Дневник

Quod sentimus loquamur,
quod loquimur sentiamus!

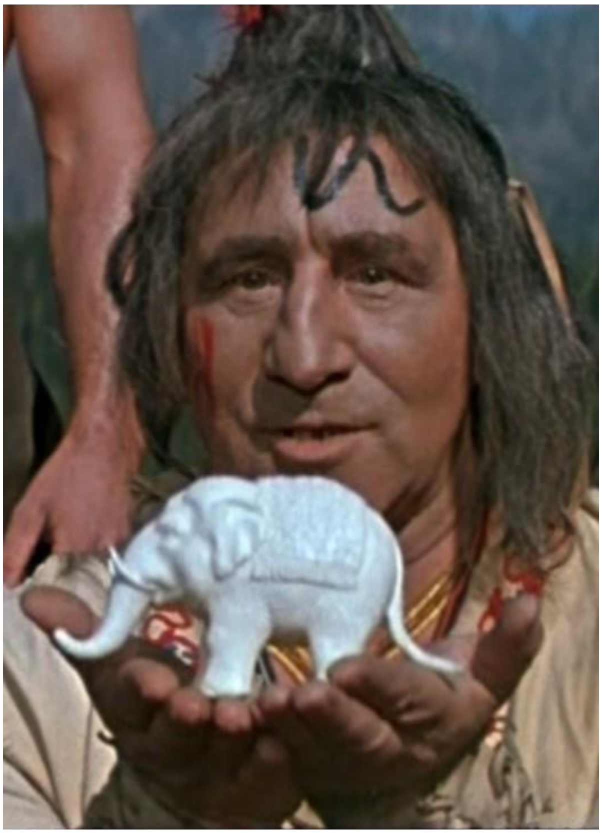
VEcordia

Извлечение R-KLINE3

Открыто: 2009.11.17 21:45
Закрыто: не закрыто
Версия: 2018.02.24 18:56

ISBN 9984-9395-5-3
Дневник «VECORDIA»

ISBN
Моррис Клайн. «Математика» Ч. 3-я



Расщепленный Дуб – вождь племени гуронов в фильме «Чингачгук, Большой Змей» (DEFA, ГДР, 1967; играет Йоханнес Книттель)

Моррис Клайн

Утрата Определенности

Часть III (главы XI–XV)
Перевод Ю.А. Данилова
Под ред. И.М. Яглома
С комментариями Валдиса Эгле
Комментирование этой книги не закончено; если Вы хотите читать эти тексты с полными комментариями В.Э., то подождите, пока исчезнет эта красная надпись.

Impositum

Grīziņkalns 2018

Talis hominis fuit oratio,
qualis vita

Математика: Утрата определенности. Главы XI–XV

(Часть 3-я; начало см. в {KLINE1} и {KLINE2})

XI. Формализм и теоретико-множественные основания математики

Какое значение могут иметь жалкие остатки, немногочисленные, неполные, не связанные друг с другом единичные результаты, которые были выработаны интуиционистами, по сравнению с могущественным размахом современной математики![1]

Давид Гильберт

Логицизм и интуиционизм – два направления, возникшие в первые годы XX в. и придерживавшиеся диаметрально противоположных взглядов на основания математики, – были лишь первыми признаками надвигающейся бури. Третье направление – формализм – сформировал и возглавил Давид Гильберт. Родоначальником четвертого (теоретико-множественного) направления в основаниях математики стал Эрнст Цермело.

В своем докладе [51][2] на II Международном математическом конгрессе, проходившем в 1900 г. в Париже (гл. VIII), Гильберт подчеркнул важность доказательства непротиворечивости математики. Он указал также, что желательно получить прямое доказательство полной упорядоченности вещественных чисел. Но из работ Цермело мы знаем, что полное упорядочение эквивалентно аксиоме выбора. Гильберт обратил также внимание математиков иа необходимость доказательства гипотезы континуума, согласно которой не существует (количественного) трансфинитного числа, большего $\aleph_0$ и меньшего c. Еще до того, как обрели известность парадоксы теории множеств, доставившие немало хлопот математикам, и возникла дискуссия по поводу аксиомы выбора, Гильберт предвидел насущную необходимость решения всех этих проблем.

Суть своего подхода к основаниям математики, в том числе и к доказательству ее непротиворечивости, Гильберт изложил в 1904 г. в докладе на III Международном конгрессе математиков в Гейдельберге. Тогда он еще не имел серьезных работ, реализующих намеченную им программу. В последующие 15 лет логицисты и интуиционисты развили бурную деятельность в направлении, указанном этим докладом; однако Гильберт, мягко говоря, не был удовлетворен предложенными ими решениями проблем, потрясающих сами основания математики.

С логицизмом Гильберт разделался довольно спокойно. Его главное возражение против логицизма в докладе на конгрессе и в работе, опубликованной в том же 1904 г., сводилось к тому, что в ходе длительного и сложного развития логики целые числа оказались, хотя и неявно, вовлеченными в присущую ей систему понятий. Следовательно, занимаясь построением понятия

[1] Гильберт Д. *Основания математики*. – В кн.: Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948, с. 383.

[2] *Проблемы Гильберта*. – М.: Наука, 1969.

числа, логика в действительности ходит по замкнутому кругу. Критиковал Гильберт и задание множеств по их свойствам: при таком определении множеств возникала необходимость различать высказывания и пропозициональные функции по типам, а теория типов требовала принятия сомнительной аксиомы сводимости. Гильберт разделял мнение Рассела и Уайтхеда о необходимости включения в математику бесконечных множеств. Но для этого потребовалась бы аксиома бесконечности, а Гильберт вместе с другими не считал ее аксиомой логики.

С другой стороны, философия интуиционизма также не устраивала Гильберта, поскольку интуиционисты отвергали не только бесконечные множества, но и обширные разделы анализа, опирающиеся на чистые теоремы существования, и он яростно нападал на интуиционизм. В 1922 г. он обвинил интуиционистов в том, что они «стремятся разрушить и изуродовать математику». В статье 1927 г. он выразил свой протест против интуиционизма следующим образом: «Отнять у математиков закон исключенного третьего – это то же самое, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксерам пользование кулаками. Запрещение теорем существования и закона исключенного третьего почти равносильно полному отказу от математической науки» ([50][3], с. 383).

По поводу отношения Гильберта к интуиционизму Вейль сказал в 1927 г.: «То, что с этой [интуиционистской] точки зрения надежна лишь часть классической математики, причем далеко не самая лучшая, – горький, но неизбежный вывод. Гильберту была невыносима мысль об этой ране, нанесенной математике».

И логицизм, и интуиционизм Гильберт обвинял в том, что они не смогли доказать непротиворечивость математики. В работе 1927 г. Гильберт торжественно заявил:

> Математика есть наука, в которой отсутствует гипотеза. Для ее обоснования я не нуждаюсь ни, как Кронекер, в господе боге, ни, как Пуанкаре [который считал, что доказать непротиворечивость системы, использующей математическую индукцию, невозможно], в предположении об особой, построенной на принципе полной индукции способности нашего разума, ни, как Брауэр, в первоначальной интуиции, наконец, ни, как Рассел и Уайтхед, в аксиомах бесконечности, редукции [сводимости] или полноты, которые являются подлинными гипотезами содержательного характера и, сверх того, вовсе не правдоподобными. ([50][4], с. 383.)

В 20-е годы XX в. Гильберт сформулировал свой собственный подход к обоснованию математики и до конца жизни работал над ним. Среди работ, опубликованных Гильбертом в 20-е годы и в начале 30-х годов, особое место по богатству идей занимает работа «О бесконечности» ([44*][5], 1925), где он формулирует замысел своей теории: «Эта теория ставит своей целью установить определенную надежность математического метода» ([50][6], с. 340).

Первый из тезисов Гильберта состоял в том, что, поскольку логика, развиваясь, непременно включает в себя математические идеи и поскольку для сохранения классической математики нам неизбежно приходится привлекать внелогические аксиомы типа аксиомы бесконечности, правильный подход к математике должен включать понятия и аксиомы не только логики, но и математики. Кроме того, логика должна чем-то оперировать, и это «что-то» состоит из внелогических конкретных понятий (таких, как понятие числа), воспринимаемых интуитивно еще до того, как мы начинаем рассуждать логически.

Принятые Гильбертом логические аксиомы несущественно отличаются от аксиом Рассела, хотя Гильберт ввел больше аксиом, поскольку его не интересовало построение наиболее экономной системы аксиом логики. Но так как, согласно Гильберту, математика невыводима из логики (математика не следствие логики, а автономная научная дисциплина), то аксиоматика как логики, так и математики должна включать математические и логические аксиомы. Гильберт считал также, что математику надежнее всего рассматривать не как фактическое знание, а как формальную, т.е. абстрактную, дисциплину, занимающуюся преобразованием символов безотносительно к их значению (хотя неформально значение символов и их отношение к реальности

---

[3] Гильберт Д. *Основания геометрии*. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

[4] Гильберт Д. *Основания геометрии*. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

[5] Hilbert D. *Über das Unendliche* – Mathematische Annalen, 1925, 95, 161–190; англ. переводы *On the Infinite* в кн. [4], p. 131–151 и в кн. [40], с. 367–392, [Русский перевод сокращенного варианта статьи: Гильберт Д. *О бесконечном*. В кн.: Гильберт. *Основания геометрии*. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948, 338–364.]

[6] Гильберт Д. *Основания геометрии*. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

также учитываются). Доказательства теорем должны сводиться к преобразованиям символов, производимым по определенным правилам логического вывода.

Чтобы избежать неоднозначности языка и бессознательного использования интуитивных представлений, приводящих к одним парадоксам, исключить другие парадоксы и достичь строгости доказательств и объективности, Гильберт счел необходимым записать все утверждения логики и математики в символической форме. Хотя символы и могли иметь некоторое интуитивно воспринимаемое значение, в предложенной Гильбертом трактовке математики они не нуждались в интерпретации. Некоторые символы могли даже означать бесконечные множества, поскольку Гильберт намеревался включить их в свою теорию, но в таком случае они оказались бы лишенными интуитивного образа. Такие «идеальные элементы», как их называл Гильберт, необходимы для построения всей математики; поэтому их введение обоснованно, хотя сам Гильберт считал, что в реальном мире существует лишь конечное число объектов: материя состоит из конечного числа элементов.

Суть рассуждений Гильберта можно понять, если воспользоваться следующей аналогией. Иррациональное число лишено интуитивного смысла. Хотя мы можем построить отрезки, длины которых выражаются иррациональными числами, эти длины сами по себе еще не создают никакого интуитивного представления об иррациональных числах. Тем не менее иррациональные числа как идеальные элементы с необходимостью входят даже в элементарную математику. Именно поэтому математики и шли на использование иррациональных чисел, хотя те до 70-х годов XIX в. не имели логического обоснования. Гильберт занял аналогичную позицию в отношении комплексных чисел, т.е. чисел, содержащих выражение $\sqrt{-1}$. Комплексные числа не имеют прямых аналогов среди вещественных чисел, тем не менее они позволяют сформулировать некоторые общие теоремы, например теорему о том, что каждое алгебраическое уравнение n-й степени имеет ровно n корней, и делают возможной теорию функций комплексного переменного, оказавшуюся необычайно полезной даже в физических исследованиях. Независимо от того, означают ли символы объекты, имеющие интуитивный смысл или лишенные его, все знаки и символы понятий и операций рассматриваются как чисто формальные элементы той системы, которую мы строим. По мнению Гильберта, при обосновании математики элементами математического мышления следует считать символы и высказывания, т.е. комбинации (или строки) символов. Формалисты надеялись «купить» определенность за подходящую цену, и этой ценой было манипулирование символами, лишенными всякого смысла.

К счастью, символика логики была разработана в конце XIX – начале XX вв. (гл. VIII), поэтому у Гильберта с самого начала было под рукой всё необходимое. В частности, он располагал такими символами, как $\sim$ (не), • (и), $\vee$ (или), $\Rightarrow$ (следует), $\exists$ (существует). Все они были первичными, или неопределяемыми, понятиями. Что же касается самой математики, то для нее символические обозначения были разработаны давно.

По замыслу Гильберта из выбранных им аксиом логики должны были следовать все законы логики Аристотеля. Применимость этих аксиом вряд ли вызывала у кого-нибудь сомнения. Например, если X, Y и Z – высказывания, то одна из аксиом Гильберта гласит: «Если X, то $X \vee Y$» (иными словами, «Если истинно X, то истинно также X или Y»). Другая аксиома сводится к неформальному утверждению о том, что если из X следует Y, то из «Z или X» следует «Z или Y». Особое место в логике Гильберта занимает схема заключения. На неформальном уровне она утверждает, что если формула A верна и если из формулы A следует формула B, то формула B верна. В аристотелевой логике этот закон называется *modus ponens* (модус поненс). Гильберт не хотел также отказываться от закона исключенного третьего и с помощью специального приема записал в символическом виде и этот закон. Тот же прием позволил формализовать и аксиому выбора, которая, несомненно, принадлежит к числу математических аксиом. Подобный прием позволял избегать явного употребления слова «все» – Гильберт надеялся, что это поможет ему обойти все парадоксы.

В любой области математики, имеющей дело с числами, существуют (в соответствии с программой Гильберта) аксиомы арифметики. Например, существует аксиома «из $a = b$ следует $a' = b'$», утверждающая, что если два целых числа a и b равны, то числа, непосредственно следующие за ними (интуитивно – ближайшие большие a, соответственно b, целые числа), также равны. В аксиомы арифметики входит и аксиома математической индукции (ср. [72][7]). Как

[7] Генкин Л. *О математической индукции*. – М.: Физматгиз, 1962.

правило, аксиомы имеют отношение к нашему опыту, связанному с наблюдением явлений природы, или к миру уже существующих математических знаний.

Формальная система, представляющая теорию множеств, должна содержать (записанные в виде комбинаций символов) аксиомы, которые указывают, какие множества допустимо образовывать. Например, подобные аксиомы могут допускать составление множества, являющегося объединением двух множеств, и множества всех подмножеств данного множества.

Записав все математические и логические аксиомы в виде символических формул, Гильберт подготовил всё необходимое для ответа на главный вопрос: что следует понимать под объективным доказательством? По Гильберту, строгое доказательство складывается из трех этапов: 1) предъявление некоторой формулы; 2) утверждение, что из предъявленной формулы следует другая формула, и 3) предъявление второй формулы. Последовательность из этих трех этапов, в которой вторая предъявляемая формула является следствием из принятых ранее аксиом или ранее выведенных заключений, и является доказательством теоремы. Допустимой операцией считается также подстановка одного символа или группы символов вместо другого символа или группы символов. По Гильберту, вывод формулы сводится к применению логических аксиом для манипуляции с символами ранее выведенных формул или аксиом.

Формула истинна в том и только том случае, если ее можно получить как последнее звено последовательности формул, каждый член которой либо представляет собой аксиому формальной системы, либо выведен с помощью одного из правил вывода. При желании можно проверить, является ли данная формула заключительным звеном соответствующей цепочки дедуктивных выводов, поскольку доказательство по существу представляет собой механическое преобразование символов. Мы видим, что, с точки зрения формалиста, доказательство и строгость – понятия вполне определенные и объективные.

Собственно математику формалист рассматривает как набор формальных систем, каждая из которых имеет свою логику, обладает своими собственными понятиями, своими аксиомами, своими правилами дедуктивного вывода и своими теоремами. Развитие каждой из этих формальных систем и составляет задачу математики.

Такова была предложенная Гильбертом программа построения собственно математики. Но свободны ли от противоречий выводимые из аксиом заключения? Поскольку предыдущие доказательства непротиворечивости основных областей математики проводились в предположении, что арифметика непротиворечива (более того, как показал сам Гильберт, непротиворечивость евклидовой геометрии сводится к непротиворечивости арифметики), вопрос о непротиворечивости последней приобрел решающее значение. По словам Гильберта, «в геометрии и физической теории доказательство непротиворечивости достигается путем сведения к непротиворечивости арифметики. Подобный метод явно непригоден для доказательства непротиворечивости самой арифметики». Гильберта волновал вопрос абсолютной, а не относительной непротиворечивости. На этой проблеме он сосредоточил свои усилия, утверждая, что нельзя подвергать себя риску столкнуться в будущем с неприятными сюрпризами, подобными тем, которые возникли в математике начала XX в.

Непротиворечивость «не видна снаружи». Невозможно предвидеть все следствия из аксиом. Но Гильберт, как и почти все математики, занимавшиеся проблемами оснований математики, использовал понятие материальной импликации (гл. VIII), в которой из ложного высказывания следует что угодно. Если в системе существует противоречие, то по закону противоречия одно из каких-то двух высказываний должно быть ложным, а если существует ложное высказывание, то из него следует, что 1=0. Следовательно, для доказательства непротиворечивости необходимо лишь убедиться в том, что мы нигде не придем к утверждению 1=0. Тогда, заметил Гильберт в работе 1925 г., «то, что мы пережили дважды – сначала с парадоксами дифференциального исчисления, а затем с парадоксами теории множеств – не произойдет в третий раз и не повторится никогда».

В серии работ, выполненных в период 1920–1930 гг., Гильберт и его ученики Вильгельм Аккерман (1896–1962), Пауль Бернайс (1888–1978) и Джон фон Нейман (1903–1957), постепенно создали метод, получивший название гильбертовской *Beweistheorie* [теории доказательства] или метаматематики, – метод доказательства непротиворечивости любой формальной системы (ср. [73][8], [74][9]). Суть основной идеи метаматематики можно пояснить с помощью следующей

[8] Клини С.К. *Введение в математику*. – М.: ИЛ, 1957.

[9] Расева В., Сикорский Р. *Математика метаматематики*. – М.: Наука, 1972.

аналогии. Допустим, вы захотели бы изучить выразительные возможности японского языка и решили бы проводить этот анализ на японском языке – тогда ваши результаты оказались бы в значительной мере ограничены возможностями самого японского языка. Но если считать, что английский язык выразителен, то при изучении возможностей японского языка целесообразно было бы воспользоваться английским.

В метаматематике Гильберт предложил использовать особую логику, которая не вызывала бы никаких возражений. Истинность ее законов должна быть настолько очевидной, что всякий мог бы принять их без тени сомнения. По существу эти идеи Гильберта были весьма близки принципам интуиционизма. Все спорные моменты – доказательство существования от противного, трансфинитная индукция, актуально бесконечные множества, непредикативные определения – старательно изгонялись. Доказательства существования должны были быть конструктивными. Поскольку формальная система может продолжаться неограниченно, метаматематика не могла обойти вниманием понятия и проблемы, по крайней мере относящиеся к потенциально бесконечным системам. Но ссылки на бесконечное число структурных свойств формулы или использование бесконечного числа производимых над формулами операций объявлялись недопустимыми. Рассматривать формулы, в которые входят символы, означающие актуально бесконечные множества, не запрещалось, но сами множества могли входить лишь как символы в формулах. Математическая индукция по натуральным (положительным целым) числам считалась допустимой, поскольку она доказывает утверждение для **любого конечного** n; однако не следовало понимать этот метод так, будто он позволяет доказывать утверждение сразу для всего **бесконечного множества** натуральных чисел.

Понятия и методы метаматематического доказательства Гильберт назвал финитными. Строгого определения этого термина дано не было. В работе 1925 г. смысл финитности Гильберт пояснил на следующем примере. Высказывание «Если p – простое число, то существует простое число, которое больше p» не финитно, так как представляет собой утверждение о всех целых числах, которые больше p. Высказывание же «Если p – простое число, то существует простое число, которое больше p и меньше $p! + 1$ (p-факториал плюс единица)» финитно, так как при любом простом p нам необходимо лишь убедиться, существует ли простое число среди **конечного**[10] множества чисел, заключенных между p и $p!+1$.

В книге, написанной вместе с Бернайсом и опубликованной в 1934 г., Гильберт описывает финитность следующим образом:

> ...Мы будем говорить о финитных понятиях и утверждениях, подчеркивая всюду словом «финитный», что рассматриваемое рассуждение, утверждение или определение придерживаются рамок принципиальной представимости объектов и принципиальной выполнимости операций, а тем самым происходят в рамках конкретного рассмотрения. ([75][11], т. I, с. 59.)

