», отвергалось некоторыми как лишенное смысла. Существуют предложения, поясняли они, построенные по всем правилам грамматики и тем не менее лишенные смысла, т.е. ложные, как, например, фраза «Это предложение состоит из пяти слов». Аналогично первоначальный вариант парадокса Рассела (предложенный самим Расселом) отвергался на том основании, что класс всех классов, не содержащих самих себя, не имеет смысла или не существует. Парадокс брадобрея «решался» либо ссылкой на то, что такого брадобрея не существует, либо требованием, согласно которому брадобрей должен исключить себя как из класса тех, кого он бреет, так и из класса тех, кого он не бреет (утверждение «Учитель обучает всех, кто ходит к нему на занятия», поясняли сторонники такого решения парадокса брадобрея, не распространяется на самого учителя). Рассел отверг подобное объяснение. В работе 1908 г. он так выразил свое мнение по этому поводу: «Всякий волен в беседе с человеком, у которого длинный нос, заметить: «Говоря о носах, я

составленных таким образом «фраз», разбиение которых на отдельные «слова», если только оно возможно, производится «по смыслу», не будут выражать ничего или не будут описывать никакого числа).

[55] Whitehead A.N., Russell B. *Principia Mathematica,* 3 vols. – New York: Cambridge University Press., Ist ed., 1910–1913; 2nd ed., 1925–1927.

отнюдь не имею в виду слишком длинные носы». Вряд ли, однако, такое замечание можно считать успешной попыткой обойти больной вопрос».

Слово «все» действительно многозначно. По мнению некоторых логиков и математиков, несколько семантических парадоксов обязаны своим происхождением употреблению слова «все». Так, в парадоксе Бурали-Форти речь идет о классе всех ординальных чисел. Включает ли этот класс ординальное число, соответствующее всему классу? Аналогичным образом гетерологический парадокс определяет некий класс слов. Включает ли этот класс само слово «гетерологический»?

Возражение Рассела–Пуанкаре против непредикативных определений стало общепринятым. К сожалению, такие определения использовались в классической математике. Наибольшие треволнения вызвало понятие наименьшей верхней границы. Рассмотрим множество всех чисел x, заключенных между 3 и 5, но не достигающих этих границ: $3 < x < 5$. Верхними границами, т.е. числами, превосходящими все принадлежащие множеству числа, являются числа 5, 5½ , 6, 7, 8 и т.д. Среди них существует **наименьшая** верхняя граница – число 5. Следовательно, наименьшая верхняя граница определена через класс верхних границ, содержащий ту самую границу, которая подлежит определению. Другой пример непредикативного определения – определение максимального значения (максимума) функции на заданном интервале. Максимальное значение – наибольшее из значений, принимаемых функцией на заданном интервале. Наименьшая верхняя граница, как и максимум функции, – фундаментальные понятия математики, и в математическом анализе избавиться от них нелегко. Кроме того, немало непредикативных определений используется и в других случаях.

Хотя непредикативные определения, встречающиеся в парадоксах, действительно приводят к противоречиям, чувство неудовлетворенности не оставляло математиков, так как, насколько они могли видеть, далеко не все непредикативные определения приводили к противоречиям. Такие высказывания, как «Джон – самый высокий игрок в своей команде» или «Это предложение – короткое», заведомо безобидны в этом отношении, хотя они и непредикативны. То же можно сказать и о предложении «Самое большое число в множестве чисел 1, 2, 3, 4, 5 равно 5». Непредикативные предложения используются буквально на каждом шагу. Так, задав класс всех классов, содержащих более пяти элементов, мы тем самым задаем класс, содержащий самого себя. Множество S всех множеств, определяемых не более чем 25 словами, также содержит S. Безусловно, обилие в математике непредикативных определений не могло не тревожить ученых.

К сожалению, мы не располагаем критерием, который позволил бы распознавать, приводит ли данное непредикативное определение к противоречию или не приводит. Следовательно, всегда существует опасность, что вновь обнаруженные непредикативные определения приведут к противоречиям. Эта проблема стояла очень остро с самого начала, когда Эрнст Цермело и Анри Пуанкаре впервые взялись за нее. Пуанкаре предложил наложить запрет на непредикативные определения. Один из выдающихся математиков первой половины XX в. Герман Вейль, сознавая, что некоторые непредикативные определения приводят к противоречиям, приложил немало усилий, пытаясь переформулировать определение наименьшей верхней границы таким образом, чтобы это позволило избежать непредикативности. Усилия Вейля не увенчались успехом. Обеспокоенный постигшей его неудачей, Вейль пришел к выводу, что математический анализ логически не обоснован и что некоторыми его разделами необходимо пожертвовать. Наложенный Расселом запрет («Мы не можем при определении множеств исходить из произвольных условий, а затем разрешать всем построенным множествам без разбора быть элементами других множеств») заведомо не давал ответа на вопрос, какие из непредикативных определений можно считать допустимыми.

Хотя первопричина возникших противоречий казалась вполне очевидной, проблема построения математики, свободной от противоречий, оставалась открытой. Более того, у математиков отнюдь не было уверенности в том, что в будущем не появятся новые противоречия. Всё это позволяет понять, почему в начале XX в. проблема непротиворечивости стала весьма острой. Математики рассматривали эти противоречия как парадоксы теории множеств. Но именно теория множеств открыла математикам глаза на то, что противоречия возможны и в классических разделах математики.

На фоне непрекращающихся попыток подвести прочный фундамент под здание математики доказательство непротиворечивости перерастало в острейшую проблему. Но в начале XX в. математики поняли, что с точки зрения обоснования уже полученных результатов существуют и другие проблемы, не уступающие по своей значимости проблемам непротиворечивости. Критический дух математиков окреп и закалился в конце XIX в., и, вступив в двадцатое столетие, они подвергли безжалостному пересмотру всё, что легко принимали на веру их предшественники. Им удалось обнаружить совершенно невинное на первый взгляд утверждение, которое ранее кочевало из доказательства в доказательство, не привлекая внимания. Утверждение это состояло в следующем: если имеется любой набор (конечный или бесконечный) множеств, то всегда можно, выбрав из каждого множества по одному элементу, составить из этих элементов новое множество. Так, от каждого штата из пятидесяти штатов США можно выбрать по одному жителю и составить из них группу из 50 человек.

То, что это утверждение в действительности составляет специальную аксиому – так называемую **аксиому выбора**, математики осознали из работы Эрнста Цермело (1871–1953), опубликованной в 1904 г. В этой связи весьма уместно обратиться к истории вопроса [56][56]. Когда Кантор задумал расположить трансфинитные числа по величине, ему понадобилась теорема о том, что любое множество вещественных чисел может быть вполне упорядочено. Всякое вполне упорядоченное множество прежде всего линейно упорядочено. Это означает, что если a и b – любые два (разные!) элемента множества, то, как и в множестве вещественных чисел или точек прямой, либо a предшествует b, либо b предшествует a. Кроме того, если a предшествует b и b предшествует c, то a предшествует c. Множество вполне упорядочено, если в любом его подмножестве, каким бы способом оно ни было выбрано, всегда существует первый элемент. Например, множество положительных целых чисел, расположенных в обычной последовательности, вполне упорядочено. Множество вещественных чисел, расположенных в обычной последовательности, линейно упорядочено, а не вполне упорядочено, так как в подмножестве, состоящем из всех чисел, которые больше нуля, нет первого элемента. В 1883 г. Кантор высказал предположение, что каждое множество можно вполне упорядочить, и этой гипотезой он пользовался, так и не сумев ее доказать. Напомним, что в своем докладе на II Международном математическом конгрессе 1900 г. Гильберт назвал среди прочих проблему доказательства полной упорядочиваемости множества вещественных чисел. В 1904 г. Цермело доказал, что каждое множество может быть вполне упорядочено (см., например, [54][57]), и в ходе доказательства особо отметил, что он использует аксиому выбора.

Как уже неоднократно случалось в прошлом, математики использовали аксиому выбора бессознательно и лишь гораздо позднее не только поняли, что применяют эту аксиому, но и докопались до причин, побудивших их ее принять. Кантор неявно использовал аксиому выбора в 1887 г. для доказательства теоремы о том, что любое бесконечное множество содержит подмножество с кардинальным числом $\aleph_0$. Кроме того, аксиома выбора неявно использовалась при доказательствах многих теорем топологии, теории меры, алгебры и функционального анализа. Например, аксиома выбора находит применение при доказательстве теоремы о том, что в любом ограниченном множестве чисел всегда можно выбрать последовательность, сходящуюся к предельной точке множества. Аксиома выбора используется также для доказательства фундаментальных утверждений, например при построении вещественных чисел из аксиом Пеано для целых чисел. Аксиома выбора применяется и при доказательстве теоремы о конечности множества всех подмножеств конечного множества. В 1923 г. Гильберт назвал аксиому выбора общим принципом, который необходим и неоценим как один из первых элементов теории математического вывода. Пеано первым обратил внимание на аксиому выбора. Еще в 1890 г. он писал, что нельзя бесконечно применять произвольное правило, позволяющее отбирать по одному элементу из каждого множества, сколько бы их ни было. Пеано сформулировал правило выбора для частного случая, т.е. для той задачи (интегрируемости дифференциальных уравнений), рассмотрением которой он занимался, и тем самым устранил возникшую трудность. То, что аксиома выбора действительно является аксиомой, понял в 1902 г. Беппо Леви, а Цермело узнал об этом от Эрхардта Шмидта в 1904 г.

Явное использование Цермело аксиомы выбора вызвало бурю протестов в следующем же номере (за 1904 г.) авторитетного журнала *Mathematische Annalen*. С критикой аксиомы выбора выступили Эмиль Борель (1871–1956) и Феликс Бернштейн (1878–1956). Вслед за их критическими выступлениями последовал обмен письмами между ведущими математиками того времени Эмилем Борелем, Рене Бэром (1874–1932), Анри Лебегом (1875–1941) и Жаком

[56] Медведев Ф.А. *Ранняя история аксиомы выбора*. – М.: Наука, 1982.
[57] Хаусдорф Ф. *Теория множеств*. – М.– Л.; Гостехиздат, 1937.

Адамаром (1865–1963); эти письма были опубликованы на страницах журнала *Bulletin de la Société Mathématique de France* за 1905 г.

Суть критики сводилась к тому, что если не указано правило, по которому из каждого множества выбирается по элементу, то реально выбор не производится и поэтому в действительности новое множество не образуется. В ходе доказательства выбор может изменяться, поэтому доказательство утрачивает силу. По выражению Бореля, выбор без правил представляет собой акт веры; поэтому аксиома выбора лежит за пределами математики. Поясним сказанное на примере, предложенном в 1905 г. Бертраном Расселом. Предположим, что у меня есть сто пар обуви и я из каждой пары выбираю левый ботинок. Правило, которым я руководствуюсь при выборе в этом случае, ни у кого не вызовет сомнений. Но предположим, что у меня имеется сто пар носков и из каждой пары я выбираю по одному носку. В этом случае невозможно указать, какой носок (правый или левый) был выбран из каждой пары, т.е. нельзя сформулировать правило, по которому был произведен выбор. Те, кто отстаивал аксиому выбора, признавали, что правила выбора может и не быть, но не считали его необходимым. По их мнению, акты выбора определены просто тем, что их считают определенными.

Против аксиомы выбора выдвигались и другие возражения. Так, Пуанкаре принимал аксиому выбора, но отвергал предложенное Цермело доказательство полной упорядоченности, поскольку в этом доказательстве используются непредикативные утверждения. Бэр и Борель возражали не только против аксиомы, но и против доказательства, так как из него не видно, как осуществляется полное упорядочение, – доказывается лишь, что оно осуществимо. Брауэр, со взглядами которого на основания математики мы познакомимся в дальнейшем (гл. X), возражал потому, что считал неприемлемыми актуально бесконечные множества. Возражение Рассела сводилось к тому, что множество естественно определять свойством, которым обладают все элементы этого множества, и только они. Так, например, множество людей, носящих зеленую шляпу, можно было бы определить свойством «носящие зеленую шляпу». Но аксиома выбора **не требует**, чтобы выбранные элементы обладали каким-нибудь определенным свойством. Она лишь утверждает, что каждый элемент выбран из одного из заданных множеств по одному элементу на каждое множество. Сам Цермело довольствовался интуитивным понятием множества, и поэтому у него не вызывало сомнений, что при любом выборе из каждого множества по одному элементу образуется новое множество.

Единственным стойким защитником Цермело был Адамар. Он утверждал, что аксиома выбора приемлема по тем же причинам, какие он приводил, отстаивая теорию множеств Кантора. По мнению Адамара, для того, чтобы утверждать существование объектов, отнюдь не требуется их описывать. Если одного утверждения о том, что объект существует, достаточно для прогресса математики, то это утверждение приемлемо.

В ответ на критические замечания Цермело дал второе доказательство полного упорядочения, также основанное на использовании аксиомы выбора (в действительности Цермело показал, что оба доказательства эквивалентны). Цермело отстаивал использование аксиомы выбора и утверждал, что до тех пор, пока эта аксиома не приводит к противоречию, ее использование в математике вполне допустимо. По словам Цермело, аксиома выбора «имеет исключительно объективный характер, который сразу же ясен». Он признал, что аксиома выбора не вполне самоочевидна, так как в ней говорится о выборе из бесконечно многих множеств, но она научно необходима, поскольку используется для доказательства важных теорем.

Было предложено много эквивалентных вариантов аксиомы выбора. Если аксиому выбора принять наряду с другими аксиомами теории множеств, то эти варианты представляют собой теоремы. Но все попытки заменить аксиому выбора менее спорной аксиомой оказались безуспешными. Маловероятно, что удастся найти удачную замену аксиомы выбора, приемлемую для всех математиков.

Споры вокруг аксиомы выбора по существу сводились к одной главной проблеме: как следует понимать существование в математике? Одни математики склонны считать «существующим» любое понятие, оказавшееся полезным, если оно не приводит к противоречиям, например обычную замкнутую поверхность, площадь которой бесконечна. Для других математиков «существование» означает четко распознаваемое определение или такое понятие, которое позволяет отождествить или по крайней мере описать его. Одной лишь возможности выбора недостаточно. В дальнейшем эти взаимоисключающие точки зрения стали еще более непримиримыми – мы поговорим о них в следующих главах. Пока же заметим только, что аксиома выбора стала яблоком раздора между математиками.

И тем не менее десятилетия спустя, когда математика значительно расширила свои границы, многие ученые продолжали использовать аксиому выбора. Не утихали и споры по поводу того, можно ли считать аксиому выбора и доказываемые с ее помощью теоремы законной, вполне приемлемой математикой.[58] Аксиома выбора стала предметом активного обсуждения и уступала в этом отношении лишь аксиоме Евклида о параллельных. По замечанию Лебега, оппонентам не оставалось ничего другого, как поносить друг друга, ибо прийти к соглашению они не могли. Сам Лебег, несмотря на отрицательное и скептическое отношение к аксиоме выбора, всё же пользовался ею, по его собственному выражению, «дерзко и осторожно», полагая, что будущее покажет, кто прав.