В тех случаях, когда это не могло привести к недоразумениям, формалисты использовали язык и некоторые обозначения интуитивной, или неформальной, математики.

Выступая с докладом о своей метаматематической программе на Международном математическом конгрессе 1928 г., Гильберт с уверенностью заявил: «Не сомневаюсь, что наш новый подход к основаниям математики, который можно было бы назвать теорией доказательства, позволит навсегда покончить со всеми проблемами обоснования математики». В частности, Гильберт выражал надежду на то, что ему удастся доказать непротиворечивость математики и решить проблему полноты. Иначе говоря, все высказывания, имеющие смысл, будут либо доказаны, либо опровергнуты. Не останется ни одного неразрешимого утверждения.

Как и следовало ожидать, формалистская программа вызвала критику со стороны представителей соперничающих направлений. Во втором издании «Принципов математики» (1937) Рассел заметил, что используемые формалистами аксиомы арифметики не задают

---

[10] **Яглом:** Здесь хочется вспомнить древних греков с их отказом от принятия актуальной бесконечности и стремлением избежать каких бы то ни было бесконечных процедур, что, например, нашло свое выражение в глубоком *методе исчерпывания* Евдокса–Архимеда, позволявшем дать сугубо конечные («финитные») доказательства результатам, которые ныне получают с помощью интегрального исчисления, связанного с предельным переходом при $n \to \infty$ (где n, скажем, число частей, на которые разбивается область интегрирования).

[11] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т.I. Логические исчисления и формализация арифметики; т. II. Теория доказательств. – М.: Наука, 1979, 1982.

однозначно значения символов 0, 1, 2, ...; с тем же успехом счет можно было бы начать и с того, что мы интуитивно понимаем под числами 100, 101, 102, ... Поэтому утверждение «Апостолов было 12» с точки зрения формализма лишено смысла. «Формалисты напоминают часовщика, который настолько озабочен тем, как выглядят выпускаемые им часы, что забыл об их прямом назначении – измерять время – и не вставил в корпус механизм». Логицистское определение числа вкладывает смысл в связь этого понятия с реальным миром; формалистская теория лишает такую связь всякого смысла.

Рассел подверг критике и формалистское понятие существования. Гильберт считал приемлемыми бесконечные множества и другие идеальные элементы и утверждал, что если аксиомы какой-либо области математики, включающие закон исключенного третьего и закон противоречия, не приводят к противоречию, то тем самым гарантируется существование объектов, удовлетворяющих этим аксиомам. Такую трактовку существования Рассел назвал метафизической. Кроме того, он обратил внимание на то, что число непротиворечивых аксиоматических систем, которые можно придумать, неограниченно, но интерес представляют лишь такие системы, которые согласуются с эмпирическим материалом.

Критика Рассела напоминает поговорку «Не смейся, горох, ты не лучше бобов». Должно быть, к 1937 г. он успел основательно подзабыть то, что писал сам в 1901 г.: «Математику можно определить как предмет, в котором никогда не известно ни то, о чем мы говорим, ни истинно или ложно то, что мы говорим».

Формалистская программа была неприемлема и для интуиционистов. Помимо основных различий во взглядах на бесконечность и закон исключенного третьего интуиционисты неоднократно подчеркивали, что они полагаются на смысл математики и стремятся установить, насколько его можно считать здравым, в то время как формалисты (и логицисты) имеют дело с идеальными, или трансцендентальными, мирами, лишенными всякого смысла. Брауэр еще в 1908 г. показал, что в некоторых утверждениях классического математического анализа, в том числе в теореме Больцано–Вейерштрасса (носящей сугубо специальный характер и утверждающей, что у любого ограниченного бесконечного множества существует по крайней мере одна предельная точка), логика и здравый смысл находятся в вопиющем противоречии. Мы должны выбирать, заявил Брауэр, между нашим априорным понятием положительного целого числа и неограниченным использованием закона исключенного третьего в тех случаях, когда последний применяется к любому утверждению, не поддающемуся проверке за конечное число шагов. Некритическое использование аристотелевой логики привело к появлению формально правильных, но бессмысленных утверждений. Порывая со смыслом во многих логических построениях, классическая математика тем самым порывала с реальностью.

Критика Брауэра заставила многих осознать неправильность казавшегося ранее бесспорным мнения о том, что великие математические теории правильно отражают некое заложенное в них реальное содержание. Разумеется, создатели математических теорий мыслили их как идеализации реальных вещей и явлений. Но впоследствии, особенно в XIX в., многие понятия математического анализа утратили какую бы то ни было интуитивную подоплеку, и в глазах интуиционистов они не выглядели логически удовлетворительными. Принять взгляды Брауэра означало отвергнуть значительную часть классической математики на том основании, что она лишена интуитивного смысла.

Современные интуиционисты заявляют, что формализованная математика бессодержательна, даже если бы Гильберту и удалось доказать ее непротиворечивость. Вейль сетовал на то, что Гильберт «спас» классическую математику «ценой коренного пересмотра ее содержания», формализовав и выхолостив ее и «тем самым в принципе превратив из системы с интуитивно воспринимаемыми результатами в игру с формулами по определенным, раз и навсегда установленным правилам... Вполне возможно, что математика Гильберта представляет собой великолепную игру с формулами, более увлекательную, чем шахматы. Но что, спрашивается, дает такая игра нашему разуму, если ее формулы умышленно лишены материального содержания, посредством которого они могли бы выражать интуитивные истины?» В защиту формалистской философии следует заметить, что Гильберт свел математику к бессодержательным формулам только во имя высокой цели: доказательства непротиворечивости, полноты и других не менее важных свойств. Что же касается математики в целом, то даже формалисты никогда не считали ее «просто игрой», а рассматривали как вполне содержательную научную дисциплину.

Как и Рассел, интуиционисты возражали против формалистской интерпретации существования в математике. Гильберт утверждал, что существование любого математического объекта гарантируется непротиворечивостью той области математики, в которой он был введен. Такая интерпретация существования была неприемлема для интуиционистов. Непротиворечивость отнюдь не гарантирует истинности чистых теорем существования. Возражение против принятия формалистской интерпретации существования было выдвинуто двести лет назад Кантом в его «Критике чистого разума»: «Бесплодная попытка подменить логическую возможность понятия (поскольку понятие не противоречит само себе) трансцендентальной возможностью вещей (поскольку понятию соответствует предмет) может обмануть и удовлетворить разве только неискушенного человека» ([18][12], т. 3, с. 364).

Яростный спор между формалистами и интуиционистами происходил в 20-е годы нашего столетия. В 1923 г. с критикой формалистского направления в основаниях математики выступил Брауэр. Как утверждал Брауэр, формалистский подход позволяет избежать противоречий, но не дает ничего, что обладало бы хоть какой-то математической ценностью. «Некорректная математическая теория, даже если ее нельзя отвергнуть, ссылаясь на какое-нибудь опровергающее ее противоречие, всё же остается некорректной, подобно тому как преступление остается преступлением независимо от того, удастся ли суду оправдать преступника». В лекции, прочитанной в 1912 г. в Амстердамском университете, Брауэр саркастически заметил: «На вопрос, где следует искать математическую строгость, две группировки дают два различных ответа. Интуиционисты отвечают, что в человеческом разуме, формалисты – что на бумаге».

В свою очередь Гильберт обвинил Брауэра и Вейля в том, что те пытаются выбросить за борт всё им не подходящее и наложить диктаторские запреты на многие плодотворные области науки. В работе 1925 г. Гильберт назвал интуиционизм изменой науке. Тем не менее Вейль считал, что в метаматематике Гильберт, по существу, ограничил свои принципы интуиционистскими.

Нужно сказать, что принципы метаматематики также подверглись критике. Предполагалось, что принципы метаматематики ни у кого не встретят возражений. Но сами формалисты оказались весьма разборчивыми. Почему же их интуиция должна быть пробным камнем? Почему в таком случае не применить интуиционистский подход целиком ко всей математике? Разумеется, высшим критерием допустимости того или иного метода в метаматематике должна быть его убедительность, но убедительность для кого?

Хотя формалисты могли ответить далеко не на все критические замечания, с начала 30-х годов у них появился весомый аргумент, существенно подкреплявший их позицию. К этому времени Рассел и его коллеги-логицнсты признали, что аксиомы логики не являются универсальными истинами и поэтому их непротиворечивость отнюдь не гарантирована автоматически, а интуиционисты могли лишь утверждать, что надежной гарантией непротиворечивости служит сама интуиция. Между тем формалисты располагали тщательно продуманной процедурой доказательства непротиворечивости, которая с успехом применялась к простым системам; это вселяло в формалистов уверенность, что им удастся доказать непротиворечивость арифметики, а тем самым и всей математики. Однако мы на время оставим формалистов в этой сравнительно благоприятной для них позиции и обратимся к еще одному конкурирующему направлению в основаниях математики.

Представители этого направления, получившего название теоретико-множественного, сначала не формулировали в явном виде свою философию – и сторонников, и явно сформулированную программу это направление обрело позднее. Ныне теоретико-множественное направление по числу своих приверженцев успешно конкурирует с логицизмом, интуиционизмом и формализмом.

Истоки теоретико-множественного направления можно проследить в работах Дедекинда и Кантора. Хотя оба этих математика занимались главным образом изучением бесконечных множеств, они приступили к теоретико-множественному обоснованию обычных целых (натуральных) чисел, прекрасно понимая, что если бы им удалось обосновать целые числа, то тем самым была бы обоснована и вся математика (гл. VIII).

Когда обнаружились противоречия в канторовской теории множеств (трудности, связанные с понятиями наибольшего кардинального и наибольшего ординального числа) и противоречия типа парадоксов Рассела и Ришара, также имеющие непосредственное отношение к теории

[12] Кант И. Сочинения в 6-ти томах. – М.: Мысль, 1964 (т.3), 1965 (т.4), 1966 (т.6).

множеств, некоторые математики решили, что парадоксы обусловлены неформальным введением множеств. Кантор смело высказывал новые идеи, но его изложение далеко не соответствовало требованиям математической строгости. Он дал несколько словесных определений множества в 1884, 1887 и 1895 гг. Под множеством Кантор, по существу, понимал любой набор вполне определенных предметов, доступных нашей интуиции или мысли. Иначе говоря, по Кантору, множество определено, если относительно любого предмета x мы знаем, принадлежит он множеству или нет. Оба варианта определения множества не отличаются строгостью, и теорию множеств в том виде, как ее изложил Кантор, ныне нередко называют наивной.[13] По мнению представителей теоретико-множественного направления, тщательный выбор аксиоматической основы должен был избавить теорию множеств от парадоксов, подобно тому как аксиоматизация геометрии и системы чисел позволила разрешить все связанные с ними логические проблемы.

Хотя теория множеств была составной частью логистического направления в математике, представители теоретико-множественной школы предпочитали прямой аксиоматический подход к теории множеств. Аксиоматизацию теории множеств впервые предпринял Эрнест Цермело в работе 1908 г. Причину парадоксов он видел в том, что Кантор не уточнил понятие множества. Поэтому, как полагал Цермело, ясные и явно сформулированные аксиомы могли бы прояснить, что следует понимать под множеством и какими свойствами оно должно обладать. В частности, Цермело намеревался ограничить размеры допустимых множеств. Цермело не придерживался какой-либо последовательной философии, а лишь стремился избежать противоречий. Предложенная Цермело система аксиом оставляла неопределенными фундаментальные понятия множества и отношение включения одного множества в другое. Эти неопределяемые понятия и другие, заданные явными определениями, должны были удовлетворять утверждениям, содержащимся в аксиомах. Не допускалось использование никаких других свойств множеств, кроме тех, что перечислены в аксиомах. Аксиомы гарантировали существование бесконечных множеств и выполнимость таких операций, как объединение множеств и образование подмножеств. Цермело использовал также аксиому выбора.

Система аксиом Цермело была усовершенствована несколько лет спустя (1922) Абрагамом А. Френкелем (1891–1965). Цермело не проводил различия между свойством, задающим множество, и самим множеством. Эти понятия для Цермело были синонимичны. Различие между свойствами множества и множеством было введено Френкелем в 1922 г. Система аксиом, в наше время наиболее часто используемая специалистами по теории множеств, известна как система Цермело–Френкеля. Оба автора опирались на самую изощренную и стройную математическую логику, какая только существовала в их время, но не указывали явно логические принципы. Цермело и Френкель считали их лежащими за пределами математики и применяли столь же уверенно, как в XIX в. математики пользовались логикой.

Назовем некоторые из аксиом Цермело–Френкеля, взяв на себя смелость привести их в словесной формулировке.

1. Два множества тождественны, если они состоят из одних и тех же элементов. (Интуитивно это определяет множество.)

2. Существует пустое множество.

3. Если x и y – множества, то неупорядоченная пара $\{x, y\}$ также множество.

4. Объединение любого множества множеств есть множество.

5. Существуют бесконечные множества. (Пятая аксиома делает допустимыми трансфинитные кардинальные числа. Это имеет решающее значение, поскольку не подлежит проверке опытом.)

6. Любое свойство, формализуемое на языке теории, может быть использовано для определения множества.

7. Допускается образование множества подмножеств любого множества, т.е. набор всех подмножеств данного множества есть множество. (Процесс образования множества подмножеств можно повторять любое число раз, т.е. рассматривать множество всех подмножеств любого данного множества как некое новое множество; множество подмножеств этого множества также является множеством и т.д.).

---

[13] **Яглом:** См., например, весьма популярный на Западе учебник [76: Halmos P.R. *Naive Set Theory*. – N.Y.: Springer, 1977] элементарной теории множеств, принадлежащий крупному математику и замечательному педагогу П. Халмошу, известному у нас по переводам ряда его книг и статей.

8. Аксиома выбора.

9. x не принадлежит x.

Нельзя не отметить одну замечательную особенность аксиом Цермело–Френкеля: они не допускают к рассмотрению множество, которое содержит все множества, и тем самым, возможно, позволяют избежать парадоксов. В то же время аксиомы Цермело–Френкеля вместе со следствиями из них адекватно отражают все понятия и теоремы теории множеств, необходимые для построения классического математического анализа. Построить теории натуральных чисел на основе теории множеств несложно. Кантор утверждал в 1885 г., что чистая математика сводится к теории множеств, и канторовская программа была осуществлена Расселом и Уайтхедом, хотя их подход к теории множеств отличался гораздо большей сложностью. А если воспользоваться методом координат, то из математики чисел (т.е. из арифметики) следует вся математика, включая геометрию. Тем самым теория множеств становится основанием **всей** математики.[14]

Можно сказать, что надежда избежать противоречий в случае аксиоматизации теории множеств была основана на ограничении типов допустимых множеств, причем если налагаемые ограничения не слишком жестки, то система аксиом оказывается достаточной для обоснования математического анализа. Аксиомы теории множеств позволили до такой степени избежать парадоксов, что никому не удавалось получить их в рамках теории. Цермело заявил, что ни один парадокс не может возникнуть в аксиоматической теории множеств. Более поздние представители теоретико-множественного направления пребывали и продолжают пребывать в полной уверенности, что ни один парадокс не может быть выведен в теории, поскольку Цермело и Френкель тщательно построили иерархию множеств, исключив все неоднозначности, существовавшие в более ранних работах о множествах и их свойствах. К подобным заявлениям представителей теоретико-множественной школы никто из их идейных противников не относился всерьез. Пуанкаре не без сарказма заметил: «Мы возвели ограду вокруг стада, чтобы защитить его от волков, но нам не известно, нет ли волков внутри ограды».

Теоретико-множественное направление, как, впрочем, и все другие направления в основаниях математики, также не избежало критики. Многие считали недопустимым использование аксиомы выбора. Другие критики усматривали признак слабости теоретико-множественного направления в том, что его представители обходили молчанием вопрос о логических основах своей теории. Сама логика и ее отношение к математике явились предметом подробного обсуждения уже в первом десятилетии XX в. Представители же теоретико-множественного направления довольно небрежно обращались с логическими принципами. Их уверенность в непротиворечивости аксиоматической теории множеств считалась проявлением наивности (критики не без яда напоминали, что и Кантор был наивен до тех пор, пока не столкнулся с трудностями, гл. IX). Некоторые критики находили, что аксиомы теории множеств весьма произвольны и носят искусственный характер. Аксиомы Цермело–Френкеля предназначены для того, чтобы избежать парадоксов, но некоторые из этих аксиом неестественны или не основаны на интуитивных представлениях. Коль скоро представители теоретико-множественного направления принимают логические принципы как нечто очевидное, то почему бы не начать с арифметики, спрашивали критики.

Несмотря на все критические замечания, аксиоматика Цермело–Френкеля до сих пор используется некоторыми математиками как надежное основание для построения всей матема-

[14] Впоследствии Гёдель (1940) и Бернайс (1937) модифицировали систему Цермело–Френкеля, введя различие между множествами и классами. В 1925 г. Гёдель и Бернайс упростили вариант аксиоматики теории множеств, предложенный фон Нейманом. Множества могут принадлежать другим множествам. Все множества – классы, но не все классы – множества. Классы не могут принадлежать большим классам. Различие между множествами и классами означает, что чудовищно большим совокупностям элементов не разрешается принадлежать другим классам. Тем самым исключаются канторовские множества, приводящие к парадоксам. Любая теорема в системе Цермело–Френкеля является теоремой в системе Гёделя–Бернайеа, и наоборот. Известно много вариантов аксиоматики теории множеств, но не существует критерия, который позволил бы отдать одному варианту предпочтение перед другим. [По поводу аксиоматики теории множеств см., например, [32*: Fraenkel A.A., Bar-Hillel Y., Levy A. Foundations of Set Theory, 2nd rev. ed., New York: North-Holland, 1973. [Имеется русский перевод 1-го изд. книги: Френкель А., Бар-Хилел И. Основания теории множеств. – М.: Мир, 1966.]] и [78–80: Fraenkel A., Bernays P. Axiomatic set theory. – Amsterdam: North-Holland, 1958. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. – М.: Мир, 1970. Mostowski A. Constructible Sets with Applications. – Amsterdam: North-Holland, Warszawa: PWN, 1969]. – *Ред.*]

тики. Теория множеств Цермело–Френкеля – самая общая и фундаментальная теория, на которой и ныне строятся математический анализ и геометрия. Число приверженцев других направлений в основаниях математики возрастало по мере того, как их лидеры развивали и пропагандировали свои взгляды. Аналогичная история произошла и с теоретико-множественным подходом. Некоторые логицисты, например, Уиллард Ван Орман Куайн, выступили в поддержку теории множеств. В этой связи нельзя не упомянуть (нарушая хронологическую последовательность изложения) о группе известных и весьма уважаемых математиков, объединившихся под коллективным псевдонимом Никола Бурбаки. В 1936 г. эта группа поставила перед собой задачу доказать во всех деталях то, в чем были глубоко убеждены многие математики: если принять аксиоматику теории множеств Цермело–Френкеля (в переработке Бернайса и Гёделя) и некоторые принципы логики, то на них можно построить всю математику. Но для бурбакистов логика подчинена аксиомам собственно математики. Логика не определяет ни того, что такое математика, ни того, чем занимаются математики.

Свои взгляды на логику бурбакисты выразили в статье, опубликованной в *Journal of Symbolic Logic* (1949): «Иначе говоря, логика, если говорить о математиках, представляет собой не больше и не меньше, как грамматику языка, которым мы пользуемся, языка, который должен был существовать еще до того, как могла быть построена грамматика». Последующее развитие математики может потребовать новых модификаций логики. Так случилось с введением бесконечных множеств и, как мы увидим при обсуждении нестандартного анализа (гл. XIII), будет происходить в дальнейшем. Школа Бурбаки отвергла Фреге, Рассела, Брауэра и Гильберта. Ее представители используют аксиому выбора и закон исключенного третьего, хотя выводят его с помощью приема, предложенного Гильбертом. Группу Бурбаки не заботит проблема непротиворечивости. По поводу нее бурбакисты утверждают: «Мы просто отмечаем, что все эти трудности могут быть преодолены способом, позволяющим избежать всех возражений и не оставляющим сомнений в правильности рассуждений». Противоречия возникали в прошлом, и каждый раз их удавалось успешно разрешить. То же будет происходить и впредь. «Вот уже двадцать пять веков математики имеют обыкновение исправлять свои ошибки и видеть в этом обогащение, а не обеднение своей науки; это дает им право смотреть в будущее спокойно» ([2][15], с. 30). Бурбаки выпустил около тридцати томов «Элементов математики», построенных на основе теоретико-множественного подхода.[16]

Итак, к тридцатым годам XX в. сложились четыре различных, так или иначе конфликтующих подхода к математике, и сторонники различных направлений, не будет преувеличением сказать, вели между собой ожесточенную борьбу. Никто не мог более утверждать, что такая-то и такая-то теорема доказана правильно: в 30-е годы непременно следовало пояснить, каким стандартам правильности удовлетворяет данное доказательство. Проблема непротиворечивости математики – основная проблема, стимулировавшая появление и развитие не одного нового подхода, – не ставилась совсем (исключение, быть может, составляют интуиционисты, считавшие, что человеческая интуиция служит надежной гарантией непротиворечивости).

Та самая наука, которая в начале XIX в., несмотря на все зигзаги логического развития, была провозглашена совершеннейшей из наук, та самая наука, в которой теоремы доказывались с помощью неопровержимых, безупречных рассуждений, та самая наука, утверждения которой были не только неопровержимыми, но и считались истинами об окружающем нас мире и, по мнению некоторых, остались бы истинами в любом из возможных миров, не только отказалась от всяческих притязаний на истину, но и запятнала себя конфликтами между различными школами

[15] Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965.

[16] **Яглом:** Французские оригиналы обширного трактата Н. Бурбаки *Eléments de mathématique* выходили в выпускаемой парижским издательством «Герман» серии «Новости науки и техники» (*Actualités scientifique et industrielle*), состоящей из книг небольшого объема; русский перевод этого, пока еще не законченного сочинения состоит из меньшего (хотя все равно очень большого) числа объемистых томов. [Некоторые неувязки, допущенные при переводе сочинения Бурбаки на русский язык, выпускавшегося двумя разными издательствами (ИЛ–«Мир» и Гостехиздат–Физматгиз–«Наука») в течение длительного времени, привели к тому, что на русском языке отдельные книги этого трактата выходили под тремя разными названиями: «Элементы математики» (чаще всего), «Основы математики» и «Начала математики» (а выпущенные отдельным изданием исторические вставки в разные части сочинения (в оригинале – *Eléments d'histoire des mathématiques*) получили титул «Очерки по истории математики»). На наш взгляд, наиболее точным было бы название «Начала математики», ибо бесспорна связь наименования, данного группой Бурбаки своему сочинению, с «Началами» Евклида (по-французски: *L'Eléments*).]

в основаниях и взаимо исключающими утверждениями о правильных принципах логики. Гордость человеческого разума была глубоко уязвлена.

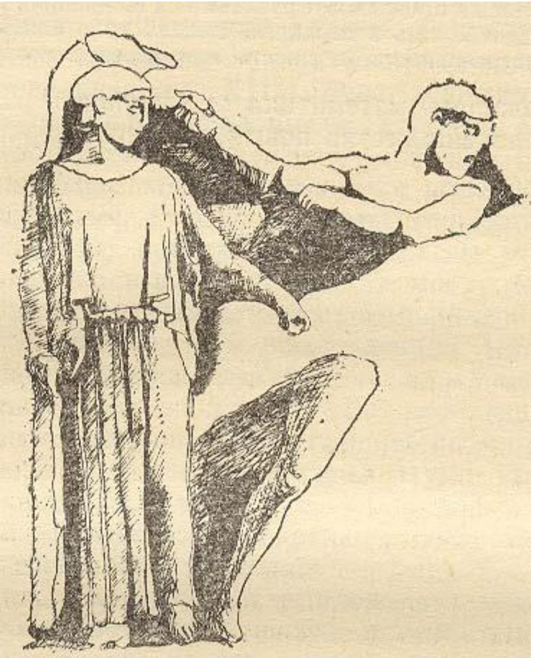
Положение, сложившееся в 30-е годы, красочно описал математик Эрик Темпл Белл:

> Как известно большинству математиков по собственному опыту, многое из того, что одно поколение математиков считает надежным и удовлетворительным, имеет шанс обратиться в тончайшую паутину под пристальным взором следующего поколения... Знания как в некотором смысле разумного общего соглашения по вопросам обоснования математики, по-видимому, не существует... Ясно одно: одинаково компетентные специалисты разошлись и продолжают расходиться во мнениях по поводу простейших рассуждений, хоть в малейшей степени явно или неявно претендующих на универсальность, общность или неоспоримость.

Что могла ожидать математика от будущего? Как мы увидим, будущее принесло множество новых, не менее серьезных проблем.

XII. Бедствия

Жарко, жарко, пламя ярко!
Хороша в котле заварка![17]
Вильям Шекспир, Макбет



Оглядываясь назад, можно сказать, что состояние оснований математики в 30-е годы XX в. было вполне удовлетворительным. Парадоксы были разрешены, хотя каждая из школ в основаниях математики решала их по-своему. Правда, не существовало единого мнения относительно того, какую математику надлежит считать правильной, но каждый математик мог выбрать подход, наиболее отвечающий его вкусам, и действовать в соответствии с принципами, которых придерживались сторонники данного направления.

Однако две проблемы продолжали беспокоить математиков. Первой, и главной, была проблема доказательства непротиворечивости математики – та проблема, которую в 1900 г. поставил в своем докладе на II Международном математическом конгрессе в Париже Гильберт. Хотя известные парадоксы были разрешены, опасность возникновения в будущем новых парадоксов по-прежнему существовала. Вторая проблема, не дававшая покоя математикам, была связана с так называемой полнотой аксиоматических систем. Говоря кратко, полнота системы аксиом, описывающих какую-либо область математики, означает в известном смысле адекватность этой аксиоматики тому разделу науки, который с ее помощью задается, т.е. означает возможность доказать на основе принятой системы аксиом истинность или ложность любого осмысленного утверждения, содержащего понятия рассматриваемой области математики.

На самом элементарном уровне проблема полноты сводится к вопросу о том, можно ли на основании аксиом Евклида доказать (или опровергнуть), например, разумную гипотезу о том, что в евклидовой геометрии высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке. На более высоком уровне (в области кардинальных трансфинитных чисел) проблему полноты иллюстрирует гипотеза континуума (гл. IX). Полнота аксиоматической системы требует, чтобы с помощью аксиом теории множеств гипотезу континуума можно было или доказать, или опровергнуть. Полнота аксиоматики арифметики (теории чисел) требует, чтобы с помощью аксиом теории чисел (т.е. аксиом, задающих множество натуральных чисел) можно было либо доказать, либо опровергнуть гипотезу Гольдбаха, согласно которой каждое четное число представимо в виде суммы двух простых чисел. Пока мы не знаем, верна эта гипотеза или не верна, но если аксиоматика арифметики полна, то она либо верна, либо не верна – третьего исхода нет. Проблема полноты затрагивает также множество других утверждений, которые на протяжении десятилетий и даже веков математикам не удавалось ни доказать, ни опровергнуть.

Представители различных направлений в основаниях математики по-разному относились к проблемам непротиворечивости и полноты. Рассел перестал считать абсолютными истинами логические аксиомы логицистов и признал, что введенная им аксиома сводимости (гл. X) носит искусственный характер. Развитая Расселом теория типов позволила избежать известных парадоксов, и он полагал, что названная теория даст возможность разрешить и новые парадоксы, которые могут возникнуть в будущем. Но одно дело – субъективная уверенность, и совсем иное – доказательство. Решить проблему полноты Расселу так и не удалось, несмотря на все его усилия.

[17] Шекспир В. Избранные произведения. – М.–Л.: ГИХЛ, 1950, с. 581 (перевод М.Л. Лозинского).

Представители теоретико-множественного направления были убеждены в том, что их подход не приводит к новым противоречиям, однако доказать это они не могли. Проблема полноты была не единственной, и даже не главной, их заботой. Интуиционисты также довольно безразлично относились к проблеме непротиворечивости. Они считали, что интуитивные представления непротиворечивы по самой своей природе. Формальное доказательство, по их мнению, не требовалось и даже вообще было неуместным в рамках их философии. Что же касается полноты, то, по мнению интуиционистов, человеческая интуиция достаточно сильна, чтобы распознать истинность или ложность почти любого осмысленного утверждения, хотя некоторые утверждения могут оказаться неразрешимыми.

Однако формалисты во главе с Гильбертом не были настроены столь благодушно. Предприняв некоторые, весьма ограниченные, попытки решить проблему непротиворечивости в первые годы XX в., Гильберт вернулся к этой проблеме и к проблеме полноты в 1920 г.

Свой метод доказательства непротиворечивости Гильберт в общих чертах изложил в метаматематике. Что же касается полноты, то в статье «О бесконечном» (1925) Гильберт, по существу, повторил идеи, высказанные им в докладе на II Международном математическом конгрессе в Париже (1900). Там Гильберт утверждал, что «каждая определенная математическая проблема непременно поддается строгому решению». Ту же мысль, только развитую несколько подробнее, мы находим в статье Гильберта от 1925 г.:

> В качестве примера возможного подхода к решению фундаментальных проблем я хотел бы избрать тезис о разрешимости любой математической задачи. Мы все убеждены в том, что любая математическая задача поддается решению. Это убеждение в разрешимости каждой математической проблемы является для нас большим подспорьем в работе, когда мы приступаем к решению математической проблемы, ибо мы слышим внутри себя постоянный призыв: вот проблема, ищи решение. Ты можешь найти его с помощью чистого мышления, ибо в математике не существует *ignorabimus* [мы не будем знать]. (Ср. также ([51][18], с. 22.)

Выступая с докладом на Международном математическом конгрессе в Болонье (1928), Гильберт подверг критике прежние доказательства полноты как построенные на использовании принципов логики, недопустимых в математике, но выразил несокрушимую уверенность в полноте своей собственной системы: «В нашем мышлении нет ничего таинственного – мы мыслим по вполне определенным и формулируемым правилам, которые твердо гарантируют абсолютную надежность наших суждений». Каждый математик, по словам Гильберта, разделяет убеждение в разрешимости любой четко поставленной математической проблемы. В статье «Естествознание и логика» (1930) Гильберт утверждал: «На мой взгляд, истинная причина, в силу которой Конту[19] не удалось найти неразрешимую математическую проблему, заключается в том, что неразрешимых проблем не существует».

В работе «Обоснования математики», о которой Гильберт доложил в 1927 г., а опубликовал в 1930 г., он, по существу, развил свои идеи, выдвинутые в работе 1905 г. По поводу предложенного им метаматематического метода (теории доказательства) установления непротиворечивости и полноты Гильберт утверждал следующее:

> С помощью этого нового обоснования математики, который справедливо можно именовать теорией доказательства, я преследую важную цель: именно, я хотел бы окончательно разделаться с вопросами обоснования математики как таковыми, превратив каждое математическое высказывание в поддающуюся конкретному показу и строго выводимую формулу и тем самым приведя образование понятий и выводы, которыми пользуется математика, к такому изложению, при котором они были бы неопровержимы и всё же давали бы картину всей науки. Я надеюсь, что смогу с помощью своей теории доказательства полностью достигнуть этой цели, хотя до ее полного завершения необходима еще большая работа. ([50][20], с. 365.)

---

[18] Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969.

[19] **Яглом:** Огюст Конт (1798–1857) – видный французский философ, один из основоположников и бесспорный лидер позитивизма, утверждающего, что целью науки являются наблюдение и эксперимент, а также формулировка тех выводов, которые прямо отсюда следуют. Конту принадлежит идея о естественной иерархии наук в направлении уменьшения их абстрактности; при этом при построении любой науки должны быть известны основные факты всех предшествующих ей наук. Эта «лестница Конта» начиналась с математики (являющейся, таким образом, фундаментом любого знания) и заканчивалась социологией (термин, впервые введенный Контом).

[20] Гильберт Д. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

Гильберт был уверен, что его теория доказательств позволит разрешить проблемы непротиворечивости и полноты.

К 30-м годам были получены некоторые результаты о полноте различных аксиоматических систем. Сам Гильберт построил несколько искусственную систему, охватывающую лишь часть арифметики, и доказал ее полноту и непротиворечивость. Аналогичные ограниченные результаты вскоре удалось получить и другим авторам. Так, была доказана непротиворечивость и даже полнота таких сравнительно тривиальных аксиоматических систем, как исчисление высказываний. Некоторые из доказательств принадлежали ученикам Гильберта. В 1930 г. Курт Гёдель (1906–1978), ставший впоследствии профессором Института высших исследований в Принстоне, доказал полноту исчисления предикатов первой ступени, охватывающего высказывания и пропозициональные функции.[21] Формалисты были в восторге от полученных результатов. Гильберт еще больше уверовал в то, что его метаматематике (его теории доказательства) удастся доказать непротиворечивость и полноту всей математики.

Но уже в следующем году Гёдель опубликовал другую работу, поистине открывшую ящик Пандоры. В этой работе, называвшейся «О формально неразрешимых утверждениях [оснований математики] и родственных систем» (1931), содержались два поразительных результата. Наибольшее смятение у математиков вызвал один из них – утверждающий, что непротиворечивость любой достаточно мощной математической системы, охватывающей арифметику целых чисел, не может быть установлена средствами самой этой системы на основе математических принципов, принятых различными школами в основаниях математики: логицистами, формалистами и представителями теоретико-множественного направления. Это утверждение Гёделя прежде всего касалось формалистской школы, ибо Гильберт по собственной воле ограничил свою метаматематику такими логическими принципами, которые были приемлемы даже для интуиционистов, чем сузил арсенал доступных формалистам логических средств. Результат Гёделя послужил поводом для известного высказывания Германа Вейля: «Бог существует, поскольку математика, несомненно, непротиворечива, но существует и дьявол, поскольку доказать ее непротиворечивость мы не можем».

Приведенный результат Гёделя является следствием из установленного им другого, не менее поразительного результата, который известен как теорема Гёделя о неполноте. Она утверждает, что если формальная теория T, включающая арифметику целых чисел, непротиворечива, то она неполна.[22] Иначе говоря, существует имеющее смысл утверждение арифметики целых чисел (обозначим его S), которое в рамках данной теории невозможно ни доказать, ни опровергнуть. Но либо утверждение S, либо утверждение «не S» истинно. Следовательно, в арифметике существует истинное утверждение, которое недоказуемо, а значит, и неразрешимо. Хотя Гёдель не указал точно, о каком классе аксиоматических систем идет речь в полученном им результате, теорема о неполноте применима к системам Рассела–Уайтхеда, Цермело–Френкеля, гильбертовской аксиоматике чисел и ко всем наиболее распространенным аксиоматическим системам. Казалось, непротиворечивость достигается ценой неполноты. И словно для того, чтобы разбередить рану и вновь унизить математиков, истинность некоторых неразрешимых утверждений удалось доказать с помощью рассуждений (правил логики), выходящих за рамки допустимого в перечисленных выше формальных системах.

Как и следовало ожидать, получение столь поразительных результатов потребовало от Гёделя немалых усилий. Основная идея его работы состояла в том, чтобы каждому символу или каждой последовательности символов в системе, принятой, например, логицистами или формалистами, сопоставить определенное число. Любому утверждению или последовательности

---

[21] Исчисление предикатов первой ступени, как доказали Гильберт и другие, непротиворечиво, и аксиомы его независимы.

[22] Теорема Гёделя о неполноте применима и в случае обращения к исчислению предикатов второй ступени (гл. VIII). [По поводу теорем Гёделя см., например, [81: Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. – М.: Советское радио, 1979; Вычислимое и невычислимое. – М.: Советское радио, 1980], а также обращенные к более широкому кругу читателей статью [82: Манин Ю.И. Теорема Гёделя. – Природа, 1975, № 12, с. 80–87] и брошюру [83: Успенский В.А. Теорема Гёделя о неполноте. – М,: Наука, 1981]. – *Ред.*]

утверждений, образующих доказательство, Гёдель также ставил в соответствие некоторое число – гёделевский номер.[23]

Рассмотрим схему Гёделя подробнее. Произведенная Гёделем арифметизация состояла в том, что каждому математическому понятию он сопоставлял некоторое натуральное число. Числу 1 Гёдель поставил в соответствие число 1, знаку равенства – число 2, введенному Гильбертом символу отрицания – число 3, знаку плюс – число 5 и т.д. Таким образом, набору символов 1=1 Гёдель сопоставляет числовые символы 1, 2, 1, тогда как равенству (формуле) 1=1 сопоставляется не три (числовых) символа 1, 2, 1, а единственное число, структура которого позволяла бы восстановить все входящие в него символы-компоненты. А именно: Гёдель выбрал три первых простых числа 2, 3 и 5 и, составив из них число $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90$, присвоил его равенству 1 = 1. Число 90 допускает однозначное разложение в произведение степеней простых чисел $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, по которому нетрудно восстановить символы 1, 2, 1.

Каждой формуле рассматриваемых систем Гёдель поставил в соответствие некоторое число. Каждой последовательности формул, образующих доказательство, он также сопоставил определенное число. Показатели в разложении номера доказательства в произведение степеней простых чисел сами не являются простыми числами, хотя и связаны с ними довольно просто. Так, число $2^{900} \cdot 3^{90}$ может быть гёделевским номером доказательства. Это доказательство содержит формулы с гёделевскими номерами 900 и 90. Следовательно, по номеру доказательства мы можем восстановить входящие в него формулы.

Утверждения метаматематики о формулах рассматриваемой аксиоматической системы Гёдель также представил с помощью чисел. Каждое метаматематическое утверждение получило свой гёделевский номер. Тем самым получено «отображение» метаматематики в арифметику.

Осуществив перевод словесных утверждений метаматематики на арифметический язык, Гёдель показал, как построить арифметическое утверждение *G*, означающее в переводе на метаматематический язык, что утверждение с гёделевским номером *m* недоказуемо. Но утверждение *G*, рассматриваемое как последовательность символов, имеет гёделевский номер *m*. Следовательно, *G* утверждает о самом себе, что оно недоказуемо. Итак, если *G* доказуемо, то оно должно быть недоказуемым, а если *G* недоказуемо, то оно должно быть доказуемым, поскольку недоказуемо, что оно недоказуемо. Так как любое арифметическое утверждение либо истинно, либо ложно, формальная система, которой принадлежит *G*, неполна (если только она непротиворечива). Тем не менее арифметическое утверждение *G* истинно, так как является утверждением о целых числах, которое можно доказать, используя более интуитивные рассуждения, чем допускает формальная система.

Поясним суть гёделевской схемы на примере. Рассмотрим утверждение *S*: «Это утверждение ложно». Оно приводит к противоречию. Действительно, если *S*, рассматриваемое как единое целое, истинно, то оно, согласно ему самому, должно быть ложным, а если *S* ложно, то ложно, что *S* ложно, в силу чего *S* должно быть истинным. Гёдель заменил слово «ложно» словом «недоказуемо», превратив *S* в утверждение *G* – «Это утверждение недоказуемо». Если утверждение недоказуемо, то утверждаемое им истинно. С другой стороны, если утверждение доказуемо, то оно ложно, или, в соответствии с обычной логикой, если утверждение истинно, то оно недоказуемо. Следовательно, утверждение истинно в том и только в том случае, если оно недоказуемо. Мы приходим не к противоречию, а к истинному утверждению, которое недоказуемо, т.е. неразрешимо.

Заготовив впрок неразрешимое утверждение, Гёдель построил арифметическое утверждение *A*, соответствующее метаматематическому утверждению «Арифметика непротиворечива», и доказал, что из *A* следует *G*. Поэтому если бы *A* было доказуемым, то и *G* было бы доказуемым. Но так как *G* неразрешимо, *A* недоказуемо. Иными словами, утверждение *A* неразрешимо. Тем самым установлена невозможность доказать «внутренними средствами» (т.е. в рамках той же системы) непротиворечивость арифметики любым методом – с помощью любой системы логических принципов, представимой в виде арифметической системы.