Но в первые же годы XX в. математиков стала беспокоить еще одна проблема. Сначала она не представлялась достаточно фундаментальной, но по мере распространения канторовской теории трансфинитных кардинальных и ординальных чисел становилась всё более острой и настоятельно требовала своего решения.

В своих последних работах Кантор построил теорию трансфинитных кардинальных чисел на основе теории ординальных чисел. Например, кардинальное число множества всех возможных конечных множеств (точнее, множество всех конечных ординальных чисел) равно $\aleph_0$. Кардинальное число всех возможных множеств ординальных чисел, содержащих лишь считанное число ($\aleph_0$) элементов, равно $\aleph_1$. Продолжая эту последовательность, Кантор получал всё большие кардинальные числа, которые обозначил $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... Кроме того, каждое очередное кардинальное число непосредственно следовало за предыдущим (было ближайшим к предыдущему кардинальным числом). Но в самом начале своих работ по трансфинитным числам Кантор показал, что множество всех вещественных чисел насчитывает $2^{\aleph_0}$ членов (эту величину принято кратко обозначать *c*) и что $2^{\aleph_0}$ больше, чем $\aleph_0$. Вопрос, который тогда же поставил Кантор, заключался в следующем: с каким членом последовательности алефов совпадает *c*? Так как кардинальное число $\aleph_1$ следует непосредственно за $\aleph_0$, кардинальное число *c* больше или равно $\aleph_1$. Кантор высказал предположение, что $c = \aleph_1$. Это предположение, впервые сформулированное в 1884 г. и опубликованное в том же году, получило название <u>гипотезы континуума</u>.[59] Эта гипотеза допускает также другую, несколько более простую формулировку: не существует трансфинитного числа, заключенного между $\aleph_0$ и *c* (кардинальное число любого бесконечного подмножества множества вещественных чисел либо равно $\aleph_0$, либо равно *c*)[60]. В первые десятилетия XX в. вокруг гипотезы континуума развернулась бурная дискуссия, но проблема так и не была решена. Помимо того, что гипотеза континуума дала возможность доказать новые теоремы, она приобрела особое значение, так как позволила глубже понять бесконечные множества, взаимно-однозначное соответствие и аксиому выбора и тем самым способствовала лучшему обоснованию теории множеств.

Итак, в начале XX в. перед математиками встало несколько трудных проблем. Требовалось устранить уже обнаруженные противоречия. Но еще более важным представлялось доказать непротиворечивость всей математики, ибо без этого нельзя было гарантировать, что в будущем не возникнут новые противоречия. Все эти проблемы имели решающее значение для судеб математики. Многие ученые продолжали считать неприемлемой аксиому выбора и ставили под сомнение доказанные на ее основе теоремы. «Нельзя ли доказать те же теоремы, исходя из более приемлемой аксиомы, и полностью отказаться от аксиомы выбора?» – этот вопрос беспокоил умы. Необходимо было также доказать или опровергнуть гипотезу континуума, важность которой по мере развития математики становилась всё более очевидной.

---

[58] **Яглом:** Сомнения по этому поводу подогревались рядом полностью противоречащих нашей интуиции (или очень сильных и «слишком просто» доказываемых) результатов, получаемых с использованием аксиомы выбора Цермело. Наиболее известна здесь, пожалуй, эффектная работа Ф. Хаусдорфа, результат которой, несколько огрубляя, можно описать так: пусть Ш – обыкновенный шар трехмерного евклидова пространства; Хаусдорф разбивает этот шар на четыре множества I, II, III и IV так, что сложив по-другому множества I и II, мы получим из них шар $Ш_1$, равный Ш; из множеств III и IV также можно сложить равный Ш шар $Ш_2$. (Ср. гл. XII).

[59] Можно взять множество с кардинальным числом $\aleph_1$ и рассмотреть множество всех его подмножеств, кардинальное число которого обозначается через $2^{\aleph_1}$. Как доказал Кантор, $2^{\aleph_1} > \aleph_1$. Можно предположить, что $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ и что $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$. Такое предположение называется <u>обобщенной гипотезой континуума</u>.

[60] Вариант гипотезы континуума, приведенный в скобках, не требует обращения к аксиоме выбора.

Проблемы, с которыми столкнулись математики в начале XX в., были весьма серьезными, однако при других обстоятельствах они вряд ли вызвали бы столь сильные потрясения. Правда, противоречия в любом случае пришлось бы разрешать, но выявленные к началу XX в. противоречия относились к теории множеств – новому разделу математики, и математиков не оставляла надежда, что в свое время его удастся строго обосновать. Что же касается опасений обнаружить в классической математике новые противоречия, возможно связанные с использованием непредикативных определений, то к началу XX в. проблему непротиворечивости удалось свести к проблеме непротиворечивости арифметики, а то, что арифметика непротиворечива, ни у кого не вызывало сомнений. Вещественные числа находились в обращении более пяти тысяч лет, и относительно их было доказано огромное число теорем; при этом никаких противоречий никогда обнаружено не было. То обстоятельство, что какая-то аксиома, в данном случае аксиома выбора, использовалась неявно и что ее продолжали применять, подавляющее большинство математиков не беспокоило. Движение за аксиоматизацию, развернувшееся в конце XIX в., обнаружило, что многие аксиомы использовались неявно. Гипотеза континуума была в то время не более чем деталью теории Кантора, а некоторые математики целиком отвергали канторовскую теорию множеств. Математикам приходилось сталкиваться и с гораздо более серьезными трудностями, но они никогда не теряли присутствия духа. Например, в XVIII в., полностью сознавая принципиальный характер трудностей, возникших при попытках обосновать математический анализ, математики тем не менее продолжали создавать на основе дифференциального и интегрального исчисления новые обширные разделы математики и лишь впоследствии подвели под свои построения прочный фундамент, в основе которого лежало понятие числа. Проблемы теории множеств можно было бы сравнить с запалом, который приводит к воспламенению заряда, вызывающего взрыв бомбы. Некоторые всё еще верили, что математика представляет собой свод незыблемых истин. Они надеялись доказать это, и Фреге предпринял попытку осуществить подобные намерения. Кроме того, возражения против аксиомы выбора были вызваны не только тем, что утверждает сама аксиома. Математики, в частности Кантор, вводили всё новые абстрактные понятия, обладавшие, по их утверждениям, той же степенью достоверности, какой обладает, например, понятие треугольника. Другие отвергали абстрактные понятия, считая их далекими от реальности и потому неспособными нести сколько-нибудь полезную нагрузку. Дискуссия по поводу теории множеств Кантора, аксиомы выбора и аналогичных понятий свелась к основному вопросу: в каком смысле можно утверждать, что математические понятия **существуют**? Должны ли они соответствовать реальным физическим объектам, являясь их идеализацией? Эту проблему рассматривал еще Аристотель. Он, как и большинство греческих мыслителей, считал, что математические понятия непременно должны иметь реальные прототипы. Именно из-за отсутствия физических реализаций Аристотель отвергал и существование бесконечного множества как «готовой» совокупности элементов и правильный семиугольник, который не удавалось построить циркулем и линейкой, что заставляло античных математиков считать его «непостроимым», т.е. в определенном смысле «не существующим». С другой стороны, последователи Платона – а Кантор был одним из них – полагали, что идеи существуют в некоем объективном «мире идей» и не зависят от человека. Человек лишь открывает эти идеи.

Другой гранью проблемы существования был смысл <u>доказательств существования</u>. Например, Гаусс доказал, что любое алгебраическое уравнение n-й степени с вещественными или комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один (комплексный, а может, и вещественный) корень. Но из приведенного Гауссом доказательства не было ясно, каким образом можно **вычислить** этот корень. Аналогично Кантор доказал, что вещественных чисел больше, чем алгебраических (корней алгебраических уравнений с целыми коэффициентами). Следовательно, должны существовать <u>трансцендентные</u> иррациональные числа, не являющиеся алгебраическими. Но такое доказательство существования не позволяло назвать и тем более вычислить хотя бы одно трансцендентное число. Некоторые математики начала XX в. (Борель, Бэр, Лебег) считали чистые доказательства существования бессмысленными. По их мнению, доказательство существования должно позволять математикам вычислять существующие величины с любой степенью точности. Такие доказательства существования получили название <u>конструктивных</u>.

Некоторых математиков беспокоило еще одно обстоятельство. Аксиоматизация математики была осуществлена как формальный ответ на интуитивное принятие многих очевидных фактов. Правда, аксиоматизация помогла избавиться от противоречий и неясностей, в частности в математическом анализе. Но сторонники аксиоматизации настаивали также на явных определениях, формулировках аксиом и доказательствах того, что было очевидно на интуитивном уровне – настолько очевидно, что прежде никто даже не осознавал, в какой мере те или иные рассуждения опираются на интуицию (гл. VIII). Возникшие в результате аксиоматизации дедуктивные построения оказались весьма сложными и громоздкими. Так, построение теории рациональных и в особенности иррациональных чисел на основе аксиоматики целых чисел изобиловало множеством деталей и отличалось большой сложностью. Всё это вызывало тягостное чувство у некоторых математиков, в частности у Леопольда Кронекера (1823–1891), считавшего все эти новомодные теории излишне сложными и искусственными. Кронекер первым из выдающихся математиков своего времени пришел к заключению, что с помощью логических средств невозможно создать разумную теорию, выходящую за рамки интуиции, подсказываемой здравым смыслом.

Другим камнем преткновения стала математическая логика, бурное развитие и всё расширяющиеся границы которой заставили математиков осознать, что обращение к законам логики не может оставаться неформальным и осуществляться лишь от случая к случаю. Работы Пеано и Фреге показали математикам необходимость тонко различать понятия, используемые в математических рассуждениях, например, проводить различия между элементом, принадлежащим какому-то классу, и классом, входящим в другой класс.[61] Проведение такого рода различий современники Фреге считали чрезмерным педантизмом. По их мнению, эти различия скорее затрудняли, чем облегчали, работу математика.

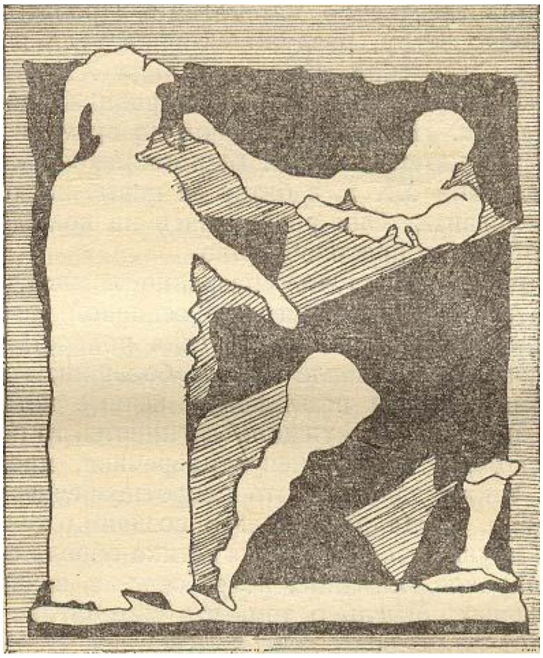
Гораздо более важным было то, что многие математики начали сомневаться в неограниченной применимости принципов логики, хотя в конце XIX в. эти сомнения еще никто не высказывал явно. Что гарантирует применимость принципов логики к бесконечным множествам? Если принципы логики есть продукт человеческого опыта, то нельзя не спросить, распространяются ли они на те чисто рациональные построения, которые не имеют опытной основы.

Разногласия между математиками по поводу затронутых нами проблем начались задолго до наступления XX в. Новые парадоксы лишь усугубили уже существовавшие расхождения в мнениях. Через многие годы математики с тоской вспомнят о коротком, но счастливом периоде, предшествовавшем появлению противоречий, – периоде, о котором Поль Дюбуа-Реймон отозвался как о времени, когда математики «еще жили в раю».

[61] **Яглом:** Сегодня это различие отражается в существовании двух разных символов: $\in$ (например, $x\in A$) и $\subset$ ($B\subset A$), используемых уже и в школьных учебниках математики.

X. Логицизм против интуиционизма

Логистика не бесплодна, она порождает антиномии.[62]
Анри Пуанкаре



Открытие парадоксов теории множеств и осознание того, что аналогичные парадоксы могут встретиться и в уже существующей классической математике (хотя пока они и не обнаружены), заставили математиков всерьез заняться проблемой непротиворечивости. Весьма насущным вдруг стал вопрос о том, какой смысл имеет в математике глагол «существовать», поднятый, в частности, в связи с вольным использованием аксиомы выбора. Всё более широкое применение бесконечных множеств при перестройке оснований математики и создании ее новых разделов вновь оживило старые разногласия по поводу законности использования актуально бесконечных величин и множеств. Начавшееся в конце XIX в. движение за аксиоматизацию математики все эти кардинальные проблемы просто оставляло в стороне.

Но сколь ни важны были эти и другие вопросы, которых мы коснулись в предыдущей главе, не только они привели к пересмотру оснований собственно математики. Проблемы, о которых идет речь, подобно ветру, раздули тлевшие угли и заставили их вспыхнуть ярким пламенем. Еще до начала XX в. было провозглашено и даже разработано несколько радикально новых подходов к математике. Но поскольку они до времени оставались в тени, большинство математиков не восприняли их всерьез. Однако в первые десятилетия XX в. в битву за новые подходы к математике вступили гиганты. Они разделились на враждующие лагери и вступили в открытое противоборство.

Одно из направлений получило название «логистическая школа». Если не вдаваться в подробности, то основной тезис логицистов сводился к утверждению, что математика полностью может быть выведена из логики. В начале XX в. большинство математиков видели в законах логики незыблемые, вечные истины. Но если законы логики истинны, рассуждали логицисты, то истинна и математика. А поскольку истина непротиворечива, продолжали они, то математика также должна быть непротиворечивой.

Как и обычно, когда речь идет о создании нового большого направления в науке, прежде чем логистика обрела строгую форму и привлекла широкое внимание, потребовались значительные усилия многих ученых. Мысль о том, что математика выводима из логики, восходит по меньшей мере к Лейбницу. Лейбниц различал истины основания (или необходимые истины) и истины факта (или случайные истины) (гл. VIII). Суть этого различия он пояснил в письме к своему другу Косте́. Истина именуется необходимой, если противоположное утверждение приводит к противоречию. Если же истина не является необходимой, то она называется случайной. Утверждения о том, что бог существует[63], что все прямые углы равны между собой и т.д., – необходимые истины. Утверждения о том, что я сам существую, или о том, что в природе

[62] Пуанкаре А. *О науке*. – М.: Наука, 1983, с. 400.

[63] **Яглом:** Мы уже указывали на своеобразный характер религиозности Лейбница, для которого бог играл роль гаранта истинности логики, но, «создав однажды» Вселенную, далее никак не вмешивался в ее функционирование. (Разумеется, Лейбниц и не подозревал, что возможных логических систем существует много; осознание этого обстоятельства заставило бы его полностью пересмотреть всю свою религиозно-философскую систему).