На первый взгляд кажется, что неполноты можно было бы избежать, если ввести в формальную систему дополнительный логический принцип или математическую аксиому. Но метод Гёделя позволяет доказать, что если дополнительное утверждение допускает перевод на

[23] **Яглом:** Доступное изложение теоремы Гёделя и некоторых других упомянутых ниже понятий и результатов имеется в небольшой по объему и требующей минимальной предварительной подготовки книге [84: Линдон Р. *Заметки по логике*. – М.: Мир, 1968].

язык арифметики по предложенной Геделем схеме (согласно которой символам и формулам мы ставим в соответствие некоторые числа – их гёделевские номера), то и в расширенной системе можно сформулировать неразрешимое утверждение. Иначе говоря, избежать неразрешимых утверждений и доказать непротиворечивость можно лишь с помощью логических принципов, «не отображаемых» в арифметику. Чтобы пояснить суть дела, воспользуемся аналогией (хотя и несколько неточной): если бы логические принципы и математические аксиомы были сформулированы на японском языке, а арифметизация Гёделя означала бы перевод на английский язык, то результаты Гёделя получались бы до тех пор, пока был бы осуществим перевод с японского на английский.

Таким образом, теорема Гёделя о неполноте утверждает, что ни одна система математических и логических аксиом, арифметизуемая тем или иным способом (например, так, как это сделал Гёдель), не позволяет охватить даже все содержащиеся в ней истины, не говоря уже о всей математике, поскольку любая система аксиом неполна. В любой аксиоматической системе существуют утверждения, недоказуемые в рамках данной системы. Истинность таких утверждений может быть установлена лишь с помощью неформальных рассуждений. Теорема Гёделя о неполноте, показавшая, что аксиоматизация имеет свои пределы, разительно отличалась от господствовавших в конце XIX в. представлений о математике как о совокупности аксиоматизируемых (и аксиоматизированных) теорий. Теорема Гёделя нанесла сокрушительный удар по всеобъемлющей аксиоматизации. Неадекватность аксиоматического подхода сама по себе противоречием не была; однако она явилась полной неожиданностью, поскольку математики, особенно формалисты, предполагали, что в рамках некоторой аксиоматической системы любое истинное в ней утверждение заведомо доказуемо.[24] Брауэр установил, что интуитивно воспринимаемые истины часто лежат далеко за пределами того, что было доказано в классической математике, а Гёдель доказал, что интуитивно воспринимаемые истины вообще выходят за рамки математического доказательства. По выражению Пауля Бернайса, ныне более разумно не столько рекомендовать аксиоматику, сколько предостерегать против ее переоценки. Разумеется, сказанное выше не исключает возможности появления новых методов доказательства, которые выходят за пределы допустимого логическими принципами, принятыми различными школами в основаниях математики.

Оба полученных Гёделем результата потрясли математику. Невозможность доказать непротиворечивость наносила смертельный удар прежде всего формалистской философии Гильберта, который не сомневался в успехе своего намерения в рамках метаматематики доказать непротиворечивость всей математики. Но результаты задевали далеко не только гильбертовскую программу. Гедель доказал, что какой бы подход к математике на основе надежных логических принципов мы ни избрали, нам всё разно не удастся доказать непротиворечивость математики. Ни один из предложенных подходов к основаниям математики не был исключением. Это означало, что математика вынуждена бесповоротно отказаться от претензий на абсолютную достоверность или значимость своих результатов, т.е. лишиться одной из основных своих особенностей, на которую претендовала еще сравнительно недавно. Положение осложнялось невозможностью доказать непротиворечивость: ведь всё, о чем говорили математики, могло оказаться бессмыслицей, ибо теперь никто не мог гарантировать, что в будущем не возникнет

[24] **Яглом:** Разумеется, это утверждение автора не означает, что ранее Гёделя математики не знали неполных аксиоматических систем, в которых вполне осмысленное в рамках этой системы утверждение не может быть ни опровергнуто, ни доказано, подобно тому как, скажем, дополнив стандартную аксиоматику теории групп требованием (аксиомой) о конечности группы, мы все равно не сможем ответить на вопрос о том, четен или нечетен порядок (число элементов) группы. [Н. Бурбаки – см., например, [68: Бурбаки Н. *Очерки по истории математики*. – М.: ИЛ, 1963] – считает даже, что единственным принципиальным отличием современной математики от античной является признание равноправности неполных аксиоматических систем с полными, в то время как древние греки признавали лишь полные аксиоматические системы вроде (до конца ими не аксиоматизированных) евклидовой геометрии или системы вещественных чисел. Возможно, первой сознательно рассмотренной математиками неполной аксиоматической системой была *абсолютная геометрия* Я. Бойаи, получающаяся из обычной аксиоматики евклидовой геометрии отбрасыванием аксиомы параллельных; в рамках этой аксиоматической системы, описывающей, так сказать, «общую часть» евклидовой и гиперболической геометрии, нельзя было ответить, скажем, на вопрос, проходит ли через внешнюю по отношению к прямой a точку A одна или много не пересекающих a прямых.] Однако ранее математики, впрочем, обычно не формулируя этого утверждения явно, полагали, что любую неполную аксиоматику можно дополнить какими-то новыми аксиомами, с тем чтобы она стала полной; работы же Гёделя совсем по-новому поставили вопрос о том, что есть в математике истина.

противоречия. Случись такое и окажись противоречие неразрешимым – вся математика обратилась бы в прах. Действительно, одно из двух противоречивых утверждений должно быть ложным, а согласно принятой всеми математическими логиками концепции импликации (так называемой материальной импликации, о которой говорилось в гл. VIII), из ложного утверждения может следовать что угодно. Итак, математики работали под угрозой полного провала. Еще одни удар нанесла теорема о неполноте. И здесь больше всех пострадал Гильберт, хотя теорема Гёделя применима ко всем формальным подходам к математике.

Пусть большинство математиков и не высказывали своих надежд столь откровенно и уверенно, как Гильберт, но все они, несомненно, надеялись, что им удастся решить любую четко поставленную проблему. Например, к 30-м годам XX в. одним лишь попыткам доказать «последнюю» («великую») теорему Ферма (утверждающую, что при любом натуральном $n > 2$ никакие три целых числа x, y и z не могут удовлетворять уравнению $x^n + y^n = z^n$) были посвящены сотни обширных и глубоких по содержанию работ. Но, может быть, постигшая их авторов неудача объяснялась неразрешимостью теоремы Ферма?

Теорему Гёделя о неполноте до некоторой степени можно рассматривать как отрицание закона исключенного третьего. Каждое утверждение мы считаем либо истинным, либо ложным. В современных основаниях математики это означает, что рассматриваемое утверждение доказуемо или недоказуемо с помощью законов логики и аксиом того раздела математики, к которому относится интересующее нас утверждение. Гёдель же доказал, что некоторые утверждения нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Следовательно, теорема Гёделя о неполноте в известной мере подкрепляет позиции интуиционистов, хотя те возражали против логических принципов совсем по другим причинам.

Непротиворечивость можно было бы считать доказанной, если бы в противовес подходу Гёделя в системе удалось обнаружить неразрешимое утверждение; ведь как мы уже установили, опираясь на свойства материальной импликации, если в системе имеется противоречие, то в ней можно доказать что угодно. Однако до сих пор обнаружить неразрешимое утверждение не удалось.

Гильберт не считал, что потерпел поражение. По своей натуре Гильберт был оптимистом и обладал поистине безграничной верой в мощь человеческого разума и его способность к познанию. Этот оптимизм придавал ему мужество и силы, мешая в то же время признать возможность существования неразрешимых математических проблем. Для Гильберта математика была областью человеческой деятельности, познанию в которой не существовало иных пределов, кроме возможностей таланта исследователя.

Гёдель опубликовал свои результаты в 1931 г., т.е. до выхода в свет первого (1934) и второго (1939) томов фундаментального труда Гильберта и Бернайса по основаниям математики [75][25]. В предисловии ко второму тому оба этих автора вынуждены были признать необходимость расширить используемые в метаматематике методы рассуждений. Гильберт и Бернайс включили в число допустимых методов трансфинитную индукцию.[26] Гильберт полагал, что новые принципы вполне могли бы быть интуитивно правильными и приемлемыми для всех. Он пытался развивать дальше это направление, но не пришел ни к каким новым результатам.

События, последовавшие за переломным 1931 г., еще более осложнили ситуацию и обрекли на неудачу любые попытки определить, что такое математика и какие результаты следует считать правильными. Мы упомянем лишь об одном таком событии, далеко не самом важном. Представителю гильбертовской школы Герхарду Генцену (1909–1945) удалось ослабить запреты на методы доказательства, допустимые в метаматематике Гильберта, в частности за счет использования трансфинитной индукции, и в 1936 г. он смог доказать непротиворечивость арифметики и отдельных разделов математического анализа.

Некоторые представители гильбертовской школы в основаниях математики приняли предложенное Генценом доказательство и отстаивали его. Эти формалисты утверждали, что работа Генцена не выходит за пределы интуитивно приемлемой логики. Итак, чтобы защитить формализм, понадобилось перейти от «финитной» логики Брауэра к «трансфинитной» логике Генцена. Противники метода Генцена с сарказмом замечали, что «приемлемая» логика оказы-

---

[25] Гильберт Д., Бернайс П. *Основания математики*. Т.I. Логические исчисления и формализация арифметики; т. II. Теория доказательств. – М.: Наука, 1979, 1982.

[26] Обычная математическая индукция доказывает, что теорема верна для всех конечных положительных целых чисел. Трансфинитная индукция использует тот же метод, но распространяет его на вполне упорядоченные множества траисфинитных ординальных чисел.

вается уж слишком изощренной и что если непротиворечивость арифметики вызывает какие-то сомнения, то введение не менее сомнительного метаматематического принципа вряд ли в состоянии разрешить их. Использование трансфинитной индукции считалось спорным еще до того, как ее взял на вооружение Генцен, и некоторые математики приложили немало усилий, чтобы по возможности исключить трансфинитную индукцию из доказательств. Трансфинитная индукция не была интуитивно убедительным принципом. По выражению Вейля, подобного рода принципы снижают стандартный уровень доказательного рассуждения до такого состояния, когда суть доказываемого становится весьма расплывчатой.

Теорема Гёделя о неполноте породила ряд побочных проблем, о которых также следовало бы упомянуть. Поскольку в любой сколько-нибудь сложной области математики существуют утверждения, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть, возникает вопрос: можно ли определить, доказуемо или недоказуемо любое заданное утверждение? Этот вопрос известен под названием <u>проблемы разрешимости</u>. Решение ее требует эффективных методов (возможно, аналогичных тем, которые используются при расчетах на ЭВМ), позволяющих за конечное число шагов устанавливать доказуемость (истинность или ложность) утверждения или класса утверждений.

Поясним понятие разрешающей процедуры на нескольких простых примерах. Чтобы решить, делится ли одно целое число на другое, мы можем осуществить процесс деления. Если остаток от деления равен нулю, то это означает, что первое число на второе делится. Аналогичная процедура позволяет ответить на вопрос, делится ли один многочлен нацело на другой. Имеется также четкий алгоритм, позволяющий ответить на вопрос, существуют ли целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению $ax + by = c$ с целыми a, b и c.

В своем докладе на II Международном математическом конгрессе в Париже Гильберт поставил очень интересную (десятую) проблему о разрешимости диофантовых уравнений, сформулировав ее так: <u>можно ли указать способ, позволяющий за конечное число шагов установить, разрешимо ли диофантово уравнение в целых числах?</u> (Класс уравнений $ax + by = c$ состоит из диофантовых уравнений, ибо каждый элемент класса представляет собой одно уравнение, связывающее два неизвестных, и решить его требуется в целых числах. Проблема Гильберта относится к гораздо более общему классу диофантовых уравнений.) Проблема разрешимости гораздо сложнее десятой проблемы Гильберта, но математики, работающие над ней, охотно ссылаются на десятую проблему Гильберта, так как уже одно то, что полученные при этом результаты связаны с решением указанной проблемы, придает им особую значимость.

Точный смысл понятию эффективной процедуры придал профессор Принстонского университета Алонсо Черч (р. 1903), который ввел определение <u>рекурсивной</u>, или, как еще говорят, <u>вычислимой функции</u>. Рассмотрим простой пример рекурсивности. Пусть, по определению

$$f(1) = 1,\ f(n+1) = f(n) + 3.$$

Тогда

$$f(2) = f(1) + 3 = 1 + 3 = 4,\ f(3) = f(2) + 3 = 4 + 3 = 7.$$

Шаг за шагом мы можем вычислить все значения функции $f(n)$. Такая функция $f(x)$ называется рекурсивной. Введенное Черчем понятие рекурсивности равнозначно вычислимости, но отличается большей общностью.

В 1936 г. Черч, используя введенное им новое понятие рекурсивной функции, показал, что в общем случае разрешающая процедура (для узкого исчисления предикатов) невозможна: если задано конкретное утверждение, то не всегда можно найти алгоритм, позволяющий установить, доказуемо оно или опровержимо. В любом частном случае утверждение может оказаться доказуемым, но мы не располагаем критерием, который позволял бы заранее определять, доказуемо оно или недоказуемо. Математики могут годами напрасно терять время, безуспешно пытаясь доказать то, что вообще недоказуемо. Относительно десятой проблемы Гильберта Юрий Матиясевич в 1970 г. доказал, что **не существует** алгоритма, позволяющего установить, удовлетворяют ли какие-либо целые числа соответствующим диофантовым уравнениям или нет.[27]

[27] **Яглом:** Доступен и начинающему рассказ [88: Варпаховский Ф.Л., Колмогоров А.Н. *О решении десятой проблемы Гильберта*. – Квант, 1970, № 7, с. 38–44] о работе Ю. Матиясевича; несколько больших знаний требуют комментарии к 10-й проблеме Гильберта в [51: Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969] (освещение ситуации, какой она представлялась до решения проблемы) и в [89: Mathematical Development Arising from Hilbert. Problems. – Providence (R.I.): American Mathematical Society, 1976], где статья о 10-й проблеме Гильберта, принадлежит основным участникам ее решения М. Девису, Ю. Матиясевичу и Дж.

Различие между неразрешимыми утверждениями и проблемами, для которых нет разрешающей процедуры, довольно тонко, но весьма четко и определенно. Неразрешимые утверждения неразрешимы в конкретной системе аксиом и существуют в любой сколько-нибудь значительной аксиоматической системе. Так, постулат Евклида о параллельных неразрешим в системе остальных аксиом евклидовой геометрии. Другим примером может служить утверждение о том, что вещественные числа образуют наименьшее множество, удовлетворяющее обычно аксиоматизируемым свойствам вещественных чисел.

Нерешенные проблемы могут оказаться неразрешимыми, но далеко не всегда это известно заранее. Например, задача о трисекции угла с помощью циркуля и линейки в течение по крайней мере нескольких столетий ошибочно считалась неразрешимой. Но трисекция оказалась невозможной. Теорема Черча утверждает, что не существует способа, позволяющего заранее определить, можно ли доказать или опровергнуть утверждение. Одни утверждения можно доказать и опровергнуть одновременно, другие нельзя ни доказать, ни опровергнуть – они неразрешимы, но их неразрешимость, как и неразрешимость всех известных неразрешимых проблем, заранее отнюдь не очевидна. Гипотеза Гольдбаха о том, что любое четное число представимо в виде суммы двух простых чисел, пока не доказана. Она может оказаться неразрешимой в системе аксиом арифметики, но ее неразрешимость, конечно, не очевидна. Не исключено, что когда-нибудь гипотезу Гольдбаха удастся доказать или опровергнуть.

Не успели математики оправиться от потрясений, вызванных теоремой Гёделя о неполноте и о невозможности доказать непротиворечивость арифметики, как через десять лет возникла новая серьезная угроза развитию математики. И опять «виной» тому был Гёдель, который явился инициатором серии исследований, которые внесли еще большую неразбериху в вопрос о том, что такое математика, имеющая под собой надежную основу, и в каком направлении она может развиваться. Напомним, что сторонники одного из подходов к основаниям математики, возникшего в начале XX в., намеревались построить математику, исходя из теории множеств (гл. XI); с этой целью была разработана система аксиом Цермело–Френкеля.

В работе «Совместимость аксиомы выбора и обобщенной гипотезы континуума с аксиомами теории множеств» (1940) Гёдель доказал, что если система аксиом Цермело–Френкеля без аксиомы выбора непротиворечива, то добавление аксиомы выбора не нарушает непротиворечивости, т.е. аксиома выбора в рамках этой аксиоматики не может быть доказана. Аналогично он установил, что предположение Кантора – гипотеза континуума о том, что не существует кардинальных чисел, заключенных между $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$ (т.е. кардинальным числом *c*, соответствующим множеству всех вещественных чисел), или, иначе говоря, что не существует несчетного множества действительных чисел с кардинальным числом, меньшим $2^{\aleph_0}$, и обобщенная гипотеза континуума[28] не противоречит системе аксиом Цермело–Френкеля, даже если последнюю дополнить аксиомой выбора. Другими словами, гипотезу континуума как в обычном, так и в обобщенном варианте нельзя опровергнуть. Для доказательства своих утверждений Гёдель построил модели, в которых оба утверждения выполняются.

Непротиворечивость обоих утверждений – аксиомы выбора и гипотезы континуума – несколько обнадежила математиков: обеими теоремами можно было пользоваться по крайней мере с не меньшей уверенностью, чем остальными аксиомами Цермело–Френкеля.

Однако благодушие математиков (если только оно действительно было) быстро развеяли последующие события. Результаты Гёделя не исключали возможности того, что аксиома выбора и гипотеза континуума – порознь или вместе – могут быть доказаны на основе остальных аксиом Цермело–Френкеля. Мысль о том, что по крайней мере аксиому выбора невозможно вывести из остальных аксиом Цермело–Френкеля, была высказана еще в 1922 г. Тогда же и несколько позднее некоторые ученые, в том числе и Френкель, доказали независимость аксиомы выбора, но каждый из них счел необходимым дополнить систему Цермело–Френкеля вспомогательной аксиомой, которая, собственно, и позволила им осуществить доказательство. Примерно такое же

Робинсон. (Видный логик Джулия Робинсон, заложившая первые камни в основание построенного Матиясевичем здания, является сестрой создателя нестандартного анализа Абрахама Робинсона (см. далее), Мартин Девис – автор одного из лучших учебников нестандартного анализа [86: Девис М. *Прикладной нестандартный анализ*. – М.: Мир, 1980].)

[28] Обобщенная гипотеза континуума утверждает, что кардинальное число множества всех подмножеств некоторого множества, обладающего кардинальным числом $\aleph_n$, равно $\aleph_{n+1}$ (т.е. $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$). Кантор доказал, что $2^{\aleph_n} > \aleph_n$.

возражение выдвигалось и против более поздних доказательств. В 1947 г. Гёдель предположил, что гипотеза континуума независима от аксиом Цермело–Френкеля и от аксиомы выбора.

В 1963 г. профессор математики Станфордского университета Пол Коэн (р. 1934) доказал, что и аксиома выбора, и гипотеза континуума независимы от остальных аксиом Цермело–Френкеля, если те непротиворечивы, т.е. иначе говоря, аксиома выбора и гипотеза континуума не могут быть доказаны на основе остальных аксиом Цермело–Френкеля. Более того, гипотеза континуума и тем более обобщенная гипотеза континуума не могут быть доказаны в системе Цермело–Френкеля, даже если ее дополнить аксиомой выбора. (Аксиома выбора следует из системы аксиом Цермело–Френкеля, не содержащей аксиомы выбора, но дополненной обобщенной гипотезой континуума.) Эти два результата по независимости означают, что в системе Цермело–Френкеля аксиома выбора и гипотеза континуума неразрешимы. В частности, для гипотезы континуума результат Коэна означает, что может существовать трансфинитное число, заключенное между $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$ (или c), хотя такое трансфинитное число не соответствует ни одному известному множеству.

В принципе метод Коэна, получивший название метода форсинга, не отличался от других доказательств независимости.[29] Напомним, что для доказательства независимости аксиомы Евклида о параллельных на основе остальных аксиом евклидовой геометрии требуется найти интерпретацию, или модель, которая удовлетворяла бы всем остальным аксиомам, кроме аксиомы о параллельных.[30] Такая модель должна быть непротиворечивой, так как в противном случае она может также удовлетворять аксиоме, независимость которой нас интересует. В своем доказательстве Коэн усовершенствовал более ранние работы Френкеля, Гёделя и других авторов, использовав без каких-либо вспомогательных условий только аксиомы Цермело–Френкеля. Доказательства независимости аксиомы выбора, хотя и менее удовлетворительные, были известны до Коэна, но вопрос о независимости гипотезы континуума до появления его работы оставался открытым.

Приступая к построению математики на основе теории множеств (или даже на логистической или формалистской основе), можно выбрать ту или иную из возможных исходных позиций. Можно запретить себе использовать аксиому выбора и гипотезу континуума. Приняв такое решение, мы ограничим круг теорем, доказываемых в рамках системы. «Основания математики» не включают аксиому выбора в число основных логических принципов, но при доказательстве теорем используют ее, формулируя в явном виде. В современной математике это главное. Можно поступить иначе и включить в число аксиом системы либо аксиому выбора, либо гипотезу континуума, либо оба утверждения вместе. Можно заменить отрицаниями либо одно утверждение, либо другое, либо оба. Отрицая аксиому выбора, можно отказаться от процедуры явного выбора представителей даже для счетной совокупности множеств. Отрицая гипотезу континуума, можно предположить, что $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ или что $2^{\aleph_0} = \aleph_3$. Именно так, по существу, и поступил Коэн при построении своей модели.

Сказанное означает, что существует не одна, а много математик. Теория множеств (рассматриваемая отдельно от остальных оснований математики) может развиваться во многих направлениях (ср. [17*][31]). Кроме того, аксиому выбора можно использовать либо лишь для конечного числа множеств, либо для конечной, или счетной, совокупности множеств, либо для любой совокупности множеств. Все эти возможные варианты были реализованы разными математиками.

---

[29] **Яглом:** Помимо статьи [17*: Cohen P.J., Reuben Hersh. *Non-Cantorian Set Theory*. – Scientific American, Dec. 1967, p. 104–116. [Русский перевод: Коэн П., Херш Р. *Некanторовская теория множеств*. – Природа, 1969, № 4, с. 43–51; в кн.: Математика в современном мире. – М.: Знание, 1969, с. 20–32], рассчитанной на самую широкую аудиторию, можно назвать обстоятельную книгу [90: Коэн П.Дж. *Теория множеств и континуум-гипотеза*. – М.: Мир, 1969] и обзор [91: Манин Ю.И. *Проблема континуума*. – В кн.: *Современные проблемы математики*, т.5. – М.: ВИНИТИ, с. 5–72].

[30] В теории групп аксиома коммутативности умножения не зависит от остальных аксиом группы. Существуют модели группы, удовлетворяющие аксиоме коммутативности (например, обычные положительные и отрицательные числа); другие же модели (скажем, кватернионы) аксиоме коммутативности не удовлетворяют.

[31] Cohen P.J., Reuben Hersh. *Non-Cantorian Set Theory*. – Scientific American, Dec. 1967, p. 104–116. [Русский перевод: Коэн П., Херш Р. *Неканторовская теория множеств*. – Природа, 1969, № 4, с. 43–51; в кн,: Математика в современном мире. – М.: Знание, 1969, с. 20–32.]

С появлением коэновских доказательств независимости математика оказалась в еще более затруднительном положении, чем это было при создании неевклидовой геометрии. Как мы уже говорили (гл. VIII), осознав независимость аксиомы Евклида о параллельных от остальных аксиом евклидовой геометрии, математики сумели построить несколько неевклидовых геометрий. Результаты Коэна поставили математиков перед проблемой выбора: какому из многочисленных вариантов двух аксиом (аксиомы выбора и гипотезы континуума) следует отдать предпочтение перед другими? Даже если ограничиться теоретико-множественным подходом к математике, число возможных вариантов оказывается ошеломляюще большим.

Остановить свой выбор на одном из многих вариантов нелегко, так как в любом случае принятие определенной редакции аксиом имеет свои и положительные, и отрицательные стороны. Отказ от любого использования аксиомы выбора и гипотезы континуума, т.е. как от самих аксиом, так и от их отрицаний, как мы уже отмечали, резко сужает круг утверждений, которые могут быть доказаны в рамках определенной формальной системы, и вынуждает отказаться от многих фундаментальных результатов современной математики. Аксиома выбора необходима даже для доказательства того, что любое бесконечное множество S содержит счетное или несчетное бесконечное собственное подмножество. Теоремы, доказательства которых требуют использования аксиомы выбора, играют важную роль в современном математическом анализе, топологии, абстрактной алгебре, теории трансфинитных чисел и в других областях математики. Отказ от аксиомы выбора связал бы математику по рукам и ногам.

С другой стороны, принятие аксиомы выбора позволяет доказывать теоремы, мягко говоря, противоречащие интуиции. Одна из таких теорем известна под названием парадокса Банаха–Тарского. В нестрогой формулировке эта удивительная теорема звучит следующим образом. Пусть даны два шара – один размером с футбольный мяч, другой – размером с Землю. Оба шара можно разбить на **конечное** число неперекрывающихся частей так, что каждая часть одного шара будет конгруэнтна одной, и только одной, части другого шара. Иначе говоря, теорема Банаха–Тарского означает, что, разрезав земной шар на мелкие кусочки и переложив их в другом порядке, мы можем получить футбольный мяч. Ранее, в 1914 г., был получен еще один парадоксальный результат (составляющий на самом деле частный случай парадокса Банаха–Тарского): было доказано, что, разбив шар на четыре части, мы можем переложить эти части так, что получатся два шара того же радиуса, что и исходный шар. В отличие от парадоксов, с которыми столкнулась в начале XX в. теория множеств, парадокс Банаха–Тарского и его ранее известный частный случай не являются противоречиями. Это логические следствия из аксиом теории множеств и аксиомы выбора.

Отказ от общей аксиомы выбора приводит к странным следствиям. Один узкоспециальный результат, говорящий математикам несравненно больше, чем нематематикам, состоит в том, что каждое линейное множество измеримо. Иными словами, поскольку из аксиомы выбора следует существование неизмеримых множеств, аксиому выбора можно отрицать, предполагая, что каждое линейное множество измеримо. Для трансфинитных кардинальных чисел отрицание аксиомы выбора порождает другие странные следствия. Что же касается гипотезы континуума, то тут совершенно неизвестно, к каким важным следствиям может привести как принятие, так и отрицание аксиомы выбора. Но если предположить, что $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, то каждое множество вещественных чисел становится измеримым. Можно вывести много других новых следствий, но ни одно из них не имеет решающего значения.

Подобно тому как работа над аксиомой о параллельных привела к расчленению единого потока развития геометрии на множество рукавов, доказанная Коэном независимость аксиомы выбора и гипотезы континуума сделала реальной возможность раздробления математики (прежде всего теоретико-множественной, хотя результаты Коэна затронули и другие направления в основаниях математики) на множество различных направлений. Каждое из таких направлений вполне приемлемо, и не существует видимых причин для того, чтобы отдать предпочтение одному направлению перед другим. После выхода в свет работы Коэна (1963) было обнаружено немало новых утверждений, неразрешимых в системе Цермело–Френкеля; поэтому число способов, которыми можно выбирать аксиомы теории множеств, комбинируя аксиоматику Цермело–Френкеля с тем или иным (либо несколькими) неразрешимым утверждением, поистине безгранично. Доказательство независимости аксиомы выбора и гипотезы континуума буквально потрясло математиков: их изумление можно разве лишь сравнить с тем чувством, которое испытал бы современный архитектор, если бы его убедили, что, внеся небольшие изменения в чертежи, по которым он строит учреждение, он может соорудить по ним средневековый рыцарский замок.

Ныне математики, работающие в области теории множеств, надеются, что, модифицировав разумным образом аксиоматику этой части математики, они смогут выяснить, выводимы ли из общепринятого варианта аксиом теории множеств аксиома выбора и гипотеза континуума – каждая в отдельности или обе вместе. По мнению Гёделя, их надежды отнюдь не безосновательны. В этом направлении было предпринято немало усилий, однако пока они не увенчались успехом. Возможно, что когда-нибудь математики всё же придут к единому мнению относительно того, какими аксиомами надлежит здесь пользоваться.

Математический мир был потрясен не только работами Гёделя, Черча и Коэна. Последующие годы умножили заботы математиков. Исследования, начатые в 1915 г. Леопольдом Левенгеймом (1878–1940), а затем усовершенствованные и завершенные Торальфом Сколемом (1887–1963) в серии работ, осуществленных в 1920–1933 гг., выявили новые изъяны в математике. Суть теоремы, получившей название теоремы Левенгейма–Сколема, сводится к следующему. Предположим, что составлена система аксиом (логических и математических) для какой-то области математики или теории множеств, которая рассматривается как основа всей математики. Наиболее подходящим примером, пожалуй, может служить система аксиом для целых чисел. Составляя ее, математики стремились к тому, чтобы эти аксиомы полностью описывали положительные целые числа, и только целые числа, но, к своему удивлению, обнаружили совершенно иные интерпретации, или модели, тем не менее удовлетворяющие всем аксиомам. Например, в то время как множество целых чисел счетно, т.е.– если воспользоваться обозначениями Кантора – существует $\aleph_0$ целых чисел, в других интерпретациях возникают множества, содержащие столько же элементов, сколько их содержит множество всех вещественных чисел, и множества, отвечающие еще большим трансфинитным числам. Происходит и обратное. Так, предположим, что некий математик составил систему аксиом для теории множеств таким образом, что они позволяют описывать и описывали несчетные совокупности множеств. Нередко он обнаруживает счетную (перечислимую) совокупность множеств, удовлетворяющую всем аксиомам, и другие трансфинитные интерпретации, совершенно отличные от тех, которые он имел в виду, составляя свою систему аксиом. Более того, выяснилось, что **каждая** непротиворечивая система аксиом допускает счетную модель.

Что это означает? Предположим, кому-то пришла в голову мысль составить перечень характерных черт, присущих, по его мнению, американцам, и только американцам. К своему удивлению, в действительности он обнаруживает людей, обладающих всеми перечисленными им отличительными особенностями американцев и сверх того наделенных множеством собственных специфических черт. Иначе говоря, система аксиом, составленная для описания одного-единственного класса математических объектов, явно не соответствует своему назначению. Теорема Гёделя о неполноте свидетельствует о том, что любая система аксиом не позволяет доказать (или опровергнуть) все теоремы той области математики, для описания которой данная система аксиом предназначена. Теорема Левенгейма–Сколема утверждает, что любая система аксиом допускает намного больше существенно различных интерпретаций, чем предполагалось при ее создании. Аксиомы не устанавливают пределов для интерпретаций, или моделей. Следовательно, математическую реальность невозможно однозначно включить в аксиоматические системы.[32]

Одна из причин появления «побочных» интерпретаций состоит в том, что в каждой аксиоматической системе имеются неопределяемые понятия. Ранее считалось, что аксиомы неявно «определяют» эти понятия. В действительности же одних аксиом недостаточно. Следовательно, неопределяемые понятия могут трансформироваться каким-то заранее непредсказуемым образом.

Теорема Левенгейма–Сколема не менее удивительна, чем теорема Гёделя о неполноте. Она нанесла еще один удар по аксиоматическому методу, который с начала XX в. и вплоть до

[32] В некоторых более ранних работах «доказывалось», что аксиоматические системы, положенные в основу той или иной области математики, категоричны, т.е. что все интерпретации любой из таких аксиоматических систем изоморфны – совпадают по существу и отличаются лишь терминологией. Но такого рода «доказательства» были нестрогими, поскольку строились на логических принципах, недопустимых в метаматематике Гильберта, и, кроме того, прежде аксиоматические основы не формулировались столь тщательно, как теперь. Ни одна система аксиом, несмотря на «доказательства» Гильберта и других авторов, не является категоричной.

недавнего времени считался единственно разумным подходом и который поныне используется логицистами, формалистами и представителями теоретико-множественного направления.

Теорему Левенгейма–Сколема, однако, нельзя считать полностью неожиданной. Действительно, теорема Гёделя о неполноте утверждает, что каждая аксиоматическая система неполна. Существуют неразрешимые утверждения. Пусть *p* – одно из таких утверждений. Ни *p*, ни его отрицание – утверждение «не *p*» – не вытекает из аксиом. Следовательно, мы могли бы исходить из более широкой системы аксиом, включив в нее либо исходную систему аксиом и *p*, либо исходную систему аксиом и «не *p*». Эти две системы аксиом существенно различны, поскольку их интерпретации не могут быть изоморфными. Иначе говоря, из неполноты следует некатегоричность. Но теорема Левенгейма–Сколема содержит гораздо более сильное и радикальное отрицание категоричности. Она утверждает, что и без введения какой-либо дополнительной аксиомы существуют принципиально различные (неизоморфные) интерпретации, или модели. Разумеется, аксиоматическая система непременно должна быть неполной, ибо в противном случае неизоморфные интерпретации были бы невозможны.

Анализируя собственный результат, Сколем в работе 1923 г. пришел к выводу о непригодности аксиоматического метода в качестве основы для теории множеств. Даже Джон фон Нейман был вынужден признать в 1925 г., что на предложенных им и другими авторами системах аксиом теории множеств лежит «печать нереальности... Категорическая аксиоматизация теории множеств не существует... А поскольку нет ни одной аксиоматической системы для математики, геометрии и т.д., которая не предполагала бы теорию множеств, заведомо не существуют категоричные аксиоматические бесконечные системы». Это обстоятельство, продолжает Нейман, «свидетельствует, как мне кажется, в пользу интуиционизма».

Математики пытались успокоить себя, вспоминая историю с неевклидовой геометрией. Когда после многовековой борьбы с аксиомой параллельности Лобачевский и Бойаи предложили свою неевклидову геометрию, а Риман указал еще одну неевклидову геометрию, математики сначала были склонны отмахнуться от новых геометрий, ссылаясь при этом на ряд причин. Одной из них было бездоказательное утверждение о возможной противоречивости новых геометрий. Однако, как показали найденные впоследствии интерпретации, неевклидовы геометрии оказались непротиворечивыми. Например, удвоенную эллиптическую геометрию Римана, которая по замыслу автора должна была относиться к фигурам на обычной плоскости, удалось интерпретировать как геометрию фигур на поверхности сферы, т.е. она обрела модель, существенно отличную от исходной авторской интерпретации (гл. VIII). Открытие новой модели, или интерпретации, было встречено с энтузиазмом, что вполне понятно: ведь существование такой модели доказало непротиворечивость геометрии. Кроме того, новая модель не приводила ни к каким расхождениям в числе объектов – точек, линий, плоскостей, треугольников и т.д.– по сравнению с исходной авторской интерпретацией. Выражаясь языком математики, обе интерпретации были изоморфны. Теорема Левенгейма–Сколема охватывает неизоморфные, существенно различные интерпретации аксиоматических систем.

Говоря об абстрактности математического мышления, Пуанкаре как-то заметил, что математика – это искусство давать различным вещам одинаковые названия. Так, понятие группы отражает свойства целых чисел и матриц относительно сложения, а также геометрических преобразований и других математических объектов. Теорема Левенгейма–Сколема подтверждает высказывание Пуанкаре, но придает ему обратный смысл. Аксиомы групп отнюдь не предназначены для того, чтобы указывать на необходимость одинакового объема и характера всех мыслимых интерпретаций (поэтому аксиомы групп не являются категоричными, как и аксиомы евклидовой геометрии, если опустить аксиому о параллельных). Аксиоматические системы, к которым применима теорема Левенгейма–Сколема, предназначаются для задания одной вполне конкретной интерпретации, и, будучи применимыми к совершенно различным моделям, они тем самым не соответствуют своему назначению.

Кого боги вздумают погубить, того они прежде всего лишают разума. Возможно, боги сочли, что после работ Гёделя, Коэна, Левенгейма и Сколема математикам еще удалось сохранить остатки разума, – и подстроили новую ловушку, чтобы довести тех до полного безумия. Развивая свой вариант дифференциального и интегрального исчисления, Лейбниц ввел величины, названные им инфинитезимальными или бесконечно малыми (гл. VI). Бесконечно малая, по Лейбницу, отлична от нуля, но меньше 0,1, 0,01, 0,001 и любого другого положительного члена. Лейбниц утверждал также, что с бесконечно малыми величинами надлежит обращаться так же, как с обычными числами. Бесконечно малые величины были идеальными элементами, фикциями, однако приносили вполне ощутимую реальную пользу. Отношение двух бесконечно малых, по Лейбницу, определяло производную – одно из основных понятий математического анализа. И с бесконечно большими величинами Лейбниц обращался так же, как с обычными числами.

На протяжении всего XVIII в. математики вели борьбу с понятием бесконечно малой величины, производили с бесконечно малыми действия по произвольным, ничем не обоснованным и даже противоречащим логике правилам и в конце концов отвергли бесконечно малые величины как лишенные всякого смысла. Коши своими трудами не только наложил запрет на бесконечно малые величины, но и вообще ликвидировал необходимость обращения к ним. Тем не менее поиск законных оснований для использования бесконечно малых исподволь продолжался. На вопрос Гёсты Миттаг-Леффлера (1846–1927), не могут ли кроме рациональных и всех вещественных чисел (и, так сказать, «между» этими двумя классами чисел) существовать числа иного рода, Кантор дал резко отрицательный ответ. В 1887 г. он опубликовал работу, где доказал логическую невозможность существования бесконечно малых, основываясь, по существу, на так называемой аксиоме Архимеда, утверждающей, что для любого вещественного числа a найдется такое целое число n, при котором величина na будет больше любого наперед заданного вещественного числа b. Пеано также опубликовал работу, в которой доказывал, что бесконечно малые величины не существуют. К такому же выводу пришел в своих «Принципах математики» (1903) и Бертран Рассел.

Но даже суждения великих людей не следует принимать с поспешностью. Во времена Аристотеля, да и значительно позже, многие мыслители отвергали представление о шарообразности Земли как лишенное смысла на том основании, что в таком случае наши «антиподы» должны были бы ходить по земле вниз головой. Однако сколь ни «убедительны» были их доводы, Земля, как оказалось, всё же имеет шарообразную форму. Аналогичным образом, несмотря на все доказательства, изгонявшие лейбницевские бесконечно малые из математики, некоторые исследователи упорно пытались создать логическую теорию бесконечно малых.

Поль Дюбуа-Реймон, Отто Штольц и Феликс Клейн были уверены в осуществимости построения непротиворечивой теории на основе понятия бесконечно малой. Более того, Клейи указал, от какой именно аксиомы вещественных чисел (аксиомы Архимеда) необходимо отказаться, чтобы такая теория стала возможной. В 1934 г. Сколем ввел новые числа (получившие название гипервещественных), отличные от обычных вещественных чисел, и установил некоторые их свойства. Кульминацией исследований некоторых математиков в этой области стало создание новой теории, узаконившей бесконечно малые. Наиболее существенный вклад внес в эту теорию Абрахам Робинсон (1918–1974).

Новая система – так называемый нестандартный анализ (ср. элементарную брошюру [85][33] или учебники [76*][34], [86][35] и [87][36]) – вводит гипервещественные числа, включающие в себя обычные («старые») вещественные числа и бесконечно малые. Последние определяются практически так же, как у Лейбница: положительная бесконечно малая есть число, которое меньше любого обычного положительного вещественного числа, но больше нуля[37] (аналогично отрицательная бесконечно малая больше любого отрицательного вещественного числа, но меньше нуля). Бесконечно малые в нестандартном анализе являются фиксированными числами, а не переменными величинами в смысле Лейбница и не переменными величинами, стремящимися

---

[33] Успенский В.А. *Нестандартный, или неархимедов, анализ*. – М.: Знание, 1983.