встречаются тела, в которых можно указать углы, в точности равные 90°, – случайные истины. Эти утверждения могут быть как истинными, так и ложными – и в том и в другом случае Вселенная не перестанет существовать. Господь бог, по мнению Лейбница, выбрал из бесконечно многих возможностей ту, которую счел наиболее подходящей. Поскольку математические истины необходимы, они должны быть выводимы из логики, принципы которой также необходимы и незыблемо истинны во всех возможных мирах.

Лейбниц не осуществил программу вывода математики из логики, как не осуществили ее в течение последующих почти двухсот лет все те, кто высказывал аналогичные убеждения. Так, Рихард Дедекинд голословно утверждал, что число невыводимо из интуитивных представлений о пространстве и времени, а является «непосредственной эманацией законов чистого разума». По мнению Дедекинда, из числа мы выводим точные понятия пространства и времени. Дедекинд начал развивать свой тезис, но не особенно преуспел в этом [47][64].

Наконец, за осуществление основного тезиса логицизма принялся находившийся под влиянием идей Дедекинда Готлоб Фреге, который внес немалый вклад в развитие математической логики (гл. VIII). Фреге относил математические законы к числу так называемых аналитических суждений. Такие суждения утверждают не более того, что неявно заложено в принципах логики, являющихся априорными истинами. Математические теоремы и их доказательства позволяют нам выявить это неявное. Не вся математика применима к реальному миру, но вся математика заведомо состоит из необходимых истин. Построив в своей работе «Исчисление понятий» (1879) логику на основе явно сформулированных аксиом, Фреге в «Основаниях арифметики» (1884) и в двухтомном сочинении «Основные законы арифметики» (1893–1903) приступил к выводу из логических посылок арифметических понятий, определений и правил. В свою очередь из законов арифметики можно вывести алгебру, математический анализ и даже геометрию, так как аналитическая геометрия позволяет выразить геометрические понятия и свойства геометрических фигур на языке алгебры. К сожалению, символика Фреге была чрезвычайно сложной и непривычной для математиков, в силу чего работы Фреге оказали слабое влияние на современников. Известна история о том, что как раз в то время, когда Фреге завершил работу над вторым томом «Основных законов арифметики» (1902), он получил (такова ирония судьбы!) письмо от Бертрана Рассела. В этом письме Рассел писал, что, к сожалению, Фреге использовал в своем труде понятие (множество всех множеств), применение которого недопустимо, ибо оно приводит к противоречию. В конце второго тома Фреге отметил: «Вряд ли с ученым может приключиться что-нибудь худшее, чем если у него из-под ног выбьют почву в тот самый момент, когда он завершит свой труд. Именно в таком положении оказался я, получив письмо от Бертрана Рассела, когда моя работа уже была почти закончена». Фреге ничего не знал о парадоксах, обнаруженных за то время, пока он писал свою книгу.

Бертран Рассел независимо наметил ту же программу и, работая над ее осуществлением, узнал о работах Фреге. В своей «Автобиографии» (1951) Рассел признает также, что на него оказали влияние взгляды Пеано, с которым он встретился на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 г.:

> Конгресс стал поворотным пунктом в моей интеллектуальной жизни, потому что на нем я встретил Пеано. Я уже знал его имя и некоторые из его работ... Мне стало ясно, что используемые им обозначения представляют собой тот самый инструмент анализа, на поиск которого я затратил не один год, и что, изучив обозначения Пеано, я обрету новый мощный аппарат, о создании которого давно мечтал.

В «Принципах математики» (1-е изд. – 1903) Рассел говорит прямо: «Тот факт, что вся математика есть не что иное, как символическая логика, – величайшее открытие нашего века».

В начале XX в. Рассел, как и Фреге, надеялся, что если фундаментальные законы математики удастся вывести из логики, то поскольку логика, несомненно, является сводом нетленных истин, математические законы также окажутся истинными – и тем самым проблема непротиворечивости будет разрешена. В книге «Мое философское развитие» (1959) Рассел писал, что стремился прийти к «совершенной математике, не оставляющей места для сомнений».

Разумеется, Расселу было известно, что Пеано вывел свойства вещественных чисел из аксиом для целых чисел. Знал он и о том, что Гильберт предложил систему аксиом для всей

[64] Дедекинд Р. *Что такое числа и для чего они служат*. – Казань: Изд-во Императорского университета, 1905.

системы вещественных чисел. Однако во «Введении в математическую философию» (1919) Рассел заметил по поводу аналогичного подхода Дедекинда: «Метод постулирования того, что нам требуется, обладает многими преимуществами, но такими же преимуществами обладает воровство перед честным трудом». В действительности Рассел был озабочен тем, что постулирование десяти или пятнадцати аксиом о числах отнюдь не гарантирует их непротиворечивость и истинность. По выражению Рассела, постулируя, мы излишне полагаемся на счастливый случай. В то время как Рассел в начале XX в. не сомневался, что принципы логики – истины и поэтому они непротиворечивы, Уайтхед в 1907 г. предостерегал: «Невозможно формально доказать непротиворечивость самих логических посылок».

Многие годы Рассел считал, что принципы логики и объекты математического знания существуют независимо от разума и лишь воспринимаются разумом. Знание объективно и неизменно. Свою позицию Рассел ясно изложил в книге «Проблемы философии» (1912).

Когда дело касалось проблемы истины в математике, Рассел готов был пойти еще дальше, чем Фреге. В юности Рассел был убежден, что математика служит источником истин о реальном мире. Рассел не мог указать, какая из конфликтующих геометрий (евклидова или неевклидова) истинна, – тем более что обе соответствуют реальному миру (гл. IV), – но в «Очерке оснований геометрии» (1898) ему удалось найти несколько математических законов (например, закон, согласно которому физическое пространство должно быть однородно, т.е. должно всюду обладать одинаковыми свойствами), являющихся, по его мнению, истинами. В то же время трехмерность пространства Рассел считал эмпирическим фактом. Тем не менее существует объективный реальный мир, о котором мы можем получать точные знания. Поэтому-то Рассел и пытался найти математические законы, которые вместе с тем должны быть физическими истинами. Эти математические законы должны были следовать из логических принципов.

В «Принципах математики» Рассел обобщил свои взгляды в отношении физической истинности математики. По его словам, «все утверждения относительно всего реально существующего, например пространства, в котором мы живем, относятся к экспериментальной или эмпирической науке, а не к математике; утверждения, относящиеся к прикладной математике, возникают в тех случаях, когда в утверждениях, относящихся к чистой математике, одно или несколько переменных полагают равными некоторым константам...» Даже в этом варианте Рассел продолжал верить, что какие-то основополагающие физические истины содержатся в математике, выводимой из логики. В ответ на замечания скептиков, утверждавших, что абсолютных истин не существует, Рассел заявил: «Математика служит вечным укором подобному скептицизму, ибо ее здание, возведенное из истины, противостоит неколебимо и неприступно всему оружию сомневающегося цинизма».

Идеи, в общих чертах намеченные Расселом в «Принципах математики», были подробно развиты им совместно с Алфредом Нортом Уайтхедом[65] (1861–1947) в трехтомном труде «Основания математики» (*Principia Mathematica* [95*][66], 1-е изд. – 1910–1913 гг.). Так как именно в этом фундаментальном труде содержался окончательный вариант изложения позиции логистической школы, ознакомимся хотя бы бегло с его содержанием.

Авторы начинают с построения самой логики. Они тщательно формулируют аксиомы логики и выводят из них теоремы, используемые в последующих рассуждениях. Как и подобает любой аксиоматической теории (гл. VIII), построение логики начинается с неопределяемых понятий. Назовем некоторые из них: понятие элементарного высказывания, присвоение элементарному высказыванию значения истинности, отрицание высказывания, конъюнкция и дизъюнкция двух высказываний, понятие пропозициональной функции.

Рассел и Уайтхед снабдили неопределяемые понятия пояснениями, хотя и подчеркнули, что эти пояснения не входят в логическое построение теории. Под высказыванием и пропозициональной функцией они понимали то же, что и Пирс. Например, «Джон – человек» – высказывание, «*x* – человек» – пропозициональная функция. Под отрицанием понималось высказывание «Неверно, что ...», в котором многоточием обозначено отрицаемое высказывание; так, если *p* есть высказывание «Джон – человек», то под его отрицанием, обозначаемым символом ~*p*, понимается высказывание «Не верно, что Джон – человек» или «Джон не человек».

---

[65] **Яглом:** Рассчитанное на самого широкого читателя изложение взглядов А. Уайтхеда (а частично и Б. Рассела) на математику можно найти в (к сожалению, сейчас уже труднодоступной) книге [57: Уайтхед А.Н. Введение в математику. – Пгд.: Физика, 1916.].

[66] Whitehead A.N., Russell B. *Principia Mathematica,* 3 vols. – New York: Cambridge University Press., Ist ed., 1910–1913; 2nd ed., 1925–1927.

Под конъюнкцией двух высказываний p и q, обозначаемой $p \cdot q$, Рассел и Уайтхед понимали составное высказывание «p и q», а под дизъюнкцией p и q, обозначаемой $p \vee q$, – составное высказывание «p или q». Смысл связки «или» здесь такой же, как в объявлении «Обращаться по телефону 22-22-38 или 22-22-39», означающем, что обращаться можно либо по телефону 22-22-38, либо по телефону 22-22-39, но можно и по тому, и по другому (неисключающее «или»). В предложении «Это лицо – мужчина или женщина» связка «или» имеет иной, более привычный, смысл: либо мужчина, либо женщина, но, разумеется, никак не мужчина и женщина одновременно (исключающее «или»). Математики используют «или» в первом (неисключающем) смысле, хотя иногда «или» употребляется только во втором смысле.[67] Например, в предложении «Треугольник *ABC* – равнобедренный или четырехугольник *PQRS* – параллелограмм» связка «или», как правило, неисключающая, а в предложении «Каждое отличное от нуля вещественное число положительно или отрицательно» связка «или» исключающая – ведь имеющиеся у нас дополнительные сведения о положительных и отрицательных числах говорят нам, что одно и то же число не может быть одновременно и положительным, и отрицательным. Итак, в «Основаниях математики» высказывание «p или q» означает, что p и q оба истинны, или что p ложно, а q истинно, или что p истинно, а q ложно.

Наиболее важное **отношение** между высказываниями – отношение следования, или импликация, означающая, что из истинности одного элементарного высказывания вытекает истинность другого.[68] В работе Рассела и Уайтхеда импликация обозначается символом $\supset$; при этом под записью (импликацией) $p \supset q$ («p влечет q» или «из p следует q») они понимают примерно то же, что Фреге понимал под материальной импликацией (гл. VIII): утверждение «p влечет q» (из p следует q) означает, что если p истинно, то и q обязано быть истинным, а если p ложно, то q может быть истинно или ложно, т.е. из ложного высказывания следует всё что угодно. Такое понятие следования (импликации[69]) высказываний, по крайней мере в некоторых случаях, представляется вполне естественным. Например, если верно, что a – четное число, то и число $2a$ должно быть четным. Но если не верно, что a – четное число, то $2a$ может быть как четным, так и нечетным (в случае, если a не целое, скажем дробное, число). Иначе говоря, если высказывание «a – четное число» ложно, то из него может следовать **любое** заключение.

Разумеется, для того чтобы выводить логические теоремы, необходимо перечислить аксиомы логики. Приведем примеры нескольких таких аксиом:

A) Любое следствие истинного элементарного высказывания[70] является истинным.

B) Если истинно высказывание «истинно p или p», то p истинно.

C) Если q истинно, то «p или q» истинно.

D) Высказывание «p или q» влечет за собой высказывание «q или p».

E) Из «p или (q или r)», следует «q или (p или r)».

Сформулировав аксиомы, Рассел и Уайтхед приступили к выводу теорем логики. Обычные правила силлогистики Аристотеля (см., например, [58][71] и [59][72]) вошли в систему «Оснований математики» как теоремы.

---

[67] **Яглом:** Создатель современной алгебраической структуры математической логики Дж. Буль в качестве основных операций над высказываниями использовал конъюнкцию и исключающую дизъюнкцию (которую сегодня чаще называют «симметрической разностью» высказываний p и q).

[68] **Яглом:** Здесь терминология (и символика) авторов «Оснований математики» несколько расходится с принятой в нашей литературе. Следует различать (бинарное) отношение *следования* между высказываниями, которое может иметь или не иметь место (в абстрактной форме – подмножество декартова квадрата $P \times P$, где P – множество высказываний; отношение «из p следует q» записывают как $p \supset q$, но иногда и наоборот – как $p \subset q$), и *импликацию* – (бинарную) операцию алгебры высказываний, сопоставляющую двум высказываниям p и q третье высказывание $p \Rightarrow q$, которое, как и любое высказывание, может быть истинным или ложным; при этом истинность импликации $p \Rightarrow q$ равносильна тому, что (в обозначениях Рассела–Уайтхеда) $p \supset q$.

[69] **В.Э.:** Здесь Яглом еще раз ссылается на свое предыдущее примечание.

[70] **Яглом:** Под «истинным элементарным высказыванием» здесь понимается то, что у нас часто называют «тождественно истинным высказыванием», т.е, такое высказывание, которое ни в каком случае не может быть ложным.

[71] Калбертсон Дж.Т. *Математика и логика цифровых устройств*. – М.: Просвещение, 1965 (гл. V).

[72] Лукасевич А. *Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики*. – М.: ИЛ, 1959.

Чтобы лучше понять, каким образом логика была формализована и сделана дедуктивной, рассмотрим несколько первых теорем из «Оснований математики» Рассела и Уайтхеда. Одна из теорем утверждает: если из предположения об истинности высказывания *p* следует, что *p* ложно, то *p* ложно. Это не что иное, как принцип *reductio ad absurdum* (приведения к абсурду, основа доказательства от противного). Другая теорема гласит: если *r* следует из *q*, то при условии, что *q* следует из *p*, *r* следует из *p*. (Это один из силлогизмов Аристотеля.) Основная теорема начальной части «Оснований математики» – принцип исключенного третьего: если *p* – любое высказывание, то *p* либо истинно, либо ложно.

Построив логику высказываний, авторы приступили к пропозициональным функциям. Последние представляют собой классы, или множества: вместо того, чтобы называть элементы класса «поштучно», пропозициональная функция указывает их отличительное свойство. Например, пропозициональная функция «*x* красный» задает множество всех красных предметов. Такой способ задания класса позволяет определять бесконечные множества с такой же легкостью, как и конечные. Определение класса по отличительному признаку называется <u>интенсиональным</u> (или <u>дискретным</u>) в отличие от <u>экстенсиональных</u> (<u>прямых</u>) определений, перечисляющих элементы множества.

Рассел и Уайтхед, разумеется, стремились избежать парадоксов, возникающих в тех случаях, когда определяемое множество содержит само себя в качестве элемента. Эту проблему они разрешили, введя требование: «То, что содержит все элементы множества, не должно быть элементом того же множества». Чтобы удовлетворить этому требованию, Рассел и Уайтхед ввели теорию типов.

Хотя сама теория типов довольно сложна, в основе ее лежит простая идея. Индивидуумы, например Джон или какая-то вполне конкретная книга, имеют тип 0. Любое утверждение о свойстве индивидуума имеет тип 1. Всякое утверждение о свойстве свойства индивидуума имеет тип 2 и т.д. Каждое утверждение принадлежит более высокому типу, чем те, о которых в нем что-то утверждается. На языке теории множеств суть теории типов можно было бы сформулировать так: индивидуальные объекты принадлежат типу 0, множество индивидуальных объектов – типу 1, множество множеств индивидуумов – типу 2 и т.д. Так, если *a* принадлежит *b*, то *b* должно быть более высокого типа, чем *a*. Кроме того, нельзя говорить о множестве, принадлежащем самому себе. При переходе к пропозициональным функциям теория типов становится несколько сложнее. Ни один из аргументов пропозициональной функции (ни одно из значений входящих в нее переменных) не должен определяться через саму функцию. Если это требование соблюдено, то функция считается принадлежащей к более высокому типу, чем входящие в нее переменные. Рассмотрев на основе теории типов все известные парадоксы, Рассел и Уайтхед показали, что теория типов позволяет их избегать.

Это несомненное достоинство теории типов (то, что она позволяет избегать противоречий) станет более наглядным, если воспользоваться следующим нематематическим примером. Рассмотрим парадокс, связанный с высказыванием «Из всех правил есть исключения» (гл. IX). Это высказывание относится ко всякого рода конкретным правилам, например к правилу «Во всех книгах имеются опечатки». При обычной интерпретации высказывание «Из всех правил есть исключения» применимо и к самому высказыванию, вследствие чего возникает противоречие. Но в теории типов общее правило принадлежит к более высокому типу, и всё, что в нем утверждается о конкретных правилах, к нему самому неприменимо. Следовательно, из общего правила исключений может не быть.

Аналогичным образом гетерологический парадокс (слово называется гетерологическим, если оно неприменимо к самому себе) есть не что иное, как определение всех гетерологических слов, и поэтому принадлежит к более высокому типу, чем любое гетерологическое слово. Следовательно, вопрос о том, гетерологично ли само прилагательное «гетерологический», попросту неправомерен.

В рамках теории типов находит свое решение и парадокс лжеца. Рассел излагает это решение следующим образом. Высказывание «Я лгу» означает «Существует утверждение, которое я высказываю, и оно ложно», или «Я высказываю утверждение *p*, и *p* ложно». Если *p* принадлежит к *n*-му типу, то утверждение относительно *p* принадлежит к более высокому типу. Следовательно, если <u>утверждение относительно *p*</u> истинно, то само *p* ложно, и если <u>утверждение относительно *p*</u> ложно, то *p* истинно. Никакого противоречия не возникает. Аналогичным образом теория типов разрешает и парадокс Ришара: суть решения сводится к тому, что высказывание более высокого типа содержит некое утверждение о высказывании более низкого типа.

Ясно, что теория типов предполагает тщательную классификацию высказываний по типам. Но если попытаться положить теорию типов в основу строгого обоснования математики, то все построения становятся чрезвычайно сложными. Например, в «Основаниях математики» Рассела и Уайтхеда два предмета a и b считаются равными, если любое высказывание или любая пропозициональная функция, применимые к a (или истинные для a), применимы к b и наоборот. Но различные высказывания принадлежат, вообще говоря, к **различным** типам. Следовательно, понятие равенства становится необычайно сложным. Аналогичные трудности возникают и в связи с понятием числа: так как иррациональные числа определяются через рациональные, а рациональные – через положительные целые числа, то иррациональные числа принадлежат к более высокому типу, чем рациональные, а те в свою очередь – к более высокому типу, чем целые числа. Система вещественных чисел оказывается состоящей из чисел различных типов. Следовательно, вместо того, чтобы сформулировать одну теорему для всех вещественных чисел, мы должны формулировать теоремы для каждого типа в отдельности, поскольку теорема, применимая к одному типу, автоматически на другой тип не переносится.

Теория типов вносит осложнение и в понятие наименьшей верхней границы ограниченного множества вещественных чисел (гл. IX). Наименьшая верхняя граница, по определению, есть минимальная из всех верхних границ. Мы видим, что в определении наименьшей верхней границы фигурирует множество вещественных чисел, и поэтому наименьшая верхняя граница должна принадлежать к более высокому типу, чем вещественные числа, а значит, сама она вещественным числом не является.

Чтобы избежать подобных осложнений, Рассел и Уайтхед ввели весьма тонкую **аксиому сводимости** (или аксиому редукции). Аксиома сводимости для высказываний гласит: любое высказывание более высокого типа эквивалентно одному из высказываний первого типа. Аксиома сводимости для пропозициональных функций утверждает, что любая функция одного переменного или двух переменных эквивалентна некоторой функции типа 1 от того же числа переменных, к какому бы типу ни принадлежали переменные. Аксиома сводимости была необходима Расселу и Уайтхеду и для обоснования используемой в их «Основаниях математики» математической индукции.

Рассмотрев пропозициональные функции, авторы переходят к теории отношений. Отношения представимы с помощью пропозициональных функций двух или большего числа переменных. Так, пропозициональная функция «x любит y» выражает отношение. После теории отношений Рассел и Уайтхед излагают явную теорию классов, или множеств, определяемых с помощью пропозициональных функций. Теперь уже всё готово к введению понятия натурального (целого положительного) числа.

Определение натурального числа представляет значительный интерес. Оно зависит от введенного ранее отношения взаимно-однозначного соответствия между классами. Два класса называются эквивалентными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие. Все эквивалентные классы обладают одним общим свойством – числом, отвечающим этим классам (т.е. числом их элементов). Но возможно, что эквивалентные классы обладают и более чем одним общим свойством. Рассел и Уайтхед обошли эту трудность так же, как Фреге, – определив отвечающее классу число как класс всех классов, эквивалентных данному классу. Например, число 3 – это класс всех классов, содержащих по 3 элемента. Все такие классы обозначаются символом $\{x, y, z\}$, где $x \neq y \neq z$. Поскольку определение числа предполагает понятие взаимно-однозначного соответствия (обратите внимание на выражение «однозначное»!), может показаться, что здесь мы попадаем в порочный круг. Но отношение между элементами является взаимно-однозначным, если из того, что x и x' находятся в рассматриваемом отношении к y, следует, что, x и x' совпадают, а из того, что x находится в этом отношении и к y, и к y', вытекает, что совпадают y и y'. Следовательно, несмотря на употребленное в названии этого понятия выражение, реально взаимно-однозначное соответствие не определяется без апелляции к числу 1.[73]

Имея натуральные числа, можно построить системы вещественных и комплексных чисел, теорию функций и весь математический анализ. Используя координаты и уравнения кривых,

[73] **В.Э.:** «...не определяется без апелляции к числу 1»! Так определяется же БЕЗ апелляции к числу 1! (Видимо, ошибка перевода, пропущенная Ягломом).

можно через арифметику ввести геометрию. Но для этого Расселу и Уайтхеду понадобились две дополнительные аксиомы. Программа состояла в том, чтобы сначала определить (с помощью пропозициональных функций) натуральные числа, а затем последовательно ввести более сложные рациональные и иррациональные числа. Чтобы включить в эту схему трансфинитные числа, Рассел и Уайтхед ввели аксиому существования бесконечных классов (классов, надлежащим образом определенных с точки зрения логики) и аксиому выбора (гл. IX), необходимую для теории типов.

Такова была грандиозная программа логистической школы. Долго рассказывать о том, что значила эта программа для самой логики, – мы ограничимся здесь лишь беглым перечислением основных пунктов программы. Для математики же (и это необходимо подчеркнуть особо) логистическая программа сводилась к тезису о построении (или возможности построения) всей математической науки на фундаменте логики. Математика становилась не более чем естественным продолжением логических законов и предмета логики.

Логистический подход к математике подвергся резкой критике. Сильные возражения вызвала аксиома сводимости, которая многим математикам казалась совершенно произвольной. Некоторые считали ее счастливой случайностью, а не логической необходимостью. Френк Пламптон Рамсей, сочувственно относившийся к логицизму, так охарактеризовал аксиому сводимости: «Такой аксиоме не место в математике, и всё, что не может быть доказано без нее, вообще не должно считаться доказанным». Другие ученые называли аксиому сводимости «жертвоприношением, в котором роль жертвы отведена разуму». Безоговорочно отвергал аксиому сводимости Герман Вейль. Иные критики утверждали, что она снова вводит в обращение непредикативные определения. Наиболее важными были вопросы о том, является ли аксиома сводимости аксиомой логики и, следовательно, подкрепляет ли она тезис о том, что математика выводима из логики.

Пуанкаре заявил в 1909 г., что аксиома сводимости более спорна и менее ясна, чем доказываемый с ее помощью принцип математической индукции. Аксиома сводимости, по его словам, представляет собой замаскированную форму математической индукции. Итак, с одной стороны, математическая индукция – это составная часть математики, а с другой стороны, она оказывается необходимой для обоснования математики. Следовательно, мы не можем доказать непротиворечивость математики.

В первом издании «Оснований математики» (1910) Рассел и Уайтхед обосновывали аксиому сводимости ссылкой на то, что она необходима для доказательства некоторых результатов. Аксиома их явно беспокоила. В защиту ее они приводили следующие доводы:

> Что же касается аксиомы сводимости, то она убедительно подкрепляется интуитивными соображениями, так как и допускаемые ею рассуждения, и результаты, к которым она приводит, во всяком случае выглядят правильными. Но хотя маловероятно, чтобы эта аксиома оказалась ложной, она вполне может оказаться выводимой из некоторых других, более фундаментальных и более очевидных аксиом.

В последующие годы применение аксиомы сводимости вызывало у Рассела всё большую озабоченность. Во «Введении в математическую философию» (1919) Рассел был вынужден признать:

> С чисто логической точки зрения я не вижу оснований считать аксиому сводимости необходимой, т.е. тем, о чем принято говорить, что оно истинно во всех возможных мирах. Следовательно, включение этой аксиомы в систему логики является дефектом, даже если аксиома эмпирически правильна.

Во втором издании «Оснований математики» (1926) Рассел сформулировал аксиому сводимости иначе. Но и в новой формулировке она порождала немало трудностей: запрет на бесконечности высоких порядков, вынужденный отказ от теоремы о наименьшей верхней границе, трудности при использовании математической индукции. Во втором издании «Оснований математики» Рассел так же, как и в первом, выразил надежду вывести аксиому сводимости из более наглядных аксиом и снова назвал ее логическим дефектом. По словам авторов «Оснований математики», «эта аксиома имеет чисто прагматическое обоснование. Она приводит к желаемым и ни к каким другим результатам. В то же время ясно, что она не принадлежит к такого рода аксиомам, на которые можно спокойно положиться». Рассел и Уайтхед понимали, что ссылка на правильность выводов, получаемых с помощью аксиомы сводимости, не является убедительным аргументом. Были предприняты различные попытки свести математику к логике без столь спорной аксиомы, но никому в этом отношении не удалось продвинуться сколько-нибудь далеко, а некоторые попытки подверглись суровой критике, так как они основывались на неверных доказательствах.

Другое направление в критике логистической школы было связано с аксиомой бесконечности. По общему убеждению, структура всей арифметики существенно зависела от этой аксиомы, в то время как не было ни малейших оснований считать ее истинной и, что еще хуже, не было способа, позволившего бы установить, истинна ли она или нет. Оставался открытым и вопрос о том, является ли эта аксиома аксиомой логики.

Справедливости ради заметим, что Рассел и Уайтхед испытывали сомнения относительно того, включать или не включать аксиому бесконечности в число аксиом логики. Их беспокоило, что содержание аксиомы выглядит «фактообразно». Сомнения возникали не только по поводу принадлежности аксиомы к логике, но и относительно ее истинности. Согласно одной из интерпретаций термина «индивидуум», предложенной Расселом и Уайтхедом, под «индивидуумами» понимались мельчайшие частицы, или элементы, составляющие Вселенную. Создавалось впечатление, что, хотя аксиома бесконечности сформулирована на языке логики, она по существу сводится к вопросу о том, конечно или бесконечно число мельчайших частиц во Вселенной, т.е. к вопросу, ответ на который может дать только физика, но никак не математика и не логика. Но если мы хотим рассматривать бесконечные множества или показать, что математические теоремы, при выводе которых была использована аксиома бесконечности, принадлежат к числу теорем логики, то нам, по-видимому, не остается ничего другого, как считать аксиому бесконечности аксиомой логики. Короче говоря, если мы хотим «свести» математику к логике, то логика, очевидно, должна включать в себя аксиому бесконечности.

Рассел и Уайтхед использовали также аксиому выбора (гл. IX), которую они называли мультипликативной аксиомой: если задан класс непересекающихся (взаимно исключающих) классов, ни один из которых не является нулевым (или пустым), то существует класс, содержащий ровно по одному элементу из каждого класса и не содержащий других элементов. Как мы знаем, аксиома выбора породила больше дискуссий и споров, чем любая другая аксиома, за исключением, может быть, аксиомы Евклида о параллельных. Аксиома выбора вызывала сомнения и у Рассела и Уайтхеда, которые так и не смогли убедить самих себя признать ее логической истиной наравне с другими аксиомами логики. Тем не менее, если мы хотим свести к логике те разделы классической математики, для построения которых необходима аксиома выбора, то эту аксиому, вероятно, также необходимо счесть составной частью логики.

Использование этих трех аксиом (сводимости, бесконечности и выбора) поставило под сомнение основной тезис логицизма о возможности вывести всю математику из логики. Где провести границу между логикой и математикой? Сторонники логистического тезиса утверждали, что логика, используемая Расселом и Уайтхедом, была «чистой», или «очищенной». Другие, помятуя о трех спорных аксиомах, ставили под сомнение «чистоту» этой логики. Тем самым они отрицали, что вся математика или даже какая-то важная часть ее может быть сведена к логике. Некоторые математики и логики были склонны расширить термин «логика» так, чтобы он охватывал аксиомы сводимости, бесконечности и выбора.

Рассел, отстаивавший логистический тезис, по-прежнему защищал всё, что было сделано им и Уайтхедом в первом издании «Оснований математики». В работе «Введение в математическую философию» ([79*][74], 1919) он приводил следующие доводы:

> При доказательстве этого тождества [математики и логики] всё упирается в детали; начав с посылок, относящихся, по всеобщему признанию, к логике, и придя с помощью дедукции к результатам, заведомо принадлежащим математике, мы обнаружим, что нигде не возможно провести четкую границу, слева от которой находилась бы логика, а справа – математика. Если кто-нибудь вздумает отвергать тождество логики и математики, то мы можем оспорить его мнение, попросив указать то место в цепи определений и дедуктивных выводов «Оснований математики», где, по его мнению, заканчивается логика и начинается математика, и тогда сразу станет ясно, что любой ответ совершенно произволен.

[74] Russell B. *Introduction to Mathematical Philosophy*. – London: George Allen & Unwin, 1919.