[34] Robison A, *Non-Standard Analysis*, 2nd ed. – New York: North-Holland, 1974.

[35] Девис М. *Прикладной нестандартный анализ*. – М.: Мир, 1980.

[36] Lutz R., Goze M. *Nonstandard Analysis: A Practical Guide with Applications*. – N.Y.: Springer, 1981.

[37] **Яглом:** Грубо говоря, аксиоматика «гипервещественных» чисел R^* получается из аксиоматики вещественных чисел R («укороченный» вариант последней, включающей все необходимое для построения аналитической геометрии, содержится в книге [92: Дьедонне Ж. *Линейная алгебра и элементарная геометрия*. – М.: Наука, 1972], а более полные ее варианты – во многих учебных пособиях, например, [93: Фесрерман С. Числовые системы. – М.: Наука, 1971] или [94: Берс Л. *Математический анализ*, т. I. – М.: Высшая школа, 1975]) прибавлением «отрицания аксиомы Архимеда», которому можно придать следующую форму: существует такое число ε («бесконечно малое число»), что $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 1/n$ при любом натуральном n. Следствием этой аксиомы и других аксиом, постулирующих свойства действий (сложение, умножение) над числами, являет довольно сложная структура «гипервещественной прямой» R^*; впрочем, для использования бесконечно малых в (поставленных А. Робинсоном на твердую почву) рассуждениях детальное значение структуры R^* вовсе не обязательно.

к нулю, как понимал иногда бесконечно малые величины Коши и как понимают их сегодня в стандартных учебниках «высшей математики». Кроме того, нестандартный анализ вводит новые бесконечные элементы, обратные бесконечно малым, но не являющиеся трансфинитными числами Кантора. Каждое конечное гипервещественное число r представимо в виде $x + \alpha$, где x – обычное вещественное число, а α – бесконечно малая.

Понятие бесконечно малого элемента позволяет говорить о бесконечно близких гипер-вещественных числах. Два гипервещественных числа называются бесконечно близкими, если их разность бесконечно мала. Следовательно, каждое гипервещественное число бесконечно близко некоторому (обычному) вещественному числу, так как разность между ними бесконечно мала. Обращаться с гипервещественными числами можно так же, как с обычными вещественными числами.[38]

Новая система гипервещественных чисел позволяет вводить функции, принимающие обычные вещественные или гипервещественные значения. На языке гипервещественных чисел можно по-новому определить непрерывность функции: функция $f(x)$ непрерывна при $x = a$, если разность $f(x) - f(a)$ бесконечно мала, когда бесконечно мала разность $x - a$. Гипервещественные числа позволяют ввести определения производной и других понятий математического анализа и доказать все теоремы анализа. Но главное состоит в том, что в системе гипервещественных чисел обретает точность и доказательность подход к построению анализа, который ранее отвергался как недостаточно ясный и даже бессмысленный.[39]

В какой мере система гипервещественных чисел способствует увеличению мощи математики? Пока введение гипервещественных чисел не привело к сколько-нибудь значительным новым результатам.[40] Важно другое: нестандартный анализ открыл новый путь, по которому одни математики пойдут охотно (уже появилось несколько книг по нестандартному анализу), тогда как другие по тем или иным причинам его отвергнут. С появлением нестандартного анализа с облегчением вздохнули лишь физики, поскольку они, невзирая на запрет Коши, всегда широко пользовались бесконечно малыми (впрочем, их привычки здесь столь устойчивы, что пока они не уделили особенно большого внимания «новому» анализу).

Развитие оснований математики с начала XX в. протекает поистине драматически, и современное состояние математики по-прежнему весьма плачевно, что вряд ли можно считать нормальным. Свет истины более не освещает путь, по которому следовало бы двигаться. Вместо единой, вызывавшей общее восхищение и одинаково приемлемой для всех математической науки, доказательства которой считались наивысшим достижением здравого смысла, хотя порой и нуждались в коррекции, мы имеем теперь различные, конфликтующие между собой подходы к

---

[38] Доказательства Кантора и Пеано корректны, если использовать обычное аксиоматические свойства вещественных чисел. Единственное свойство, которые необходимо изменить, чтобы гипервещественные числа стали возможными, – это аксиома Архимеда, о которой мы уже неоднократно упоминали. Система гипервеществеиных чисел R^* неархимедова в обычном смысле слова. Но она становится архимедовой, если включить в систему гипервещественных чисел бесконечные кратные гипервещественного числа a^*.

[39] Например, в нестандартном анализе отношение бесконечно малых dy/dx существует в системе R^* и для $y = x^2$ отношение dy/dx равно $2x + dx$, где dx – бесконечно малая, т.е. dy/dx – гипервещественное число. Производная функции $y = x^2$ – это обычная вещественная часть гипервещественного числа dy/dx, т.е. (вещественное) число $2x$. Аналогично определенный интеграл в нестандартном анализе есть сумма бесконечно большого числа бесконечно малых (число слагаемых – гипервещественное натуральное число).

[40] **Яглом:** Сегодня уже существуют задачи, которые удалось решить лишь с использованием нестандартного анализа; правда, видимо, все эти задачи можно было бы решить и традиционными методами, но в таком случае решения были бы, вероятно, значительно более сложными. Вообще, нестандартный анализ надо рассматривать не как новую область математики, а скорее лишь как еще один математический «язык», идущий от Лейбница, но лишь в наши дни ставший равноправным, скажем, с «ε–δ-языком» Коши. При этом язык нестандартного анализа оказывается весьма удобным и естественным в ряде прикладных задач (см., например, [87: Lutz R., Goze M. *Nonstandard Analysis: A Practical Guide with Applications*. – N.Y.: Springer, 1981]; ср. со сказанным в тексте об использовании «бесконечно малых величин» физиками и техниками); ряд преподавателей высшей школы (например, в нашей стране М.М. Постников) высказывает убеждение в педагогических достоинствах этой модификации лейбницевского «исчисления дифференциалов» при изложении основ «высшей математики» начинающим (ср. [95: Keister H.J. *Elementary Calculus*. – Boston: Weber and Schmidt (Prindle), 1976], [96: Sullivan K. *The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis Approach*. – American Mathematical Monthly, 1976, vol. 83, № 5, с. 370–375]).

математике. Несколько взаимоисключающих подходов имеется в рамках одного лишь теоретико-множественного направления, не говоря уже о существовании других самостоятельных направлений: логицизма, интуиционизма и формализма. В этих школах также выделяются различные и даже конфликтующие подходы. Так, конструктивистское направление, возникшее в недрах интуиционизма, разделилось на множество группировок. В рамках формализма принципы математики могут быть выбраны по-разному. Нестандартный анализ, не будучи порождением какой-либо одной школы, допускает различные подходы ко многим проблемам математического анализа, в свою очередь приводящие к различным и даже противоположным точкам зрения. То, что считается алогичным и отвергается одной школой, другая объявляет здравым и вполне приемлемым.

Итак, все попытки исключить возможные противоречия и доказать непротиворечивость математических построений до сих пор не увенчались успехом. Между математиками нет более единого мнения относительно того, принимать аксиоматический подход (и если принимать, то какой системе аксиом отдать предпочтение) или остановиться на неаксиоматическом интуиционистском подходе. Большинство современных математиков склонны рассматривать свою науку как совокупность различных аксиоматически определяемых структур, с одной стороны, позволяющих охватить всё, что должно входить в математику, а с другой – охватывающих больше, чем положено. Современные математики расходятся во мнениях даже относительно того, какие методы рассуждений следует считать допустимыми. Закон исключенного третьего ныне не принадлежит к числу бесспорных принципов логики, и чистые доказательства существования, не дающие готового рецепта вычисления той величины, существование которой доказывается, ставятся под сомнение независимо от того, используется или не используется в них закон исключенного третьего. От претензий на безупречную доказательность своих рассуждений математикам пришлось отказаться. Возможность неоднозначного выбора аксиоматики и подходов привела к возникновению различных математик. Последние исследования в области оснований математики дошли до той черты, за которой открывается лишь первозданный хаос.

Интуиционисты представляли единственное направление в математике, сохранившее самообладание и выдержку в 30-е годы, когда описанные выше результаты сломили логицистов, формалистов и сторонников теоретико-множественного направления. Игра с логическими символами и принципами, захватившая умы гигантов математической науки, для ннтуиционистов была пустой забавой. Непротиворечивость математики очевидна, считали они, ибо ее гарантирует человеческий разум, постигающий истины на интуитивном уровне. Аксиому выбора и гипотезу континуума интуиционисты отвергали как неприемлемые, о чем заявил еще в 1907 г. Брауэр. Неполнота и существование неразрешимых утверждений не беспокоили интуиционистов, ибо они могли с полным основанием сказать представителям других направлений: «А что мы вам говорили?» Но даже интуиционисты неохотно отказывались от разделов математики, возникших еще в XIX в., но не удовлетворявших их требованиям. Интуиционисты считали неприемлемым доказывать существование математических объектов с помощью закона исключенного третьего и объявляли удовлетворительными только такие доказательства, которые позволяли сколь угодно точно вычислять величину, существование которой доказывается. Иначе говоря, интуиционисты боролись за конструктивные доказательства существования.

Итак, ни одна школа не имела права претендовать на то, что она представляет математику в целом. К сожалению, как отметил в 1960 г. Аренд Гейтинг, начиная с 30-х годов дух дружеского сотрудничества между школами уступил место духу непримиримого соперничества.

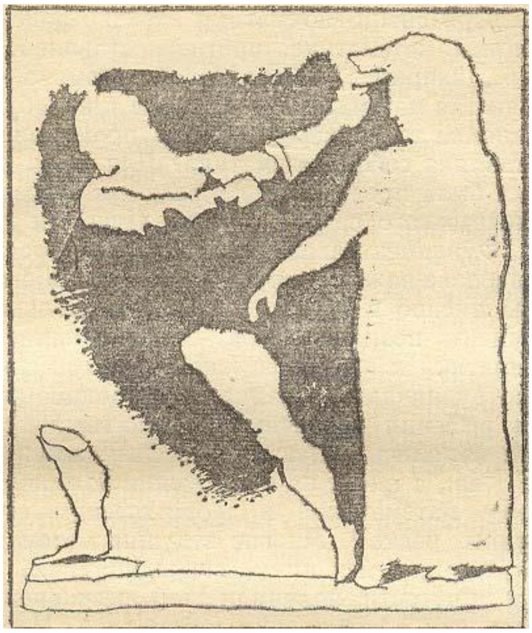
В 1901 г. Бертран Рассел сказал: «Один из величайших триумфов математики состоит в открытии того, что представляет собой математика в действительности». Ныне эти слова поражают нас своей наивностью. Уже сегодня различные школы по-разному воспринимают математику как таковую, и в будущем это различие в подходах, по-видимому, только усилится. Существующие ныне школы каждая по-своему пытались обосновать современную математику. Но если заглянуть в прошлое и вспомнить об античной математике, а также о математике XVII и XIX вв., то происшедшие изменения, разительные и драматические, станут особенно заметными. Представители некоторых современных школ в основаниях математики пытались подвести надежный фундамент под математику начала XX в. Быть может, их результаты послужат математике XXI в.? Интуиционисты воспринимают математику как живой и развивающийся организм. Но предсказывала ли их «интуиция» что-нибудь такое, с чем математикам не приходилось сталкиваться в прошлом? Даже в 30-е годы отрицательный ответ на такой вопрос заведомо не соответствовал бы истине. Следовательно, производимые время от времени пересмотры оснований математики просто необходимы.

Наш рассказ о событиях, развернувшихся в основаниях математики в XX в., мы хотели бы закончить следующей притчей. На берегах Рейна в течение многих веков возвышался прекрасный замок. Пауки, обитавшие в подвалах замка, затянули паутиной все его проходы. Однажды сильный порыв ветра разрушил тончайшие нити паутины, и пауки принялись поспешно восстанавливать образовавшиеся бреши: они считали, что замок держится на их паутине!

XIII. Математика в изоляции

Я решил отказаться от чисто абстрактной геометрии, т.е. от рассмотрения вопросов, служащих лишь для упражнения ума, чтобы заняться изучением геометрии иного рода, предмет которой составляет объяснение явлений природы.

Рене Декарт



История математики знает не только величайшие взлеты, но и глубокие падения. Потеря истины, бесспорно, может считаться подлинной трагедией, ибо истины – драгоценнейшее из достояний человечества, и утрата даже одной из них – более чем основательная причина для огорчения. Осознание того, что сверкающая великолепием витрина человеческого разума далеко не совершенна по своей структуре, страдает множеством недостатков и подвержена чудовищным противоречиям, могущим вскрыться в любой момент, нанесло еще один удар по статусу математики. Но бедствия, обрушившиеся на математику, были вызваны и другими причинами. Тяжелые предчувствия и разногласия между математиками были обусловлены самим ходом развития математики за последние сто лет. Большинство математиков как бы отгородились от внешнего мира, сосредоточив усилия на проблемах, возникавших внутри самой математики, – по существу, они порвали с естествознанием. Это изменение в развитии математики нередко описывают как обращение к чистой математике, противопоставляемой прикладной математике (ср., например, [97][41]). Но оба термина – прикладная математика и чистая математика, – хотя мы также будем ими пользоваться, не вполне точно передают суть происходившего.

Что представляла собой математика? Для предыдущих поколений математика была прежде всего и главным образом тончайшим творением человеческого разума, предназначенным для исследования природы. Фундаментальные понятия, универсальные методы и почти все наиболее важные теоремы математики были разработаны и доказаны именно в процессе усовершенствования математики как инструмента познания мира. Естествознание было кровью и плотью математики и питало ее живительными соками. Математики охотно сотрудничали с физиками, астрономами, химиками и инженерами в решении различных научно-технических проблем, а часто и сами являлись выдающимися физиками и астрономами. В XVII–XVIII вв., а также на протяжении большей части XIX в. различие между математикой и теоретическим естествознанием отмечалось крайне редко.[42] Многие ведущие математики, работая в области астрономии,

---

[41] Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – Киев: Наукова думка, 1976; Механика и прикладная математика (логика и особенности приложений математики). – М.: Наука, 1983.

[42] **Яглом:** Различие между математикой и «теоретическим» естествознанием полностью осознавал Лейбниц. «Универсальная математика, – писал он, – это, так сказать, логика воображения»; предметом ее является «все, что в области воображения поддается точному определению». В XIX в. специфику математики, отличие ее от естественных (и гуманитарных) наук отчетливо понимали, скажем, замечательный немецкий математик Герман Грассман, говоривший, что «чистая математика есть наука особого бытия, поскольку она рождена в мышлении», или один из создателей математической логики англичанин Джордж Буль, еще четче сформулировавший ту же мысль: «Математика изучает операции, рассматриваемые сами по себе, независимо от различных материй, к которым они могут быть приложены». Я. Бойаи

механики, гидродинамики, электромагнетизма и теории упругости, получили здесь несравненно более важные результаты, чем в собственно математике. Математика была царицей и одновременно служанкой естественных наук.

Мы уже рассказывали (гл. I–IV) о нескончаемых усилиях, которые с античных времен предпринимало человечество, чтобы выведать у природы ее «математические тайны». Столь высокая приверженность изучению природы отнюдь не ограничивала прикладную математику решением лишь физических проблем. Великие математики нередко выходили за рамки тех проблем, которые стояли перед естествознанием их времени. А поскольку они действительно были великими и полностью сознавали традиционную роль своей науки, им удавалось наметить направления исследований, которые оказывались немаловажными для теоретического естествознания или проливали свет на понятия, уже применявшиеся для исследования природы. Так, Пуанкаре, многие годы посвятивший астрономии (его перу принадлежит фундаментальный трехтомный труд «Новые методы небесной механики»), считал необходимым разрабатывать те вопросы теории дифференциальных уравнений, которые могли способствовать дальнейшему развитию астрономии.

Некоторые математические работы дополняли или завершали исследования, полезность которых была установлена ранее и ни у кого не вызывала сомнений. Так, совершенно очевидно, что если дифференциальные уравнения одного и того же типа неоднократно встречаются в приложениях, то разумно изучить дифференциальное уравнение общего вида, охватывающее все частные случаи. Это позволяет разработать более удобный или отличающийся большей общностью метод решения, а также получить наибольшее количество сведений о всем классе решений. Одна из отличительных особенностей математики, ее абстрактность, позволяет описывать на математическом языке самые различные физические явления. Так, волны на воде, звуковые и радиоволны математика описывает одним и тем же дифференциальным уравнением, известным под названием волнового уравнения. Те дополнительные сведения, которые математик обнаруживает, исследуя волновое уравнение (впервые выведенное при изучении звуковых волн), могли оказаться (и действительно оказывались) весьма полезными при решении, например, некоторых задач из теории радиоволн. Распознавание за внешне различными явлениями тождественных математических структур позволяет упрочить и понять многообразие теоретических построений, вызванных к жизни проблемами познания реального мира, и установить общую абстрактную основу описания таких явлений.

Доказательство теорем существования решений дифференциальных уравнений, впервые предпринятое Коши, должно было отмести все сомнения в том, что физические проблемы, сформулированные на языке математики, допускают решение, и тем самым вселить уверенность в том, что поиск этих решений будет не напрасным. Так чисто математические работы, посвященные доказательству теорем существования, облекались физической плотью. Стимулом для работ Кантора по теории бесконечных множеств, породивших обширную литературу, было стремление ответить на некоторые вопросы теории бесконечных рядов – так называемых рядов Фурье,[43] которые широко использовались в разного рода приложениях.

Развитие математики приводило к постановке и настоятельному поиску решения проблем, не связанных непосредственно с проблемами естествознания. Так, в XIX в. (гл. VIII) математики поняли, что определения многих понятий страдают расплывчатостью, а в математических рассуждениях и доказательствах немало пробелов. Движение за математическую строгость, принявшее необычайно широкий размах, не ставило целью решение каких бы то ни было естественнонаучных проблем, как не преследовали такой цели и позднее возникшие различные школы, пытавшиеся перестроить основания математики. И всё же гигантская работа по перестройке оснований математики, производимая в интересах самой этой науки, несомненно, явилась откликом на насущные проблемы не только чистой, но и прикладной математики.

(в отличие от Лобачевского или Гаусса) при создании неевклидовой геометрии подходил к ней не как к возможной системе устройства физической Вселенной, а как к чисто логической схеме, «аксиоматизированной структуре», как сказали бы мы сегодня. При этом любопытно отметить, что Лейбниц (в отличие от Ньютона), Грассман, Буль или Я. Бойаи не получили специального математического образования и были полностью свободны от давления сложившихся традиций, что в чем-то, конечно, ограничивало их возможности, но в то же время придавало их мышлению особую свежесть и остроту.

[43] **Яглом:** В применениях математики широко используются *степенные ряды* вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ и *тригонометрические ряды*, или *ряды Фурье* (скажем, $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$).

Многие чисто математические работы дополняют и подкрепляют своими результатами старые, хорошо разработанные области математики или способствуют открытию новых направлений, которые обещают стать важными для различных приложений. Такого рода работы можно рассматривать как прикладную математику в самом широком смысле.

Но разве сто лет назад и ранее, спросит читатель, не было математики, созданной лишь ради нее самой, безотносительно к каким бы то ни было приложениям? Разумеется, была. Великолепным примером чистой математики может служить теория чисел. Хотя пифагорейцы считали, что, изучая целые числа, они постигают сокровенные тайны внутреннего строения материальных объектов (гл. I), впоследствии теория чисел стала совершенно самостоятельной наукой. Одним из первых математиков, изучавших числа «сами по себе», был Ферма. Начало проективной геометрии положили художники эпохи Возрождения, стремившиеся к реализму в живописи, а Жирар Дезарг и Блез Паскаль превратили проективную геометрию в последовательный метод получения новых результатов евклидовой геометрии. Но в XVIII в. работы Дезарга и Паскаля были забыты, а когда в XIX в. математики вновь обратились к проективной геометрии, они занимались ей главным образом из чисто эстетических побуждений, хотя от внимания наиболее проницательных геометров не ускользнули важные связи между проективной и неевклидовой геометриями. Многие проблемы были решены сами по себе только потому, что они заинтересовали кого-то из математиков и тем захотелось испытать свои силы.