Разногласия по поводу теории Кантора и аксиом выбора и бесконечности достигли в начале XX в. столь большой остроты, что Рассел и Уайтхед не стали включать две последние аксиомы в число аксиом своей системы, хотя и использовали их (во втором издании, 1926) при доказательстве некоторых теорем, каждый раз особо оговаривая, что вывод теорем опирается на «посторонние» аксиомы. Но аксиомы выбора и бесконечности оказались необходимыми для вывода значительной части классической математики. Во втором издании своих «Принципов математики» ([81*][75], 1937) Расселу пришлось пойти на еще большие уступки. По его собственному признанию, «весь вопрос о том, что считать принципами логики, становится в значительной степени произвольным». Аксиомы бесконечности и выбора «можно доказывать или опровергать, лишь исходя из эмпирических данных». Тем не менее Рассел продолжал настаивать на единстве логики и математики.

Но и подобные признания не смогли заставить критику умолкнуть. В своей книге «Философия математики и естественных наук» ([93*][76], 1949) Герман Вейль писал о том, что Рассел и Уайтхед возвели математику на основе

> ...не просто логики, а своего рода рая для логиков, мира, снабженною всем необходимым «инвентарем» весьма сложной структуры... Кто из здравомыслящих людей осмелится утверждать, что верит в этот трансцендентальный мир?.. Эта сложная структура требует от нас не меньшей веры, чем учения отцов церкви или средневековых философов-схоластов.

Критика логицизма имела и другой характер. Хотя в трех томах «Оснований математики» Рассела и Уайтхеда не нашлось места для последовательного построения геометрии, ни у кого не вызывало сомнений, что такое построение вполне осуществимо, если воспользоваться, как об этом уже говорилось, аналитической геометрией. Тем не менее, иные критики утверждали, что авторы, сведя к логике систему аксиом целых чисел, тем самым свели к логике арифметику, алгебру и математический анализ, но не свели к логике «неарифметические» разделы математики, например геометрию, топологию и абстрактную алгебру. Такого мнения придерживался, в частности, логик Карл Гемпель, считавший, что хотя в случае арифметики неопределяемым, или первичным, понятиям оказалось возможным придать обычный смысл с помощью «чисто логических понятий», «аналогичная процедура неприменима к тем математическим дисциплинам, которые обязаны своим появлением на свет не арифметике». Коллега Гемпеля Уиллард Ван Орман Куайн, по мнению которого «вся математика сводится к логике», считал, что для геометрии существует «готовый метод, позволяющий свести ее к логике» и что топология и абстрактная алгебра «укладываются в общую структуру логики». Сам Рассел сомневался, что всю геометрию удастся вывести только из логики.

Философы также подвергли логистическое направление серьезной критике, суть которой сводилась к следующему. Если основной тезис логицизма верен, то вся математика является чисто формальной, логико-дедуктивной наукой, теоремы которой следуют из законов мышления. Казалось необъяснимым, каким образом с помощью дедуктивного вывода одни лишь законы мышления могут привести к описанию неисчерпаемого разнообразия явлений природы, к различным применениям чисел, геометрии пространства, акустике, электромагнетизму и механике. Именно так и следует понимать критическое замечание Вейля: «Из ничего и следует ничто».

Пуанкаре, со взглядами которого мы познакомимся подробнее в дальнейшем, также критически относился к тому, что считал бесплодными манипуляциями логическими символами. В работе «Наука и метод» (1906), опубликованной в то время, когда Рассел и Гильберт уже успели неоднократно изложить свои программы, Пуанкаре утверждал по поводу логицизма:

> Эта наука [математика] не имеет единственной целью вечное созерцание своего собственного пупа; она приближается к природе, и раньше или позже она придет с ней в соприкосновение; в этот

[75] Russell B. *The Principles of Mathematics,* 2nd ed. London: George Allen & Unwin, 1937.

[76] Weyl H. *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*. – Princeton: University Press, 1949. [Немецкий оригинал: Weyl H. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften*. – München: Oldenberg, 1922; русский перевод (частичный): Вейль Г. *О философии математики*. – М.: Гостехиздат, 1934, с. 34–91; 2-е изд. доп. и перераб. München: Leibniz Verlag, 1950; русский перевод отрывков – в кн.: Прикладная математика (под ред. Э. Беккенбах.) – М.: Мир, 1968, с. 309–361.]

момент необходимо будет отбросить чисто словесные определения, которыми нельзя будет довольствоваться. ([1][77], с. 393.)

В той же книге (с. 397) Пуанкаре говорил:

> Как бы там ни было, логистика должна быть переделана, и неизвестно, что в ней может быть спасено. Бесполезно прибавлять, что на карту поставлены только канторизм и логистика. Истинные математические науки, т.е. те, которые чему-нибудь служат, могут продолжать свое развитие только согласно свойственным им принципам, не заботясь о тех бурях, которые бушуют вне их; они будут шаг за шагом делать свои завоевания, которые являются окончательными и от которых им никогда не будет нужды отказываться.

Другое серьезное критическое замечание по поводу логистической программы состояло в том, что в процессе развития математики новые понятия, как выводимые, так и не выводимые непосредственно из опыта, формируются на основе чувственной или образной интуиции. Впрочем, как же иначе может возникать новое знание? Между тем в «Основаниях математики» все понятия сводятся к логическим. Формализация не дает сколько-нибудь реального представления о математике: это лишь шелуха, а не зерно. Высказывание Рассела: «Математика – такой предмет, в котором мы никогда не знаем ни того, о чем говорим, ни насколько верно то, что мы говорим» – вполне может быть адресовано логицизму.

На вопросы о том, каким образом могут входить в математику новые идеи и как математика может описывать реальный мир, если ее содержание целиком выводимо из логики, ответить нелегко, и Рассел и Уайтхед не дали на них никакого ответа. Один из возможных ответов состоял в том, что логицизм не ставит своей задачей объяснить, почему математика применима к реальному миру. На это можно было бы возразить, что математика применима к наиболее фундаментальным физическим принципам. По отношению к реальности их можно рассматривать как логические посылки. Математические методы позволяют извлекать из этих посылок такие заключения, как, например, $pV = \text{const}$ (закон Бойля–Мариотта) или $F = ma$ (третий закон Ньютона). Но эти заключения применимы к реальному миру. Возникает проблема соответствия реального мира «математической вселенной», базирующейся не на эмпирических фактах, а на дедуктивных выводах.[78] К этому вопросу мы вернемся в дальнейшем (гл. XV).

Рассел продолжал размышлять над логистической программой и после выхода в свет второго издания «Оснований математики». В книге «Мое философское развитие» (1959) он признавал, что эта программа заключалась в постепенном отходе от «евклидианства» в сочетании с намерением по возможности сохранить максимум определенности. Критика логистической философии, несомненно, сказалась на позиции, занятой Расселом в конце 20-х годов XX в. Приступая к работе над «Основаниями математики» в самом начале XX в., Рассел считал аксиомы логики истинами. В издании «Принципов математики» 1937 г. он отказался от таких взглядов. Теперь уже Рассел не был убежден, что принципы логики являются априорными истинами. Следовательно, выводимую из логики математику также нельзя считать априори истинной.

Но если аксиомы логики не принадлежат к числу истин, то логицизм оставляет без ответа фундаментальный вопрос о непротиворечивости математики. Еще в большей степени непротиворечивость ставится под угрозу сомнительной аксиомой сводимости. Использование аксиомы сводимости в первом и во втором изданиях «Оснований математики» Рассел оправдывал неубедительной ссылкой на то, что, во-первых, «из нее следует много высказываний, истинность которых почти не вызывает сомнений», и, во-вторых, «если бы эта аксиома была ложной, не существовало бы столь же правдоподобного объяснения, почему истинны выведенные из нее

---

[77] Пуанкаре А. *О науке*. – М.: Наука, 1983.

[78] **Яглом:** По этому поводу см. статьи выдающихся физиков, лауреатов Нобелевской премии Е.П. Вигнера [96*: Wigner E.P. *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics*. Com. Pure and Appl. Math., 1960, 13, 1–14. [Русский перевод: Вигнер Е. *Непостижимая эффективность математики в естественных науках*. – В кн.: Вигнер Е. *Этюды о симметрии*. – М.: Мир, 1971, 182–198; также: УФН, т. 94, вып, 3, 1968, с, 535–546; в кн.: *Проблемы современной математики*. – М.: Знание, 1971, с. 22–33.]], Ч. Янга [60: Янг Ч. *Эйнштейны и физика второй половины XX века*. – Успехи физических наук, 132, вып. 1, 1980, с. 169–175] и В. Гейзенберга [61: Гейзенберг В. *Смысл и значение красоты в точных науках*. – Вопросы философии, 1979, № 12, с. 49–60]; цитируемые в гл. XV высказывания А. Эйнштейна и названные там его статьи, а также [4: Манин Ю.И. *Математика и физика*. – М.: Знание, 1979].

высказывания и почему из нее не следует ни одного высказывания, которое было бы ложным». Принятая в «Основаниях математики» (и во многих других логических системах) материальная импликация может быть истинной, даже если ее первый член ложен. Следовательно, если бы в число аксиом входило ложное высказывание *p* и импликация «если *p*, то *q*» была бы истинной, то и высказывание *q* могло бы быть истинным. Поэтому ссылка на то, что из аксиомы сводимости следуют высказывания, истинность которых не вызывает сомнений, не достигает цели, так как в логической системе «Оснований математики» любое «бесспорно истинное» высказывание вполне может следовать из ложной аксиомы.[79]

Работу Рассела и Уайтхеда критиковали и по многим другим причинам, которые мы не затрагивали. Как обнаружилось в дальнейшем, иерархия типов оказалась разумной и полезной, но, по-видимому, всё же не полностью соответствующей своему назначению. Типы были введены как предохранительная мера против антиномий, и они действительно помогли разрешить антиномии теории множеств и логики. Однако не исключено, что возникнут новые антиномии, против которых иерархия типов окажется бессильной.

Тем не менее некоторые выдающиеся логики и математики, например, Уиллард Ван Орман Куайн и Алонсо Черч, по-прежнему выступают в защиту логицизма, хотя в его современном состоянии относятся к нему критически. Многие авторы трудятся над восполнением тех или иных изъянов логицизма. Некоторые логики и математики, разделяющие не все тезисы логицизма, настаивают на том, что логика и, следовательно, математика аналитичны, т.е. представляют собой обобщенные варианты того, что утверждается в аксиомах. Итак, у логической программы имеются убежденные сторонники, стремящиеся ликвидировать причины возражений и сделать менее громоздкими некоторые построения. Другие ученые склонны видеть в логицизме несбыточную мечту. Находятся и такие, которые, как мы увидим, выступают с резкой критикой, считая логицизм абсолютно ложной концепцией математики. В целом, если учесть спорные аксиомы и длительное, сложное развитие, нельзя не признать, что у критиков были все основания утверждать, что логицизм выводит заранее известные заключения из необоснованных посылок.

Своим фундаментальным трудом Рассел и Уайтхед способствовали прогрессу еще одного направления математической мысли. Математизация логики началась в конце XIX в. (гл. VIII). Рассел и Уайтхед осуществили всю аксиоматизацию в чисто символическом виде, тем самым значительно продвинув развитие математической логики.

По-видимому, последнее слово о логицизме было сказано Расселом в его книге «Портреты по памяти» (1958):

> Я жаждал определенности примерно так же, как иные жаждут обрести религиозную веру. Я полагал, что найти определенность более вероятно в математике, чем где-либо еще. Выяснилось, однако, что математические доказательства, на принятие которых мной мои учителя возлагали такие надежды, изобилуют грубыми логическими ошибками и что определенность, если и кроется в математике, то заведомо в какой-нибудь новой области, обоснованной более надежно, чем традиционные области с их, казалось бы, незыблемыми истинами. В процессе работы у меня из головы не выходила басня о слоне и черепахе: воздвигнув слона, на котором мог бы покоиться математический мир, я обнаружил, что этот слон шатается, – тогда и мне пришлось создать черепаху, которая не давала бы слону упасть. Но и черепаха оказалась ничуть не более надежной, чем слон, – и через каких-нибудь двадцать лет напряженных усилий и поисков я пришел к выводу, что не могу сделать ничего более, дабы придать математическому знанию неоспоримый характер.

В книге «Мое философское развитие» (1959) Рассел признавался: «Восхитительная определенность, которую я всегда надеялся найти в математике, затерялась в путанице понятий и выводов ... Это оказался поистине запутанный лабиринт, выхода из которого не было видно». Трагедия постигла не только Рассела.

Еще в то время, когда логицизм переживал период становления, группа математиков, называвших себя интуиционистами, предложила совершенно иной подход к математике, диаметрально противоположный логицизму. Один из интереснейших парадоксов в истории математики состоял в том, что в то время как логицисты в поисках надежных оснований математики всё более полагались на изощренную логику, их основные соперники отворачивались от логики и даже в каком-то отношении отказались от нее (ср., впрочем, с. 282). Но цель,

[79] **Яглом:** Разумеется, из (ложной!) «аксиомы» 2×2=100 следует (истинная!) теорема «2×2 – четное число» (как, впрочем, и теорема «2×2 – нечетное число», если только следование предложений понимать в соответствии с определением материальной импликации).

которую преследовали логицисты и интуиционисты, была единой. В конце XIX в. математика утратила свои претензии на истинность как выражение законов, присущих структуре реального мира. Логики, главным образом Фреге и Рассел, первоначально считали, что логика является сводом незыблемых истин и поэтому основанная на логике математика также будет собранием истин; однако впоследствии они отошли от исходной позиции к логическим принципам, имевшим лишь прагматическое обоснование. Интуиционисты также пытались обосновать истинность собственно математики, ссылаясь непосредственно на человеческий разум. Выводы из логических принципов интуиционисты считали менее надежными, чем непосредственно интуитивные соображения. Открытие парадоксов не только укрепило недоверие к логическим принципам, но и ускорило процесс формулировки основных представлений интуиционизма.

Интуиционизм в широком смысле слова восходит по крайней мере к Декарту и Паскалю. Так, в «Правилах для руководства ума» Декарта говорится следующее[80]:

> Для того, чтобы в дальнейшем не подвергать себя подобному заблуждению, мы рассмотрим здесь все те действия нашего интеллекта, посредством которых мы можем придти к познанию вещей, не боясь никаких ошибок. Возможны только два таких действия, а именно: интуиция и дедукция.
>
> Под интуицией я разумею не веру в шаткое свидетельство чувств и не обманчивое суждение беспорядочного воображения, но понятие ясного и внимательного ума, настолько простое и отчетливое, что оно не оставляет никакого сомнения в том, что мы мыслим, или, что одно и то же, прочное понятие ясного и внимательного ума, порождаемое лишь естественным светом разума и благодаря своей простоте более достоверное, чем сама дедукция, хотя последняя и не может быть плохо построена человеком, как я уже говорил выше.
>
> Так например, всякий может интуитивно постичь умом, что он существует, что он мыслит, что треугольник ограничивается только тремя линиями, что шар имеет только одну поверхность, и подобные этим истины, гораздо более многочисленные, чем это замечает большинство людей вследствие того, что не считает достойными внимания такие простые вещи.
>
> Может возникнуть сомнение, для чего мы добавляем к интуиции еще и этот другой способ познания, заключающийся в дедукции, посредством которой мы познаем всё, что необходимо выводится из чего-либо достоверно известного. Это нужно было сделать потому, что есть много вещей, которые хотя и не являются самоочевидными, но доступны достоверному познанию, если только они выводятся из верных и понятных принципов путем последовательного и нигде не прерывающегося движения мысли при зоркой интуиции каждого отдельного положения. Подобно этому мы узнаем, что последнее кольцо длинной цепи соединено с первым, хотя мы и не можем охватить одним взглядом все находящиеся между ними кольца, которые обусловливают это соединение, лишь бы мы последовательно проследили их и вспомнили, что каждое из них, от первого до последнего, соединено с соседним. Итак, мы различаем здесь интуицию ума от правильной дедукции в том отношении, что под дедукцией подразумевается именно движение или последовательность, чего нет в интуиции; кроме того, дедукция не нуждается в наличной очевидности, как интуиция, но скорее как бы заимствует свою достоверность у памяти. Отсюда следует, что положения, непосредственно вытекающие из первого принципа, можно сказать, познаются как интуитивным, так и дедуктивным путем, в зависимости от способа их рассмотрения, сами же принципы – только интуитивным, как и, наоборот, отдаленные их следствия – только дедуктивным путем. ([15][81], с. 57–60.)

Паскаль также глубоко верил в интуицию и в своих математических работах опирался в основном на интуицию. Он предвидел важные результаты, высказывал великолепные догадки и находил изящные, неожиданные решения. С годами Паскаль стал отдавать интуиции явное предпочтение как источнику истины. Некоторые из его высказываний на эту тему получили широкую известность: «У сердца – свои причины, о которых не знает разум»; «Логика медленный и мучительный метод, позволяющий тем, кто не знает истины, открывать ее»; «Смири гордыню, бессильный разум».

Многие положения интуиционизма были предвосхищены Иммануилом Кантом. Будучи прежде всего философом, Кант тем не менее в 1755–1770 гг. преподавал математику и физику в Кёнигсбергском университете. Он считал, что свои ощущения мы получаем из предполагаемого

---

[80] **Яглом:** По поводу современных взглядов на роль интуиции и дедукции в понимании мира см., например [32: Фейнберг Е.Л. *Кибернетика, логика, искусство*. – М.: Радио и связь, 1981], а также [62: Асмус В.Ф. *Проблема интуиции в философии и математике*. – М.: Мысль, 1965].

[81] Декарт Р. *Правила для руководства ума*. – М.–Л.: Соцэкгиз, 1936.

внешнего мира, однако эти ощущения (или восприятия) не дают существенного знания. Все восприятия включают в качестве необходимого звена взаимодействие между тем, кто воспринимает, и воспринимаемым объектом. Разум организует восприятия, и эти организации являются интуитивными представлениями о пространстве и времени. Пространство и время не существуют сами по себе, а являются творениями нашего разума. Разум применяет свое понимание пространства и времени к данным опыта, которые лишь пробуждают разум. Знание может начинаться с опыта, но в действительности не опыт является источником знания. Знание берется из разума. Математика дает нам блестящий пример того, как далеко мы можем продвинуться в априорном (истинном) знании независимо от опыта. Математические теоремы Кант относит к разряду так называемых синтетических суждений, т.е. суждений, доставляющих нам новое знание и тем отличающихся от аналитических суждений типа, например, предложения «Все тела протяженны», не содержащих ничего нового, так как в силу самой природы тел протяженность является их неотъемлемым свойством (примером синтетического суждения может служить, скажем, утверждение о том, что отрезок прямой есть кратчайшее расстояние между двумя точками).

Хотя Кант заблуждался, приписывая евклидовой геометрии априорный синтетический характер, аналогичное заблуждение разделяли почти все философы и математики того времени. Эта ошибка дискредитировала философию Канта в глазах философов и математиков последующих поколений. Однако проведенный Кантом анализ времени как одной из форм интуиции и его общий тезис о том, что разум служит источником основных истин, имели непреходящее значение.

Если бы математики были лучше знакомы со взглядами таких мыслителей, как Декарт, Паскаль и Кант, то интуиционистское направление в основаниях математики, считавшееся, по крайней мере в первые годы после его возникновения, весьма радикальным, шокировало бы их гораздо меньше. Но, разумеется, ни Декарт, ни Паскаль, ни Кант не имели в виду интуиционистский подход ко всей математике. Как направление в основаниях математики интуиционизм – порождение нашей эпохи.

Непосредственным предшественником современного интуиционизма был Леопольд Кронекер. Широко известно его высказывание: «Господь бог создал целые числа; всё остальное – дело рук человеческих». Сложную логическую концепцию целого числа Кантора и Дедекинда, базирующуюся на теоретико-множественной основе, Кронекер считал менее надежной, чем непосредственное принятие целых чисел. По мнению Кронекера, целые числа интуитивно понятны и не нуждаются в более строгом обосновании.[82] Все остальные математические понятия следовало строить так, чтобы их смысл был интуитивно понятен. Кронекер выступал за построение системы вещественных чисел на основе целых чисел и методов, позволяющих не только доказывать общие теоремы существования, но и вычислять значения соответствующих чисел. Так, Кронекер считал вполне приемлемыми иррациональные числа, являющиеся корнями многочленов, лишь в том случае, если соответствующие корни могут быть вычислены с любой степенью точности.

Кантор доказал, что существуют трансцендентные иррациональные числа, не являющиеся корнями никаких алгебраических уравнений [с целыми коэффициентами][83], и в 1882 г. Фердинанд Линдеман (1852–1939) доказал, что π – трансцендентное число. По поводу этой работы Кронекер заявил Линдеману: «Что толку от вашей прекрасной работы о числе π? Стоит ли браться за исследование подобных проблем, если подобные иррациональные числа вообще не существуют?» Возражение Кронекера относилось не вообще к иррациональным числам, а к доказательствам, не позволяющим вычислять те числа, о которых идет речь. Предложенное Линдеманом доказательство трансцендентности числа π не было конструктивным. С помощью

---

[82] **Яглом:** Предложенное (почти одновременно и, по-видимому, независимо) Р. Дедекиндом и Дж. Пеано аксиоматическое описание целых (или целых положительных – натуральных) чисел хронологически почти совпало со смертью Кронекера (основополагающая работа Пеано вышла в свет в год смерти Кронекера); поэтому он уже не мог высказать свое мнение по поводу этой новой теории.

[83] **Яглом:** Предшествующее Кантору доказательство существования трансцендентных чисел принадлежит французскому математику Жозефу Лиувиллю (1809–1882), построившему конкретные примеры таких чисел (1851); Кантор же доказал, что в определенном смысле «почти все» вещественные числа являются трансцендентными (причем его доказательство было существенно «неконструктивным», т.е. не позволяло указать ни одного такого числа).

разложения в ряд значение π можно было вычислить с любой степенью точности – но Кронекер считал неприемлемым само использование такого (бесконечного!) ряда.

Бесконечные множества и трансфинитные числа Кронекер полностью отвергал, так как считал возможным иметь дело только с потенциальной бесконечностью. С точки зрения Кронекера, всё, что сделал в этой области Кантор, было не математикой, а мистикой. Классический анализ Кронекер назвал игрой в слова. Он мог бы с успехом добавить, что если у бога есть несколько математик, то ему следовало бы оставить их при себе. Однако Кронекер лишь высказывал подобные взгляды, но не развивал их. Возможно, он и сам относился к своим столь радикальным воззрениям не слишком серьезно.

Борель, Бэр и Лебег, с чьими возражениями против аксиомы выбора мы уже познакомились, были «полуинтуиционистами». Основание всей математики они усматривали в системе вещественных чисел. Подробное изложение их взглядов представляет лишь исторический интерес, так как и эти математики, в полемике которых речь шла о специальных вопросах, последовательной философии не создали. Пуанкаре, как и Кронекер, считал, что не следует давать определения целым числам или выводить их свойства на аксиоматической основе. Наша интуиция предшествует такому выводу. Пуанкаре также считал, что математическая индукция является общим принципом, допускающим получение новых результатов. При всей своей кажущейся интуитивности метод математической индукции к логике, по его мнению, не сводится.

Сущность метода математической индукции, каким его видел Пуанкаре, заслуживает изучения, поскольку она и поныне вызывает споры. Следуя методу математической индукции, тот, кто хочет доказать, например, что при всех целых положительных n имеет место равенство

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

должен сначала установить, что оно выполняется при $n = 1$, а затем доказать, что если оно выполняется при каком-то целом $n = k$, то выполняется и при следующем значении $n = k+1$. Следовательно, считал Пуанкаре, метод математической индукции апеллирует к бесконечному множеству аргументов: мы утверждаем, что так как равенство (1) выполняется при $n = 1$, то оно выполняется и при $n = 2$, а так как оно выполняется при $n = 2$, то оно выполняется и при $n = 3$ и т.д. при всех положительных целых n. Но ни один логический принцип не охватывает бесконечно много аргументов. Следовательно, метод математической индукции не следует из логических принципов. Тем самым, по мнению Пуанкаре, непротиворечивость математики не может быть доказана сведением математики к логике, как предлагали логицисты.

По поводу бесконечных множеств Пуанкаре утверждал: «Актуальной бесконечности не существует. То, что мы называем бесконечностью, представляет собой неограниченную возможность создания новых объектов независимо от того, сколько объектов уже существует».

Пуанкаре резко отрицательно относился к громоздким обозначениям логицистов, и в его «Науке и методе» по поводу логицизма отчетливо звучат саркастические ноты. Так, говоря о подходе к понятию целого числа, избранном Бурали-Форти в работе 1897 г., где число 1 определяется с помощью сложного лабиринта буквенных символов, Пуанкаре замечает:

> Это определение в высшей степени подходит для того, чтобы дать представление о числе 1 тем лицам, которые никогда о нем ничего не слышали!.. Я слишком мало понимаю приверженцев Пеано, чтобы рискнуть его [определение числа 1] критиковать; но я опасаюсь, что это определение заключает *petitio principii* [логическую ошибку «предвосхищение основания»], так как я вижу цифру 1 в левой части и изображенное буквами слово «один» (Un) – в правой части равенства. ([1][84], с. 377.)

Затем Пуанкаре обращается к определению нуля, предложенному одним из первых сторонников логицизма Луи Кутюра (1868–1914). Нуль, по Кутюра, – это «число элементов нулевого класса. А что такое нулевой класс? Это класс, который не содержит никакого элемента» ([1], с. 377). Далее Кутюра «усовершенствует» свое определение, переводя его на язык символических обозначений. Пуанкаре дает обратный перевод: «Нуль есть число предметов, удовлетворяющих такому условию, которое никогда не выполняется. Но так как «никогда» означает «ни в одном случае», то я не вижу значительного успеха в этой замене» ([1], с. 377).

---

[84] Пуанкаре А. *О науке*. – М.: Наука, 1983.

Пуанкаре критикует далее предложенное Кутюра определенна числа 1: «Один, утверждает Кутюра, в сущности есть число элементов класса, два любых элемента коего тождественны... Боюсь, что если спросить у Кутюра, что такое «два», то он должен будет в ответ воспользоваться словом «один»» ([1], с. 377–378)[85].

Предшественники интуиционизма Кронекер, Борель, Лебег, Пуанкаре и Бэр – созвездие блистательных имен! – высказывали критические замечания по поводу стандартных математических рассуждений и логического подхода, но их собственный вклад в развитие интуиционизма был фрагментарным и случайным. Их идеи вошли в окончательную версию, разработанную голландским математиком, основоположником философии интуиционизма Лейт-ценом Эгбертом Яном Брауэром (1881–1966). Изложение философии интуиционизма Брауэр начал в своей докторской диссертации «Об основаниях математики» (1907). Обобщенный вариант своих взглядов Брауэр изложил в серии статей, опубликованных, начиная с 1918 г., в различных журналах.

Интуиционистская позиция Брауэра в математике проистекает из его общефилософских взглядов. Математика, считает Брауэр, – это человеческая деятельность, которая начинается и протекает в разуме человека. Вне человеческого разума математика не существует. Следовательно, заключает Брауэр, математика не зависит от реального мира. Разум непосредственно постигает основные, ясные и понятные, интуитивные представления. Они являются не чувственными или эмпирическими, а непосредственно данными, достоверными представлениями о некоторых математических понятиях. К таким понятиям относятся целые числа. Фундаментальное интуитивное представление – постижение различных событий в хронологической последовательности. «Математика возникает тогда, когда сущность двойки [числа «два»], возникающая вследствие хода времени, абстрагируется от всего частного. Остающаяся пустая форма общего содержания всех двоек становится исходным интуитивным представлением математики и, повторяемая неограниченно, создает новые математические сущности». Под неограниченным повторением Брауэр понимает образование последовательных натуральных чисел. Идею о том, что понятие целого числа является производным от интуитивного представления о времени, высказывали также И. Кант, Уильям Р. Гамильтон (в статье «Алгебра как наука о времени») и философ Артур Шопенгауэр.

Математическое мышление, по Брауэру, представляет собой процесс мысленного построения, создающего свой собственный мир, не зависящий от опыта и ограниченный лишь тем, что в основе его должна лежать фундаментальная математическая интуиция. Это фундаментальное интуитивное понятие следует представлять себе не как нечто сходное по природе с неопределяемыми понятиями, встречающимися в аксиоматических теориях. Наоборот, через него должны постигаться разумом все неопределяемые идеи, используемые в различных математических системах, если они действительно призваны служить математическому мышлению. Кроме того, математика по своей природе синтетична. Она занимается составлением истин, а не выводит их из логики.

Брауэр был убежден в том, что «в этом конструктивном процессе, ограниченном непременной обязанностью отмечать по мере возникновения новых идей и повышения культуры мышления, какие тезисы приемлемы для интуиции, самоочевидны для разума, а какие неприемлемы, – единственное возможное основание, которое стремится обрести математика». Интуиция (а не опыт или логика) определяет, согласно Брауэру, правильность и приемлемость идей. Следует помнить, подчеркивал он, что это отнюдь не отрицает той исторической роли, которую сыграл опыт.

Помимо натуральных чисел Брауэр считал интуитивно ясными сложение, умножение и математическую индукцию. Кроме того, получив натуральные числа 1, 2, 3, ..., разум, используя возможность неограниченного повторения «пустой формы» – шаги от n к $n+1$, – создает бесконечные множества. Однако такие множества лишь потенциально бесконечны в том смысле, что к любому заданному конечному множеству чисел всегда можно прибавить еще большее число. Брауэр отвергал актуально бесконечные множества Кантора, все элементы которых были представлены «в готовом виде», и тем самым отрицал теорию трансфинитных чисел, аксиому выбора Цермело и те разделы анализа, которые используют актуально бесконечные множества. В докладе, прочитанном в 1912 г., Брауэр признал ординальные числа вплоть до ω и счетные

---

[85] **Яглом:** По поводу полемики между Пуанкаре и Кутюра см. [63: Новые идеи в математике. Сб. 10. – Пгд.: Образование, 1915].