Чистая математика, полностью оторванная от запросов естествознания, никогда не находилась в центре забот и интересов математиков. Ей отводилась роль своего рода забавы, отдохновения от гораздо более важных и увлекательных проблем, выдвигаемых естественными науками. Так, создатель теории чисел Ферма большую часть своего времени отдавал разработке аналитической геометрии, решению различных задач математического анализа и оптики (гл. VI). Он попытался заинтересовать теорией чисел Паскаля и Гюйгенса, но потерпел неудачу.[44] В XVIII в. столь абстрактная наука, как теория чисел, привлекала лишь очень немногих математиков.

Эйлер, научные интересы которого были весьма разносторонними, не обошел вниманием и теорию чисел. Однако Эйлер был не только величайшим из математиков XVIII в., но и признанным авторитетом в области математической физики. Его работы поражают необычайной широтой: от глубоких математических методов решения физических проблем, например методов решения дифференциальных уравнений, до астрономии, гидродинамики, рационального конструирования судов и парусов, артиллерии, картографии, теории музыкальных инструментов и оптики.

Теорией чисел занимался и Лагранж, но основное время он уделял математическому анализу – области математики, жизненно важной для приложений (гл. III). Его шедевром по праву считается «Аналитическая механика» (*Mécanique analitique*), посвященная применению математических методов в механике. В 1777 г. Лагранж пожаловался одному из друзей: «Исследования по теории чисел стоят мне наибольших усилий, но, должно быть, имеют наименьшую ценность». Гаусс также посвятил теории чисел одну из своих величавших работ «Арифметические исследования» (*Disquisitiones arithmeticae*, 1801), которая по праву считается классической. Тот, кто прочитал только этот труд Гаусса, мог бы подумать, что автор «Арифметических исследований» – чистый математик. Но главной областью его деятельности была прикладная математика (гл. VI). Феликс Клейн в «Лекциях о развитии математики в XIX в.» [98][45] называет «Арифметические исследования» юношеской работой Гаусса.

Хотя Гаусс в дальнейшем неоднократно возвращался к теории чисел, он явно не считал ее важнейшим разделом математики. Ему нередко предлагали заняться доказательством Великой теоремы Ферма, гласящей, что при $n > 2$ никакие целые числа x, y и z не удовлетворяют соотношению $x^n + y^n = z^n$ [99][46]. Но в письме Вильгельму Ольберсу от 21 марта 1816 г. Гаусс заметил, что гипотеза Ферма – это изолированная, ни с чем не связанная теорема и поэтому не

[44] **Яглом:** В противоположность этому попытки Паскаля заинтересовать Ферма и Гюйгенса теорией вероятностей, в значительной степени созданной этими тремя учеными, оказалась полностью удачными; частично, видимо, это объяснялось тем, что теория вероятностей возникла сразу же как «прикладная» наука (со столь, впрочем, малопочтенной областью применения, как теория азартных игр), а частично, может быть, прозорливой интуицией гениев, «предчувствующих» будущие глубочайшие прикладные возможности создаваемой ими области математической науки.

[45] Клейн Ф. *Лекции о развитии математики в XIX в.* – М.–Л.: Гостехиздат. 1937.

[46] Хинчин А.Я. *Великая теорема Ферма*. – М.–Л.: Гостехиздат, 1932; Постников М.М. *Теорема Ферма*. – М..: Наука, 1978; Эдвардс Г. *Последняя теорема Ферма*. – М.: Мир, 1980.

представляет особого интереса. Имеется немало гипотез, добавил Гаусс, которые пока не удалось ни доказать, ни опровергнуть, но сильная занятость другими делами не оставляет времени для задач того типа, которые рассмотрены в «Арифметических исследованиях». Гаусс надеялся, что гипотезу Ферма удастся доказать на основе другой выполненной им работы, но и тогда теорема Ферма будет одним из наименее интересных следствий из более общих его результатов.

Обычно в подтверждение того, что Гаусс, якобы, отдавал предпочтение чистой математике, приводят его знаменитое высказывание: «Математика – царица всех наук, арифметика – царица математики. Она часто снисходит до оказания услуг астрономии и другим естественным наукам, но при всех обстоятельствах первое место, несомненно, останется за ней». Однако вся научная деятельность Гаусса свидетельствует об обратном, и, возможно, это нехарактерное для Гаусса высказывание, должно быть, вырвалось у него под влиянием минуты. Подлинный же девиз всей его деятельности такой: «Ты, природа, моя богиня, твоим законам я преданно служу». По иронии судьбы именно необычайно тщательный подход Гаусса ко всему, что касалось согласованности математики с природой, привел – через его работы по неевклидовой геометрии – к глубоким и драматическим последствиям, подорвав веру Гаусса в истинность математических законов. В целом же по поводу математики до начала XX в. можно сказать, что хотя чистая математика уже и существовала, не было ни одного чистого математика.

Несколько событий в корне изменили отношение математиков к их собственной науке. Первым в ряду таких событий стало осознание того, что математика не является более сводом незыблемых истин о природе (гл. IV). Гаусс отчетливо показал это на примере геометрии, а появление кватернионов и матриц с их некоммутативным умножением ускорило понимание того, что даже обычная арифметика целых чисел не может рассматриваться как априорное знание – обстоятельство, которое Гельмгольц довел до сведения всего математического мира. Хотя это открытие не поставило под сомнение приложимость математики к описанию реального мира, но всё же оправданием усилий математиков более не могла считаться надежда на отыскание абсолютной истины или единого закона всего сущего.

Столь выдающиеся достижения математической мысли, как неевклидова геометрия и кватернионы, казалось, явно не согласуются с природой, хотя их создатели и исходили из физических соображений.[47] Тем не менее и неевклидова геометрия, и кватернионы, как выяснилось впоследствии, вполне применимы к описанию реального мира. Осознание того, что творения человеческого ума, равно как и все понятия, традиционно считавшиеся внутренне присущими «плану мироздания», весьма пригодны для описания природы, вскоре привело к развитию совершенно нового подхода к математике. Почему это не может случиться с творениями человеческого разума и в будущем? Многие математики пришли к выводу, что заниматься решением проблем, так или иначе связанных с реальным миром, совершенно не обязательно: ведь и математика как свод идей, зародившихся в человеческом разуме, рано или поздно непременно окажется полезной.[48] Более того, чистое мышление, не стесняемое необходимостью следовать за физическими явлениями, обретает большую свободу и соответственно продвигается дальше. Человеческое воображение, не знающее оков, создает более мощные теории, которые способствуют более глубокому пониманию реального мира и овладению природой.

Были и другие причины, побудившие математиков отойти от изучения реального мира. Широкий размах математических и естественнонаучных исследований не позволял ученым чувствовать себя одинаково свободно и в математике, и в естественных науках. Стоящие перед естествознанием проблемы, подобные тем, в решении которых ранее неизменно принимали участие великие математики, ныне становились всё более сложными. Так почему бы, решили математики, не ограничить свою деятельность рамками чистой математики и тем не облегчить себе работу?

Существовала еще одна причина, вынудившая многих математиков обратиться к проблемам чистой математики. Естественнонаучные проблемы редко удается решить окончательно раз и навсегда. Обычно ученые получают всё лучшее приближение, но отнюдь не полное решение задачи. Основные научные проблемы, например проблема трех тел, т.е. описания движения трех

---

[47] **Яглом:** В частности, законы умножения гамильтоновых «кватернионных единиц» i, j и k прояснило идущее от Гамильтона отождествление этих «единиц» с (физическими) вращениями пространства на 90° вокруг трех взаимно перпендикулярных осей: $0x$, $0y$ и $0z$.

[48] **В.Э.:** Да, так они думали, но это неверно.

тел (скажем, Солнца, Земли и Луны), каждое из которых притягивает два других тела, по-прежнему остаются нерешенными. Как заметил Фрэнсис Бэкон, изощренность природы неизмеримо превосходит человеческую мудрость. А чистая математика, напротив, дает нам примеры четко поставленных проблем, допускающих полное решение. Для человеческого разума такие четко поставленные и до конца решаемые проблемы обладают особой привлекательностью в отличие от проблем недосягаемой глубины и неисчерпаемой сложности. Немногие проблемы, устоявшие перед натиском математиков нескольких поколений (например, гипотеза Гольдбаха), формулируются подкупающе просто.

Говоря о мотивах, побуждающих обращаться к проблемам чистой математики, нельзя не упомянуть о давлении, оказываемом на математиков со стороны тех учреждений, где они работают, например университетов, – требовании публиковать результаты своих исследований. Поскольку для решения прикладных проблем необходимы обширные познания по крайней мере в одной из естественных наук и в математике, а нерешенные проблемы по трудности превосходят чисто математические, гораздо легче придумывать свои собственные задачи и решать то, что возможно решить. Профессора не только сами выбирают проблемы, поддающиеся решению, но и предлагают их своим ученикам в качестве тем для диссертаций. При этом профессора во многих случаях действительно могут помочь диссертантам преодолеть любые встречающиеся на их пути трудности.

Назовем несколько направлений, в которых развивается современная чистая математика, – это позволит читателю лучше понять различие между чисто математическими и прикладными проблемами. Одно из таких направлений – абстракция. После того как Гамильтон ввел кватернионы, которые он намеревался применить к решению физических проблем, другие математики поняли возможность существования не одной, а многих алгебр и занялись поиском всех возможных алгебр, не задумываясь над тем, насколько они применимы к описанию реального мира. Это направление математической деятельности процветает и поныне; оно является одним из направлений абстрактной алгебры.

Другое направление чистой математики – обобщение. Конические сечения (эллипс, парабола и гипербола) описываются алгебраическими уравнениями второй степени. В приложениях встречаются также кривые, описываемые уравнениями третьей степени. Обобщение позволяет перепрыгнуть сразу к кривым, описываемым алгебраическими уравнениями n-й степени, и подробно изучить их свойства, хотя такие кривые вряд ли могут помочь нам при описании явлений природы.

Обобщение и абстракция, предпринятые с единственной целью – написать очередную статью для «отчета», как правило, не представляют ценности с точки зрения приложений.[49] Подавляющее большинство работ такого рода посвящено переформулировке на более общем и более абстрактном языке с использованием новой терминологии того, что было известно и раньше, но излагалось на более простом и частном языке. Что же касается приложений математики, то здесь такая переформулировка не дает ни более мощного метода, ни более глубокого понимания. Распространение новомодной терминологии, как правило искусственной и не связанной с какими-либо физическими идеями, хотя и направленной якобы на модернизацию идей, заведомо не способствует более эффективному применению математики, а, наоборот, затрудняет его. Это новый язык, но не новая математика.

Третье направление, избираемое чистой математикой, – специализация. Еще Евклид ставил и решал вопрос о том, существует ли бесконечно много простых чисел. Теперь «естественно» спросить, существует ли простое число среди любых семи последовательных целых чисел. Пифагорейцы ввели понятие дружественных чисел. Два числа называются дружественными, если сумма делителей одного числа равна другому числу. Например, 284 и 220 – дружественные числа. Один из лучших специалистов по теории чисел Леонард Диксон предложил задачу о

[49] **Яглом:** Здесь трудно удержаться от соблазна процитировать одно место из предисловия к книге [100 Полна Г., Сегё Г. *Задачи и теоремы из анализа*, т.1. – М.: Гостехиздат, 1956.] замечательных математиков и педагогов Д. Пойа (Полиа) и Г. Сегё: «Не нужно забывать, что существуют обобщения двух родов: малоценные и полноценные. Первые – обобщения путем разрежения, другие – путем сгущения. Разредить – значит, наболтав воды, изготовить жиденькую похлебку; сгустить – значит составить полезный, питательный экстракт. Соединение понятий, мало связанных друг с другом для обычного представления, в одно объемлющее есть сгущение; так сгущает, например, теория групп рассуждения, которые прежде, будучи рассеянными... выглядели совершенно различными. Привести примеры обобщения путем разрежения было бы еще легче, но мы не хотим наживать себе врагов».

дружественных тройках чисел. «Мы будем говорить, что три числа образуют дружественную тройку, если сумма собственных делителей каждого числа равна сумме двух других чисел», – писал Диксон и поставил задачу об отыскании таких троек. Другой пример подобного рода относится к так называемым степенным числам. Условимся называть натуральное число n степенным, если из того, что n делится на простое число p, следует, что оно делится и на p^2 (другими словами, если в «каноническом» разложении $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ числа n на простые множители все показатели степени $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k \geq 2$). Существуют ли положительные целые числа (отличные от 1 и 4), представимые бесконечно многими способами в виде разности двух взаимно-простых степенных чисел?

Мы выбрали приведенные выше примеры специализации потому, что их нетрудно сформулировать и понять, хотя кажущаяся простота отнюдь не соответствует сложности и глубине таких проблем. Однако специализация распространилась настолько широко, а проблемы настолько сузились, что к большинству современных отраслей математики вполне применимо высказывание, некогда несправедливо адресованное теории относительности: во всем мире вряд ли найдется дюжина людей, понимающих эту теорию.

Распространение специализации приняло столь широкие масштабы, что группа выдающихся французских математиков, выступающих под коллективным псевдонимом Никола Бурбаки, группа, заведомо не занимающаяся прикладной математикой,[50] сочла необходимым выступить с критикой сложившегося положения:

> Многие из математиков устраиваются в каком-нибудь закоулке математической науки, откуда они и не стремятся выйти, и не только почти полностью игнорируют всё то, что не касается предмета их исследований, но не в силах даже понять язык и терминологию своих собратьев, специальность которых далека от них. Нет такого математика, даже среди обладающих самой обширной эрудицией, который бы не чувствовал себя чужеземцем в некоторых областях огромного математического мира; что же касается тех, кто, подобно Пуанкаре или Гильберту, оставляет печать своего гения почти во всех его областях, то они составляют даже среди наиболее великих редчайшее исключение. ([68][51], с. 245; [11*][52].)

---

[50] **Яглом:** Вожди группы Бурбаки охотно декларировали «антиприкладной» характер своего творчества (ср., например, цитируемую ниже статью [115] Ж. Дьедонне), но к этому их тезису, как и к некоторым другим высказываниям, следует относиться с осторожностью. Известно, что один из основателей (и наиболее влиятельных членов) группы Бурбаки Андре Вейль по просьбе знаменитого антрополога и философа Клода Леви-Стросса написал математическое приложение «Математическая теория брачных союзов» к диссертации Леви-Стросса «Элементарные системы родства» (1949). С другой стороны, весьма близкий группе Бурбаки Рене Том является создателем имеющей огромное прикладное значение так называемой теории катастроф (см. [101]) и отличается поразительной широтой внематематических интересов (см., например, [102]). Кроме того, несмотря на неоднократно декларировавшуюся вождями группы Бурбаки антиприкладную направленность их группы, в целом свойственное этой группе стремление рассматривать математику как науку о математических структурах (см. [11*]) идет навстречу определенным устремлениям в современной прикладной математике, выражающимся в росте значения математического моделирования внематематических феноменов (ср. [103]).

115: Дьедонне Ж. *Современное развитие математики*. – Сб. переводов «Математика», 1966, т.10, № 3, с, 3–11. **101:** Thom R. *Stabilité structurelle et morphogenèse*. – N.Y.: Benjamin, 1972; Thorn R. *Die Katastrophen Theorie: Gegenwätiger Standard Aussichten*. – In: Mathematiker über Mathematik (heransgegeben von M. Otte). – Heidelberg: Springer, 1974, S. 124–134; Арнольд В.И. *Теория катастроф*. – М.: изд-во МГУ, 1983; Постои Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее применение*. – М.: Мир, 1980; Гилмер Р. *Прикладная теория катастроф*, тт. 1., 2. – М.: Мир, 1984. **102:** Том Р. *Топология и лингвистика*. – Успехи мат. наук, т. 30, 1975, № l (181), с. 199–221; Thom R. *Topological models in biology*. – Topology, № 8, 1969, p. 313–335. **11*:** Bourbaki N. *The Architecture of Mathematics*. – Amer. Math. Month., 1950, 57, p. 221–232; также в [54], т. I, p. 23–26. [Русский перевод: Бурбаки Н. *Архитектура математики*. – В кн. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963, с. 245–259; в кн.: Математическое просвещение (новая серия), вып. 5. – М.: Физматгиз, 1960, с. 99–112; в кн. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972, с. 4–18.] **103:** Яглом И.М. *Математические структуры и математическое моделирование*. – М.: Советское радио, 1980.

[51] Бурбаки Н. *Очерки по истории математики*. – М.: ИЛ, 1963.

[52] Bourbaki N. *The Architecture of Mathematics*. – Amer. Math. Month., 1950, 57, p. 221–232; также в [54], т. I, p. 23–26. [Русский перевод: Бурбаки Н. *Архитектура математики*. – В кн. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963, с. 245–259; в кн.: Математическое просвещение (новая серия), вып. 5. – М.: Физматгиз, 1960, с. 99–112; в кн. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972, с. 4–18.]

За страсть к специализации математика платит бесплодием. Способствуя виртуозности, специализация редко приводит к значительным результатам.

Абстракция, обобщение и специализация – три направления деятельности, избираемых чистыми математиками. Четвертое направление – аксиоматизация. Развернувшееся в XIX в. движение за аксиоматизацию, несомненно, способствовало укреплению оснований математики, хотя последнее слово в решении проблем, связанных с основаниями математики, осталось не за аксиоматикой. Но вскоре многие математики принялись за тривиальную модификацию только что созданных аксиоматических систем. Одним удавалось показать, что некую аксиому можно сформулировать проще, если воспользоваться другой ее редакцией. Другие показывали, что если пожертвовать простотой формулировки, то три аксиомы можно свести всего лишь к двум аксиомам. Третьи вводили новые неопределяемые термины и, перекроив все аксиомы, приходили к тому же множеству теорем.

Не вся аксиоматизация, как мы уже говорили, была напрасной тратой сил. Но те небольшие модификации, которые удавалось внести в существующие аксиоматические системы, чаще всего не имели особого значения. В то время как решение проблем реального мира требует величайшего напряжения и полной отдачи сил, поскольку возникающие задачи обычно необходимо решить во что бы то ни стало, аксиоматика позволяет различного рода вольности. По существу аксиоматизация есть не что иное, как производимая человеком глубинная организация больших разделов науки; при этом, конечно, не имеет особого значения, какой именно системе аксиом из многих возможных будет отдано предпочтение и сколько аксиом (пять, пятнадцать, двадцать) содержит тот список аксиом, которого мы намерены придерживаться. Недаром поиск многочисленных вариантов систем аксиом, которому посвятили немало времени даже выдающиеся математики, получил название «игры с постулатами».

В первые десятилетия XX в. на аксиоматику тратилось столько времени и труда, что в 1935 г. Герман Вейль, полностью сознавая ценность аксиоматизации, посетовал на оскудение ее плодов и призвал математиков вновь заняться содержательными проблемами. По мнению Вейля, аксиоматика лишь придает содержательной математике точность и организует ее. Аксиоматика выполняет функцию каталогизации или классификации.

Разумеется, далеко не все абстракции, обобщения, специальные проблемы и аксиоматику можно отнести к чистой математике. О ценности такого рода работ и об исследованиях по основаниям математики мы уже говорили. Чтобы ответить на вопрос, с какой математикой – чистой или прикладной – мы имеем дело, необходимо выяснить мотивы исследования. Для чистой математики характерен полный отрыв от каких бы то ни было приложений, непосредственных или потенциальных. Дух чистой математики наиболее полно проявляется в ее непредвзятом отношении к проблемам: любая проблема есть проблема. Некоторые чистые математики ссылаются на то, что любое математическое исследование потенциально полезно, поскольку в будущем вполне может найти применение, которое трудно предвидеть заранее. Тема математического исследования – своего рода участок местности в районе, богатом залежами нефти. Темные лужи на поверхности земли свидетельствуют о целесообразности поискового бурения. Если из скважины пойдет нефть, то участок повышается в цене. После того как нефть на участке обнаружена, бурятся новые скважины в надежде, что и они дадут нефть, если места для бурения выбраны не слишком далеко от первой скважины. Разумеется, можно было бы заложить новую скважину и вдали от первой – там, где бурить легче, – и всё же надеяться, что и из нее забьет фонтан нефти. Но силы и изобретательность человека не беспредельны, поэтому математикам приходится соразмерять затрачиваемые усилия со степенью риска. Как заметил один из создателей термодинамики и статистической физики Джозайя Уиллард Гиббс, чистый математик может делать всё что ему вздумается, но математик-прикладник должен, по крайней мере отчасти, внимать здравому смыслу.