множества. Он также допускал существование иррациональных чисел, определяемых последовательностями рациональных чисел без какого бы то ни было закона образования последовательности – «последовательностями свободного выбора». Сколь ни расплывчато это определение, оно всё же делало возможным появление несчетного множества вещественных чисел. В то же время геометрия включает понятие пространства и поэтому, в отличие от понятия числа, не полностью контролируется нашим разумом. Синтетическая геометрия относится к физическим наукам.

В связи с интуиционистским понятием бесконечного множества интуиционист Вейль[86] писал в статье 1946 г.:

> Последовательность чисел, которые, возрастая, превосходят любой достигнутый ими предел... есть многообразие возможностей, открывающихся перед бесконечностью; она навсегда остается в стадии сотворения, но не переходит в замкнутый мир вещей, существующих в себе. Источник наших трудностей, в том числе и антиномий [парадоксов], более фундаментален по своей природе, чем указанный принципом порочного круга Рассела, и состоит в том, что мы одно слепо превратили в другое. Брауэр открыл нам глаза и показал, как далеко классическая математика, питаемая верой в абсолют, превосходящий все человеческие возможности реализации, выходит за рамки утверждений, которые могут претендовать на реальный смысл и истинность, основанную на опыте.

Брауэр подверг критическому анализу отношение математики к языку. Математика – полностью автономный, находящий основание в самом себе вид человеческой деятельности. Она не зависит от языка. Слова или словесные связки используются в математике только для передачи истин. Математические идеи уходят своими корнями в человеческий разум глубже, чем в язык. Мир интуитивных математических представлений противостоит миру восприятий. К последнему, а не к математике, принадлежит язык, служащий для повседневного общения. Язык с помощью букв и звуков пробуждает в человеческом разуме копии идей. Различие между идеями и их копиями такое же, как между восхождением на гору и его словесным описанием. Но математические идеи не зависят от словесного одеяния, в которое их облекает язык, и в действительности гораздо богаче. Мысли никогда невозможно выразить полностью даже на математическом языке, в том числе и на языке символов. Кроме того, язык вносит отклонения от предмета собственно математики.

Еще более решительную позицию, резко контрастирующую с логицизмом, интуиционизм занимает в отношении логики. Логика принадлежит языку. Она дает систему правил, позволяющих осуществлять дедуктивный вывод новых словесных связок, предназначаемых, по предположению, для того, чтобы передавать истины. Однако эти истины не относятся к числу постигаемых непосредственно и даже постигаемых вообще. Логика не является надежным инструментом для открытия истин и не может открыть истины, не получаемые каким-то другим путем. Логические принципы – это закономерности, наблюдаемые апостериорно в языке, их можно назвать удобным инструментом для манипулирования языком или считать, что они образуют теорию представлений языка. Логика – это наделенное внутренней структурой словесное построение, и не более того. Самые значительные успехи в математике достигнуты не за счет усовершенствования логической формы, а в результате изменений основной теории. Логика строится на математике, а не математика на логике. Логика обладает гораздо меньшей определенностью, чем наши интуитивные представления, и поэтому математика не нуждается в поддержке со стороны логики. Если посмотреть исторически, то принципы логики сначала были абстрагированы из опыта, накопленного в обращении с конечными множествами, после чего их объявили обладающими априорной справедливостью и в дополнение ко всему распространили на бесконечные множества.

Не признавая никаких априори обязательных логических принципов, Брауэр тем самым отвергал математическую задачу вывода заключений из аксиом. Следовательно, наряду с логицизмом Брауэр отвергал и аксиоматизацию математики, предпринятую в конце XIX в. Математика отнюдь не обязана почтительно относиться к правилам логики. Знание математики не требует знания формальных доказательств, и поэтому парадоксы несущественны, даже если бы мы приняли те математические понятия и построения, которые приводят к парадоксам. Парадоксы являются дефектом логики, а не собственно математики. Следовательно, непротиво-

---

[86] **Яглом:** Интуиционистскую платформу Вейля достаточно выразительно характеризует сборник его более ранних статей [64: Вейль Г. О философии математики. – М.–Л.: Гостехиздат, 1934].

речивость – это своего рода привидение. Она лишена плоти. Непротиворечивость возникает как следствие правильных размышлений, а о правильности размышлений мы судим интуитивно.

Но в логике существуют некоторые ясные, интуитивно приемлемые логические принципы или методы, которые можно использовать для вывода новых теорем из старых. Эти принципы входят составными частями в фундаментальную математическую интуицию. Не все из обычных логических принципов приемлемы для фундаментальной интуиции, и следует критически относиться к тому, что считалось приемлемым со времен Аристотеля. Поскольку математики излишне свободно применяли ограниченные законы Аристотеля, те породили антиномии. Что же допустимого или надежного, спрашивали интуиционисты, в математических построениях, если математики временно предали забвению интуицию и работают лишь со словесной структурой?

Итак, интуиционисты принялись анализировать логические принципы, намереваясь установить, какие из них можно принять, чтобы обычная логика соответствовала и надлежащим образом выражала правильные интуитивные представления. В качестве примера логического принципа, применявшегося излишне свободно, Брауэр привел закон исключенного третьего. Этот принцип, утверждающий, что каждое осмысленное высказывание либо истинно, либо ложно, исторически возник в рассуждениях, проводимых применительно к конечным множествам, и был абстрагирован из них. Затем закон исключенного третьего был принят как независимый и априорный принцип и необоснованно распространен на бесконечные множества. Но если для конечного множества мы можем решить, все ли его элементы обладают некоторым свойством, проверяя один за другим все элементы множества, то для бесконечного множества такая проверка становится невозможной. Может случиться так, что мы заведомо будем знать, что некий элемент бесконечного множества не обладает интересующим нас свойством, или по определению нам будет известно (или мы сумеем это доказать), что каждый элемент множества обладает требуемым свойством. Однако установить с помощью закона исключенного третьего, что каждый элемент множества обладает нужным свойством, нам не удастся никогда, ибо это потребовало бы бесконечного числа проверок.

Так, если доказано, что не все элементы бесконечного множества целых чисел четны, то заключение о существовании (а что означает сам термин «существование») среди них по крайней мере одного нечетного целого числа Брауэр отверг как основанное на применении к бесконечным множествам закона исключенного третьего. Но рассуждения такого типа широко используются в математике для доказательства существования различных сущностей, например для доказательства того, что каждое алгебраическое уравнение имеет корень (гл. IX). Следовательно, многие математические доказательства неприемлемы для интуиционистов. По их утверждениям, такие доказательства слишком неопределенны в отношении тех математических объектов, существование которых они должны доказывать. Закон исключенного третьего может быть использован лишь в тех случаях, когда множество содержит конечное число элементов. Например, если бы мы, рассматривая конечный набор целых чисел, доказали, что они не все четны, то отсюда действительно следовало бы, что по крайней мере одно из чисел нечетно.

Вейль, говоря об интуиционистском взгляде на логику, утверждал:

> Согласно его [Брауэра] взглядам и свидетельствам истории, классическая логика была абстрагирована из математики конечных множеств и их подмножеств... Забыв о столь ограниченном происхождении, кто-то впоследствии ошибочно принял логику за нечто, стоящее над математикой и предшествующее всей математике, и, наконец, без всякого на то основания применил логику к математике бесконечных множеств. В этом грехопадение и первородный грех всей теории множеств, за что ее и покарали антиномии. Удивительно не то, что такие противоречия возникли, а то, что они возникли на столь позднем этапе игры.

Несколько позднее Вейль добавил: «Принцип исключенного третьего может быть верным для господа бога, как бы обозревающего единым взглядом бесконечную последовательность натуральных чисел, но не для человеческой логики».

В работе 1923 г. Брауэр привел примеры теорем, которые нельзя считать доказанными, если отрицать применение закона исключенного третьего к бесконечным множествам.[87] В

---

[87] Нам нет необходимости вдаваться в технические детали этих теорем. Мы упоминаем их лишь для того, чтобы привести конкретные примеры. [Отметим также, что отказ интуиционистов от закона исключенного третьего не означал еще полного отказа от какого бы то ни было логического аппарата –

частности, не доказана ни теорема Больцано–Вейерштрасса, утверждающая, что каждое ограниченное бесконечное множество имеет предельную точку, ни теорема о существовании максимума непрерывной функции на замкнутом отрезке. Отвергнутой оказалась и лемма Гейне–Бореля, согласно которой из любого множества отрезков, покрывающих отрезок (взятый вместе с его концами) можно выделить **конечную** подсистему отрезков, также покрывающих этот отрезок. Разумеется, следствия из всех этих теорем интуиционисты также не считают приемлемыми.

Однако интуиционисты не только отказались от неограниченного использования закона исключенного третьего для доказательства существования математических объектов, но и выдвинули еще одно требование. Они сочли неприемлемым задавать множество свойством, присущим всем его элементам (например, множество, задаваемое признаком «красный», присущим всем элементам этого множества). По мнению интуиционистов, математическому рассмотрению подлежат только конструктивные понятия и объекты, только о них имеет смысл утверждать, что они существуют. Иначе говоря, необходимо указывать метод, позволяющий построить объект или объекты за конечное число шагов (или вычислить с любой требуемой степенью точности)[88]. Так, число π, с точки зрения интуиционистов, вполне приемлемо, так как возможно выписать любое число верных знаков его десятичной записи. Если бы нам удалось доказать, что при некотором $n > 2$ существуют целые числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению $x^n + y^n = z^n$ (т.е. доказать великую теорему Ферма), но мы не могли бы при этом указать конкретные значения чисел n, x, y и z, то интуиционист не принял бы такого доказательства.[89] С другой стороны, определение простого числа конструктивно, так как можно указать метод, позволяющий за конечное число шагов установить, является ли то или иное число простым.

Рассмотрим еще один пример. Числами-близнецами называют простые числа вида l–2 и l, например 5 и 7, 11 и 13. До сих пор неизвестно, конечно или бесконечно количество пар чисел-близнецов. Пусть теперь l – **наибольшее** простое число, такое, что l–2 также простое число, если этому нашему определению отвечает какое-то значение l или же l=1, если l, описываемое первым условием, не существует. Классицист сочтет число l вполне определенным независимо от того, известно или не известно, что последняя пара чисел-близнецов существует, так как по закону исключенного третьего такая пара чисел либо имеется, либо нет, – и, значит, l определено либо первым, либо вторым (l = 1) способом. То, что реально мы не в состоянии вычислить l, для неинтуиционистов несущественно. Интуиционист же будет считать приведенное выше «определение» числа l лишенным смысла до тех пор, пока число l нельзя будет вычислить, т.е. пока не будет решена проблема конечности или бесконечности числа пар чисел-близнецов. Требование конструктивности относится, в частности, и к определению бесконечных множеств. Бесконечные множества, построенные с помощью аксиомы выбора, неприемлемы с точки зрения интуиционистов. Как показывают приведенные выше примеры, некоторые из доказательств существования неконструктивны. Следовательно, их необходимо отвергнуть не только потому, что в них может использоваться закон исключенного третьего, но и по другой причине.[90]

По выражению Германа Вейля, неконструктивные доказательства существования извещают мир о том, что сокровище существует, не указывая при этом его местонахождение, т.е. не позволяя это сокровище использовать. Такие доказательства не могут заменить построение – подмена конструктивного доказательства неконструктивным влечет утрату смысла и значения самого понятия «доказательство». Вейль указал, что приверженцы философии интуиционизма

речь шла лишь о пересмотре фундаментальных законов логики, из числа которых отбрасывался закон исключенного третьего (ср. ниже с. 282). – *Прим. ред.*]

[88] Несколько иначе подходил к понятию «существования» математического объекта Пуанкаре. Для него, как для формалистов (гл. XI), понятие было приемлемым, если оно не приводило к противоречиям.

[89] **Яглом:** В настоящей, не рассчитанной на математиков, книге автор иногда позволяет себе пренебречь точностью ради большей выразительности. В частности, приведенный в книге пример «истинные интуиционисты», пожалуй, и не приняли бы [менее яркий, но более корректный пример: *задача об отыскании максимума функции переменных*]. Дело в том, что множество всевозможных четверок (x, y, z, n) целых (или натуральных) *чисел* счетно, т.е. его можно упорядочить наподобие ряда натуральных чисел (где $n > 2$). Поэтому доказательство существования решения уравнения Ферма одновременно устанавливает, что решение может быть найдено в процессе конечного (хоть и неопределенно длинного – это неважно!) перебора четверок (x, y, z, n) и проверки выполнимости равенства $x^n + y^n = z^n$ для каждой из них, а такой конечный перебор, разумеется, является вполне эффективной процедурой. **В.Э.:** Это-то разумеется, но Яглом, по-моему, не понял мысли Клайна: ЕСЛИ БЫ это доказательство не давало эффективной процедуры, ТО интуиционисты не признали бы его...

[90] **В.Э.:** Здесь Яглом повторяет ссылку на свое предыдущее примечание.

вынуждены отказаться от наиболее важных теорем существования классического анализа. Канторовскую иерархию трансфинитных чисел Вейль считал очень запутанной. Классический анализ, писал Вейль в книге «Континуум» (1918), – это дом, построенный на песке. Уверенным можно быть только в том, что доказано интуиционистскими методами.

Отрицание закона исключенного третьего приводит к возможности появления новых типов неразрешимых высказываний. В бесконечных множествах, как утверждают интуиционисты, возможна третья ситуация: могут существовать высказывания, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Интуиционисты приводили пример такого высказывания. Пусть, по определению, число k характеризуется условием, согласно которому k-е положение в десятичном разложении числа π занимает первый нуль, такой, что за ним по порядку следуют цифры от 1 до 9. По логике Аристотеля, k либо существует, либо не существует, и математики, следуя Аристотелю, исходили в своих рассуждениях лишь из этих двух возможностей. Брауэр и интуиционисты отвергли все рассуждения подобного типа на том основании, что неизвестно, удастся ли нам вообще когда-либо доказать, существует ли число k или не существует. Иначе говоря, по мнению интуиционистов, существуют вполне осмысленные и важные математические проблемы, которые могут оказаться неразрешимыми, какое бы обоснование мы ни подводили под математику[91]; эти вопросы могут казаться нам разрешимыми только потому, что они касаются понятий и проблем, сходных с теми, которые нам уже приходилось решать в прошлом.

С точки зрения интуиционистов неприемлемы классическое и логическое (аксиоматическое) построения системы вещественных чисел, математический анализ, современная теория функций вещественного переменного, интеграл Лебега и многие другие понятия и теории. Брауэр и его сторонники не ограничивались критикой и пытались построить математику на конструктивной основе. Им удалось спасти некоторые разделы перечисленных выше теорий, но конструктивные варианты отличались такой сложностью, что даже разделявший философию интуиционизма Вейль сетовал по поводу невыносимой громоздкости конструктивных доказательств. Среди прочего интуиционистам удалось перестроить на конструктивной основе элементарные разделы алгебры и геометрии.

Тем не менее перестройка происходила чрезвычайно медленно. И в 1927 г. в статье «Обоснования математики» ([50][92], с. 365–388; ср. также [50], с. 389–399) Гильберт с полным правом заявил; «Какое значение имеют жалкие остатки, немногочисленные, неполные, не связанные друг с другом единичные результаты, которые были выработаны интуиционистами по сравнению с могущественным размахом современной математики!» ([50], с. 383). Разумеется, в 1927 г. интуиционистам, по их же собственным меркам, не удалось продвинуться сколько-нибудь далеко в осуществлении своей программы перестройки классической математики. К сожалению, интуиционисты, как и логицисты, не смогли прийти к единому мнению относительно того, на какой основе производить эту перестройку. Одни считали необходимым исключить все общие теоретико-множественные понятия и ограничиться лишь теми понятиями, которые допускают эффективное определение или построение. Менее экстремистскую позицию занимали конструктивисты, не ставившие под сомнение классическую логику, а стремившиеся как можно полнее использовать ее.[93] Некоторые выделяли определенный класс математических объектов, а затем вводили конструктивные методы. Немало было и тех, кто допускал по крайней мере тот или иной класс вещественных чисел (не охватывавший весь континуум вещественных чисел). Другие допускали лишь целые числа, а из остальных чисел и функций признавали лишь вычислимые. При этом различные группы понимали вычислимость по-разному. Например, число считалось вычислимым, если к нему можно было приближаться со всё возрастающей точностью (эффективно определяя точность приближения!), используя допустимые числа из некоторого

---

[91] **Яглом:** Ср. с обсуждением в гл. XII современного положения с канторовской проблемой континуума.

[92] Гильберт Д. *Основания геометрии*. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

[93] **Яглом:** Дальнейшее развитие идей интуиционизма привело к созданию так называемого *конструкционизма* (или даже нескольких различных конструктивистских школ), признававшего только те математические объекты, которые допускают прямое построение; в частности, большое развитие получала ленинградская (а позднее московская) конструктивистская группа, возглавляемая А.А. Марковым-мл. (1903–1980); по этому поводу см. [65: Марков А.А. *О логике конструктивной математики*. – М.: Знание, 1974] и [66: Тростников В.Н. *Конструктивные процессы в математике*. – М.: Наука, 1975], а также примечания А.А. Маркова к русскому переводу книги [67: Гейтинг А. *Интуиционизм* (введение). – М.: Мир, 1965].

множества, по аналогии с тем, как к обычным иррациональным числам можно всё более точно приближаться с помощью конечных десятичных дробей.

К сожалению, понятие «конструктивность» отнюдь не является ни четким, ни однозначным. Рассмотрим число N, определенное следующим образом:

$$N = 1 + \frac{(-1)^p}{10^p}.$$

На время положим $p = 3$. Тогда $N = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$. С другой стороны, если $p = 2$, то $N = 1{,}01$. Пусть теперь p – первый знак в десятичном разложении числа π, следующий после группы цифр 123456789, идущих друг за другом именно в этом порядке; если же такое p вообще не существует, то положим, что N, по определению, равно 1. Если число p существует и четно, то $N = 1{,}000...$ (на p-м месте после запятой стоит 1). Если число p нечетно, то $N = 0{,}999...$ (p девяток после запятой). Однако мы не знаем, существует ли определенное выше число p. Если оно не существует, то $N = 1$. Если же p существует, но не встречается, например, среди первой тысячи знаков десятичного разложения числа π, то мы не можем даже начать выписывать N. Тем не менее N определено, и его даже можно записать с **любой** степенью точности. Но разве определение N конструктивно?

Разумеется, доказательства существования, использующие аксиому выбора или гипотезу континуума, не конструктивны; они неприемлемы не только для интуиционистов, но и для многих математиков, не разделяющих идей интуиционистов.

Хотя разные группы интуиционистов и конструктивистов в чем-то расходились между собой, им все же удалось перестроить значительную часть классической математики. Некоторые из перестроенных на конструктивной основе теорем оказались более узкими, чем их неконструктивные прототипы. Когда интуиционистам указывали на это, они отвечали, что классический анализ при всей своей несомненной полезности по математической истинности уступает конструктивному анализу. Резюмируя, можно сказать, что конструктивистам удалось добиться лишь весьма ограниченных успехов и что перспективы распространить конструктивистский подход на всю современную математику нельзя считать обнадеживающими. Имея в виду медленный прогресс конструктивистского направления, математики из школы Бурбаки, о которой у нас пойдет речь в дальнейшем, заметили: «Интуиционистская школа, о которой математики вспоминают как о своего рода историческом курьезе, во всяком случае, оказала услугу математике тем, что заставила своих противников, т.е. подавляющее большинство математиков, яснее осознать причины (одни – логического порядка, другие – психологического) их веры в математику» ([68][94], с. 53)[95]. Критики интуиционизма вполне могли бы процитировать четверостишие Сэмуэля Хоффенштейна:

Мало-помалу всё станет гладко,
Коль все ошибки изымем из факта,
Иллюзий плевелы – из истины золота,
Но разум погибнет от лютого голода.

Чтобы гарантировать надежность оснований математики, интуиционисты готовы даже пожертвовать какими-то разделами классической математики и не считают слишком высокой ценой отказ от «рая» канторовской теории трансфинитных чисел.

Хотя противники интуиционизма иногда излишне бесцеремонно и догматически требовали отказа от интуиционистской философии, критические замечания в адрес интуиционизма высказывали и сочувствующие ему люди – и к этим замечаниям нельзя не отнестись серьезно. В частности, одно из критических замечаний состояло в том, что теоремы, которые интуиционисты столь лихорадочно стремились перестроить в соответствии со своими принципами, не были подсказаны интуицией и вряд ли подкреплялись ею. Открытию этих теорем в равной мере способствовали все известные математические методы, всевозможные рассуждения, догадки, обобщения частных случаев и внезапные, не поддающиеся рациональному объяснению озарения. Следовательно, на практике интуиционисты не менее других зависят от обычных методов, принятых в математике, и даже от классической логики, хотя и пытаются реконструировать

[94] Бурбаки Н. *Очерки по истории математики*. – М.: ИЛ, 1963.

[95] **Яглом:** Критику интуиционизма главой советской конструктивистской школы математиков А.А. Марковым см. на с. 5 книги [67: Гейтинг А. *Интуиционизм* (введение). – М.: Мир, 1965].

доказательства в соответствии со своими принципами. В ответ на подобное замечание интуиционисты могли бы возразить, что когда новые результаты устанавливаются традиционными методами, сами результаты вполне могут оказаться интуитивно приемлемыми. Не отрицая важности других утверждений интуиционизма, нельзя не отметить, что многие теоремы, даже приемлемые для интуиционистов, содержат столь тонкие и далекие от интуиции утверждения, что трудно представить, как может человеческий разум непосредственно воспринимать их истинность.

Тезис о важной роли обычных приемов математического творчества, а также идеализации и абстракции выдвинули Феликс Клейн и Мориц Паш. Разве интуиция могла бы открыть непрерывную (нигде не дифференцируемую) функцию[96] или кривую, покрывающую квадрат (кривую Пеано)? Такого рода «патологические» математические объекты, даже если их существование подсказано интуицией, подлежат «очищению», которое производится путем идеализации и абстракции. По выражению Клейна, примитивная интуиция не точна, а утонченная интуиция вообще не является интуицией, а возникает в результате логического вывода из аксиом. В ответ на требование полагаться на надежность логического вывода из аксиом Брауэр возразил, что непротиворечивость системы аксиом доказывается с помощью интерпретаций или моделей (гл. VIII), относительно которых должно быть известно, что они непротиворечивы. Всегда ли мы, справедливо заметил Брауэр, располагаем такими моделями, и не полагаемся ли мы на интуицию, объявляя их непротиворечивыми?

Вейль также оспаривал утверждение о том, что традиционные способы построения новых математических объектов и доказательства якобы обладают большей силой по сравнению с конструктивными. В книге «Разум и природа» (1934) он писал: «Приятно утешать себя надеждой, что сознанию откроются истины более глубокие по своей природе, чем те, которые доступны непосредственно интуиции».

Некоторые из противников интуиционизма, вполне признавая, что математика – это творение человека, тем не менее считали, что правильность или неправильность может быть установлена объективно, тогда как интуиционисты ставили решение этих вопросов в зависимость от человеческого разума, склонного заблуждаться. В этом, как писали Гильберт и Пауль Бернайс (1888–1978) в первом издании своего труда [75][97] по основаниям математики, мы усматриваем легко уязвимое место интуиционистский философии. На какие понятия и рассуждения мы можем положиться, если правильность понимается как очевидность для человеческого разума? Где же истина, объективно существующая для всех людей?

Другое критическое замечание в адрес интуиционизма состояло в том, что он совсем не касается вопросов о приложимости математики к исследованию природы. Интуиционизм не связывает математику с восприятием. Брауэр признавал, что интуиционистская математика бесполезна для практических приложений. Более того, Брауэр отрицал господство человека над природой. Несмотря на всевозможные критические замечания в адрес интуиционизма, Вейль заявил в 1951 г.: «Думаю, что всякому, кто хотел бы по-прежнему верить в истинность математических утверждений, в истинность, основанную на опыте, придется принять критику, которой подверг основания математики Брауэр».

Доктрины интуиционизма затронули и еще один вопрос, тесно связанный с их основными установками. Как мы уже знаем, интуиционисты утверждали, что здравые и приемлемые идеи могут восприниматься и воспринимаются человеческим разумом. Эти идеи не рождаются в словесной форме. Язык не более чем несовершенное устройство для передачи идей. Вопрос, породивший долгие споры и обсуждения, состоял в следующем: могут ли мысли существовать в бессловесной форме? С одной стороны, в Евангелии от Иоанна говорится: «В начале было Слово». Хотя св. Иоанн, разумеется, не имел в виду математику, процитированное высказывание согласуется с позицией древнегреческих философов и взглядами некоторых современных психологов. С другой стороны, епископ Беркли считал, что слова – это помеха для мышления.

---

[96] **Яглом:** Не останавливаясь подробно, упомянем лишь о методологических установках яркой и пользующейся известностью книги Б. Мандельброта [69: Mandelbrot B. *The Fractal Geometry of Nature*. – San Francisco: Freeman, 1982], которые кратко (и не совсем точно) можно охарактеризовать как утверждение о том, что в реальном мире мы чаще всего встречаемся именно с нигде не дифференцируемыми («изломанными») функциями, а «гладкие» функции представляют собой не более чем идеализированное описание негладких.

[97] Гильберт Д., Бернайс П. *Основания математики*. Т.I. Логические исчисления и формализация арифметики; т. II. Теория доказательств. – М.: Наука, 1979, 1982.

Эйлер затронул эту проблему в «Письмах к немецкой принцессе» (1768–1772; адресатом писем была принцесса Ангальт-Дессау, племянница Фридриха Великого):

> Какой бы склонностью ни обладал человек к тренировке своей способности к абстракции и к выработке общих идей, он не сможет преуспеть в этом без помощи языка, устного или письменного. И тот, и другой содержат множество различнейших слов, представляющих собой не что иное, как знаки, соответствующие нашим идеям. Значение словам придается обычаем или молчаливым соглашением нескольких людей, живущих вместе.
>
> Следовательно, единственное назначение языка состоит в том, чтобы люди могли сообщить друг другу о своих чувствах. Одинокий человек мог бы вполне обойтись и без языка. Стоит немного подумать, как станет ясно, что язык нужен людям, чтобы они могли следить за своими мыслями и развивать их, а также общаться друг с другом.

В книге «Исследование психологии процесса изобретения в области математики» (1945) Жак Адамар занялся изучением вопроса о том, как мыслит математик, и обнаружил, что в процессе творчества почти все математики избегают пользоваться языком. Они мыслят смутными образами, визуальными или тактильными. Именно о таком характере мышления говорится в письме Эйнштейна к Адамару, приведенном в названной книге:

> Слова, написанные или произнесенные, не играют, видимо, ни малейшей роли в механике моего мышления. Психологическими элементами мышления являются некоторые более или менее ясные знаки или образы, которые могут быть «по желанию» воспроизведены и скомбинированы.
>
> ...Элементы, о которых я только что упомянул, бывают у меня обычно визуального или изредка двигательного типа. Слова или другие условные знаки приходится подыскивать (с трудом) только на вторичной стадии... ([70][98], с. 80.)

Разумеется, визуализация играет главную роль в творческом акте. Образ бесконечных прямых, делящих евклидову плоскость на две части, берет начало из визуализации. Вопрос сводится к следующему: «верит» ли разум фактам (независимо от того, каким образом они получены) настолько, что, как утверждают интуиционисты, необходимость в точной словесной формулировке и логическом доказательстве отпадает?

В 1930 г. Аренд Рейтинг (р. 1898), наиболее выдающийся представитель интуиционизма после Брауэра, опубликовал работу с изложением формальных правил интуиционистской логики высказываний[99]; это явилось своего рода символическим выражением намерения наладить отношения с формальными логиками. Логика высказываний охватывала лишь часть классической формальной логики. Например, в логике Рейтинга из истинности высказывания p следует: неверно, что p ложно. Но из утверждения «неверно, что p ложно» еще не следует, что p истинно, так как высказывание p может оказаться неконструктивным. Закон исключенного третьего (утверждение «p или не p всегда истинно») в логике Рейтинга не используется. Но если из высказывания p следует высказывание q, то из отрицания q следует, что p ложно. Сами интуиционисты не придали особого значения предпринятой Рейтингом попытке формализации логики. Она не позволяла полностью представить идеи. Кроме того, формализация Рейтинга не была единственной[100]: среди интуиционистов не существовало единого мнения по поводу того, какие логические принципы считать приемлемыми.

Несмотря на ограничения, наложенные интуиционистами на математику, и на критику интуиционистской философии представителями других направлений, в целом интуиционизм пошел математике на пользу. Он выдвинул на первый план вопрос «Что означает в математике существование?», впервые серьезно обсуждавшийся в связи с аксиомой выбора. Перефразируя Вейля, можно сказать; много ли проку от того, что мы знаем о существовании числа, обладающего теми или иными свойствами, если у нас нет возможности реализовать или вычислить его? Неограниченное» наивное использование закона исключенного третьего явно нуждается в

---

[98] Адамар Ж. *Исследование психологии процесса изобретения в области математики*. – М.: Советское радио, 1970.

[99] **Яглом:** В разработке интуиционистской логики приняли участие также московские математики В.И. Главенко (1897–1940; работы 1928–1929) и особенно А.Н. Колмогоров (р. 1903; работы 1925, 1932). Ср. также [71: Драгалин А.Г. *Математический интуиционизм* (введение в теорию доказательств). – М.: Наука, 1979].

[100] **В.Э.:** Здесь Яглом еще раз ссылается на предыдущее свое примечание.

пересмотре. Особенно важно, по-видимому, то, что интуиционизм отстаивал непременную вычислимость чисел и функций, существование которых доказано лишь тем, что предположение об их несуществовании приводит к противоречию. Узнать эти числа непосредственно – это то же самое, что жить рядом с другом, но это означает совсем иное, чем просто знать, что где-то в мире у тебя есть друг.

Противоборство логицистов и интуиционистов было лишь первой схваткой в разгоравшейся битве за обоснование математики. В борьбу вступали всё новые участники, о которых речь еще впереди.

(Продолжение в {KLINE3})

Оглавление