Критику чистой математики – математики ради математики – можно найти в сочинении Фрэнсиса Бэкона «О достоинстве и приумножении наук» (1620). Бэкон возражал против чистой, мистической и самодовольной математики, «полностью абстрагированной от материи и от физических аксиом» ([23][53], т. 1, с. 237), сетуя на то, что «таково уж свойство человеческого ума: не имея достаточно сил для решения важных проблем, он тратит себя на всякие пустяки» ([23], т.1, с. 238). Значение прикладной математики Бэкон понимал следующим образом:

[53] Бэкон Ф. Сочинения в 2-х томах. – М.: Мысль, 1977 (т.1); 1978 (т.2).

> В природе существует много такого, что не может быть ни достаточно глубоко понято, ни достаточно убедительно доказано, ни достаточно умело и надежно использовано па практике без помощи и вмешательства математика. Это можно сказать о перспективе, музыке, астрономии, космографии, архитектуре, сооружении машин и некоторых других областях знания... По мере того как физика день ото дня будет приумножать свои достижения и выводить новые аксиомы, она будет во многих вопросах нуждаться всё в большей помощи математики, и это приведет к созданию еще большего числа областей смешанной математики. ([23], т.1, с. 238.)

Во времена Бэкона математикам не нужно было напоминать о необходимости заниматься решением физических проблем. В наши дни математика отделилась от естествознания. За последние сто лет произошел раскол между теми, кто сохранил верность древним возвышенным мотивам математической деятельности, до сих пор питавшим математику глубокими и плодотворными темами исследований, и теми, кто плывет по воле ветра, изучая всё, что подсказывает ему необузданное воображение. Ныне математика и естественные науки идут разными путями. Новые математические понятия вводятся без всякой попытки найти им приложения. Более того, математики и представители естественных наук перестали понимать друг друга, и нас вряд ли может утешить то, что вследствие чрезмерной специализации даже сами математики уже не понимают друг друга.

Отход от «реальности», занятия математикой ради самой математики с самого начала вызывали бурные споры. В своем классическом труде «Аналитическая теория тепла» (1822) Фурье с энтузиазмом повествует о математическом подходе к решению физических проблем:

> Глубокое изучение природы – наиболее плодотворный источник математических открытий. Такое изучение не только обладает преимуществами хорошо намеченной цели, но и исключает возможность неясной постановки задач и бесполезных выкладок. Оно является надежным средством построения самого анализа и позволяет открывать наиболее значительные идеи, которым суждено навсегда сохраниться в науке. Фундаментальны те идеи, которые отражают явления природы...
>
> Главная отличительная особенность [математического подхода] – его ясность; в нем нет символов, которые выражали бы смутные идеи. Он сводит вместе самые различные явления и обнаруживает объединяющие их скрытые аналогии. Даже если материя ускользает от нас, подобно воздуху и свету, по причине своей крайней тонкости, даже если мы хотим понять, как выглядят небеса на протяжении последовательных периодов, разделяемых многими столетиями, даже если сила тяжести и тепло действуют внутри земного шара на глубинах, которые навсегда останутся недоступными, математический анализ позволяет постичь законы всех этих явлений. Он делает их как бы видимыми и измеримыми и, должно быть, является способностью человеческого разума, призванной возместить кратковременность жизни и несовершенство наших чувств. Но еще более замечательно, что при изучении всех явлений математический анализ следует одному и тому же методу: он переводит все эти явления на один и тот же язык, как бы подчеркивая единство и простоту структуры окружающего нас мира и делая еще более заметным незыблемый порядок, правящий в природе всей материей.[54]

Карлу Густаву Якобу Якоби принадлежат первоклассные результаты в области механики и астрономии. Тем не менее он счел необходимым выступить против высказанного Фурье мнения с критическими замечаниями, которые, однако, в лучшем случае можно назвать односторонними. В письме Адриену Мари Лежандру от 2 июля 1834 г. Якоби писал:

> Фурье усматривает главное назначение математики в общественной пользе и объяснении явлений природы, но такому ученому, как он, следовало бы знать, что единственная цель науки состоит в прославлении человеческого разума, поэтому любая задача теории чисел заслуживает ничуть не меньшего внимания, чем любой вопрос о нашей планетной системе.

Разумеется, специалисты по математической физике не разделяли взглядов Якоби. Лорд Кельвин (Уильям Томсон, 1824–1907) и Питер Гутри Тэйт (1831–1901) провозгласили в 1867 г., что лучшая математика – та, которую подсказывают приложения. Именно приложения приводят к «наиболее удивительным теоремам чистой математики, редко выпадающим на долю тех математиков, которые ограничивают себя рамками чистого анализа и геометрии, вместо того чтобы обращаться к богатой и прекрасной области математической истины, лежащей в русле физических исследований».

[54] **Яглом:** Поразительна близость этой позиции Фурье к воззрениям пифагорейцев (гл. I).

Многие математики также с осуждением относились к тяге своих коллег к чистой математике. Так, в 1888 г. Кронекер писал Гельмгольцу, внесшему значительный вклад в развитие математики, физики и медицины: «Ваш богатый практический опыт работы с разумными и интересными проблемами укажет математикам новое направление и придаст им новый импульс... Односторонние и интроспективные математические умозаключения приводят к областям, от которых нельзя ожидать сколько-нибудь ценных плодов».

В 1895 г. Феликс Клейн, бывший в то время признанным главой математического мира, также счел необходимым выразить протест против тяги к абстрактной, чистой математике:

> Трудно отделаться от ощущения, что быстрое развитие современной мысли таит для нашей науки опасность всё более усиливающейся изоляции. Тесная взаимосвязь между математикой и теоретическим естествознанием, существовавшая к вящей выгоде для обеих сторон, с возникновением современного анализа грозит прерваться.

К этой же теме Клейн возвращается в «Математической теории волчка» (1897):

> В математической науке назрела насущная необходимость восстановить тесную взаимосвязь между чистой наукой и теми разделами естественных наук, где математика находит наиболее важные приложения, ту взаимосвязь, которая столь плодотворно проявила себя в трудах Лагранжа и Гаусса.

Пуанкаре в «Науке и методе», несмотря на язвительные замечания по поводу некоторых чисто логических построений математиков конца XIX в. (гл. VIII), признает полезность математических исследований о постулатах, о воображаемых геометриях, о функциях со странным ходом. Чем более эти размышления уклоняются от наиболее общепринятых представлений, а следовательно, и от природы и прикладных вопросов, тем яснее они «показывают нам, на что способен человеческий ум, когда он постепенно освобождается от тирании внешнего мира, тем лучше мы познаем ум в его внутренней сущности». Но всё же «главные силы нашей армии приходится направлять в сторону противоположную, в сторону изучения природы» ([1][55], с. 302). В «Ценности науки» Пуанкаре писал:

> Нужно было бы окончательно забыть историю науки, чтобы не помнить, что стремление познать природу имело самое постоянное и самое счастливое влияние на развитие математики... Если бы чистый математик забыл о существовании внешнего мира, то он уподобился бы художнику, который умеет гармонически сочетать краски, и формы, но у которого нет моделей. Его творческая сила скоро иссякла бы. ([1], с, 223.)

Несколько позже, в 1908 г., ту же тему подхватил Феликс Клейн. Его беспокоило, как бы математики не стали злоупотреблять чрезмерной свободой в создании произвольных математических структур. Произвольные структуры, предостерегал Клейн, – «смерть всякой науки». Аксиомы геометрии «не произвольные, а вполне разумные утверждения, как правило опирающиеся на наше восприятие пространства. Точное содержание геометрических аксиом определяется их целесообразностью». Занимаясь обоснованием аксиом неевклидовой геометрии, Клейн подчеркивал, что аксиома Евклида о параллельных, как того требуют наглядные представления, выполняется лишь с точностью, не превышающей определенные пределы. По другому случаю Клейн заметил, что «тот, кто пользуется привилегией свободы, должен нести и бремя ответственности». Под ответственностью Клейн понимал служение интересам познания природы.

К концу жизни Клейн, возглавлявший математический факультет Гёттингенского университета и созданный при нем институт математики – в то время признанный центр математического мира, – счел необходимым еще раз выразить свой протест против чрезмерного увлечения чистой математикой. В книге «Лекции о развитии математики в XIX в.» (1925) он напомнил об интересе, который Фурье питал к решению практических задач самыми лучшими из существовавших в начале XIX в. математических методов, и противопоставил прикладную направленность интересов основателей математической физики чисто математической утонченности методов и абстрактности идей математики XX в. Далее в «Лекциях» говорится следующее:

[55] Пуанкаре А. *О науке*. – М.: Наука, 1983.

Если мне позволено будет пояснить свою мысль примером, я сказал бы, что математика в наши дни напоминает крупное оружейное производство в мирное время. Витрина заполнена образцами, которые своим остроумием, искусным и пленяющим глаз выполнением восхищают знатока. Собственно происхождение и назначение этих вещей, их способность стрелять и поражать врага отходят в сознании людей на задний план и даже совершенно забываются. ([98][56], с. 104.)

Рихард Курант, сменивший Клейна на посту главы Гёттингенского математического института, а позднее возглавивший Курантовский институт математических наук при Нью-Йоркском университете, также неодобрительно относился к увлечению чистой математикой. Так, предисловие к первому изданию «Методов математической физики» Куранта и Гильберта (1924) Курант начал следующими словами:

Испокон века математика черпала мощные импульсы из тесных взаимоотношений, существующих между проблемами и методами анализа и наглядными представлениями физики. Лишь последние десятилетия принесли с собой ослабление этой связи, математическое исследование стало часто отрываться от своих наглядных истоков и (особенно в анализе) занялось слишком исключительно уточнением своих методов и уточнением своих понятий. Это привело к тому, что у многих представителей анализа исчезло сознание взаимной связи их науки с физикой и другими дисциплинами, а физики, с другой стороны, часто утрачивали понимание проблем и методов математики и даже ее языка и всей сферы ее интересов. Без сомнения, в этой тенденции таится угроза для науки вообще; потоку научного развития грозит опасность всё большего разветвления, оскудения и высыхания. Чтобы избежать этой участи, необходимо значительную часть наших усилий направить к тому, чтобы вновь соединить разделенное, выясняя внутренние связи разнородных фактов и объединяющих точек зрения. Только таким путем изучающему открывается возможность действительного овладения предметом, а исследователю подготовляется почва для органического дальнейшего развития. ([104][57], с. X.)

В 1939 г. Курант писал:

Серьезная угроза самой жизни науки проистекает из утверждения о том, будто математика представляет собой не что иное, как систему заключений, выводимых из определений и постулатов, которые должны быть непротиворечивыми, а в остальном произвольными порождениями свободной воли математиков. Если бы подобное описание соответствовало действительности, то в глазах любого сколько-нибудь разумного человека математика не обладала бы никакой привлекательностью. Она была бы ничем не мотивированной бесцельной игрой с определениями, правилами и силлогизмами. Представление о том, будто разум по своему произволу может создавать осмысленные аксиоматические системы, – полуправда, способная лишь вводить неискушенных людей в заблуждение. Только сдерживаемый дисциплиной ответственности перед органическим целым свободный разум, руководствуясь внутренней необходимостью, может создавать результаты, имеющие научную ценность.

Аналогичное мнение выразил в 1943 г. на страницах журнала *American Scientist* ведущий американский математик того времени Джордж Дэвид Биркгоф (1884–1944):

Я надеюсь, что в будущем всё больше физиков-теоретиков будут обретать глубокие познания математических принципов, а математики не станут ограничиваться чисто эстетическим развитием математических абстракций.

Ситуацию, сложившуюся к 1944 г., Джон Л. Синдж, признанный специалист по математической физике, описал (в духе Бернарда Шоу) в пространном предисловии к одной весьма специальной статье, доступной пониманию лишь профессиональных математиков:

Большинство математиков имеют дело с идеями, которые, по всеобщему мнению, принято относить к математике. Математики образуют замкнутую гильдию. Всякий вступающий в нее дает обет оставить всё мирское и обычно сдерживает свою клятву. Лишь немногие математики странствуют «на чужбине» в поисках математического пропитания в проблемах, заимствованных непосредственно из других областей науки. В 1744 или в 1844 г. такими странниками было подавляющее большинство математиков. В 1944 г. они составляют столь небольшую часть математиков, что

[56] Клейн Ф. *Лекции о развитии математики в XIX в.* – М.–Л.: Гостехиздат. 1937.

[57] Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики*, т.1. – М.–Л.: Гостехиздат, 1933.

большинству необходимо напоминать о существовании меньшинства и объяснять точку зрения тех, кто его составляет.

Представители меньшинства не желают, чтобы их называли «физиками» или «инженерами», ибо они следуют математической традиции, существующей более двадцати веков и связанной с именами Евклида, Архимеда, Ньютона, Лагранжа, Гамильтона, Гаусса, Пуанкаре. Меньшинство отнюдь не желает умалять работу большинства, но опасается, что если математика будет питаться только собственными соками, то со временем движущие ею стимулы исчерпают себя.

Помимо влияния на будущее собственно математики изоляция математиков лишила остальные науки поддержки, на которую в прежние времена они неизменно рассчитывали... Изучение природы породило (и, по-видимому, продолжает порождать) несравненно более трудные проблемы, чем те, которые математики придумали, находясь в кругу своих собственных идей. Ученые, занимавшиеся изучением естественных наук, полагались на математиков в надежде, что те обратят свою энергию на решение этих трудных проблем. Ученым-естественникам известно, что математики искусно используют готовые средства, но этим их не удивишь – ученые и сами владеют готовыми средствами едва ли не с меньшим искусством. В математиках их привлекают некие особые черты – присущие математикам логическая изощренность и умение видеть общее в частном и частное в общем...

При всем том математики выступают в роли направляющей и дисциплинирующей силы. Именно математики дали естествознанию методы вычислений: логарифмы, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения и т.д. Но этим вклад математиков в естествознание далеко не исчерпывается. Математики наделили естествознание общим планом, неотступно следили за логичностью естественнонаучного мышления. По мере возникновения каждой новой науки математики подводили (или по крайней мере пытались подводить) под нее надежное логическое основание – подобное тому, что Евклид подвел под египетское землемерие. В руки математиков попадал необработанный камень с множеством посторонних вкраплений. Из рук математиков выходил великолепно ограненный и отполированный бриллиант.

Здание современной науки гудит от кипучей деятельности, какой наука не знала в прежние времена. Нет никаких видимых признаков упадка. И только самые наблюдательные смогли заметить, что часовой покинул свой пост. Он не отправился на покой – работает, как всегда, не покладая рук, но работает только для себя...

Итак, окончен бал. Сколько радости было, пока он длился!.. Природа по-прежнему продолжает подкидывать глубокие проблемы, но они уже не доходят до математиков. В ожидании противника они сидят в своей башне из слоновой кости, вооруженные до зубов, но противник так и не появляется. Природа не ставит перед математиками четко сформулированных проблем. Добыть ясно поставленную задачу можно, лишь вооружившись киркой и лопатой, и тот, кто боится испачкать руки, никогда ни одной сколько-нибудь стоящей задачи не найдет.

Изменения и смерть в мире идей столь же неизбежны, как и в делах человеческих, и любящему истину математику не пристало делать вид, будто их нет, когда в действительности они имеют место. Невозможно искусственно стимулировать глубокие источники интеллектуальной деятельности. Что-то либо захватывает наше воображение, либо не затрагивает его, и в последнем случае никакими усилиями не удастся раздуть пламя. Если математики действительно утратили издавна присущую им особенность и видят перст божий не в движении звезд, а в доведении до пределов мыслимого совершенства и без того точной логики, то все попытки вернуть их в старое убежище обречены на провал, не говоря уже о том, что такие попытки означали бы по существу отрицание права человека на свободу разума. Но каждый начинающий математик, формулирующий свою собственную философию (а этот этап наступает в жизни каждого математика), должен принимать решение, располагая всей полнотой фактов. Он должен понимать, что, следуя тенденциям современной математики, становится наследником великой традиции, но наследует не всё ее состояние. Часть наследства перешло в другие руки и навсегда потеряна для него...

Наша наука началась с математики и, несомненно, недолго протянет после того, как из нее изымут математику (если такое изъятие вообще возможно). В нашем столетии множится число лабораторий для массового производства фактов. Останутся ли добываемые факты просто фактами или обратятся в науку, зависит от того, в какой степени они войдут в соприкосновение с духом математики.

Джон фон Нейман был обеспокоен судьбами математики настолько, что счел нужным предостеречь своих коллег. Свою позицию он изложил в очерке «Математик» (1947), часто цитируемом, но всё же не привлекшем должного внимания:

На достаточно большом удалении от своего эмпирического источника и тем более во втором и в третьем поколении, когда математическая дисциплина лишь косвенно черпает вдохновение из идей, идущих от «реальности», над ней нависает смертельная опасность. Ее развитие всё более и более определяется чисто эстетическими соображениями; она всё более и более становится

> искусством для искусства. Само по себе это неплохо, если она взаимодействует с примыкающими математическими дисциплинами, обладающими более тесными эмпирическими связями, или если данная математическая дисциплина находится под влиянием людей с исключительно развитым вкусом. Но существует серьезная угроза, что математическая дисциплина будет развиваться по линии наименьшего сопротивления, что вдали от источника поток разветвится на множество ручейков и дисциплина превратится в хаотическое нагромождение деталей и сложностей. Иначе говоря, при большом отделении от эмпирического источника или после основательного абстрактного «инбридинга» математической дисциплине грозит опасность вырождения. При зарождении новой математической дисциплины ей обычно свойствен классический стиль. Когда же она начинает обретать черты барокко, то это сигнал опасности...
>
> Во всяком случае, когда достигается стадия барокко, единственное спасительное средство я вижу в том, чтобы снова вернуться к источнику, произвести омолаживающую инъекцию идей более или менее прямого эмпирического происхождения. Я убежден, что такая эмпирическая «подпитка» была необходимым условием сохранения неувядаемой молодости и жизнеспособности математики в прошлом и что аналогичное утверждение остается в силе и в будущем. ([105][58], с. 95.)

Однако тенденция к превращению математики в своего рода искусство для искусства не была приостановлена. Математики продолжали всё дальше отходить от естествознания и следовать своим собственным курсом. Чистые математики имеют обыкновение посматривать сверху вниз, как на презренных ремесленников, на тех, кто занимается прикладной математикой, видимо, стараясь заглушить таким образом муки совести. Трубный глас техники, жалуются они, заглушает сладкие звуки чистой математики. В то же время чистые математики чувствуют, что необходимо дать ответ на критику, подобную той, которую мы воспроизвели выше. Однако, давая такой ответ, они – возможно, по незнанию, а может быть, и умышленно искажая историю – утверждают, что многие из величайших достижений прошлого обязаны своим появлением чисто математическим интересам и тем не менее впоследствии нашли себе применение. Но присмотримся внимательнее к тем примерам, которые чистые математики заимствуют из истории. Так ли чиста та математика, которую они называют чистой?

Чаще всего в качестве подходящего примера чистые математики ссылаются на греческие работы о конических сечениях: параболе, эллипсе и гиперболе. По мнению чистых математиков, эти кривые были исследованы греками, в первую очередь Аполлонием, ради удовлетворения чисто математического интереса. Тем не менее восемнадцать столетий спустя Кеплер доказал, что именно по коническим сечениям движутся вокруг Солнца планеты. Однако хотя ранняя история конических сечений доподлинно и неизвестна, но всё же по свидетельству такого авторитетного историка, как Отто Нейгебауэр (р. 1899), параболы, эллипсы и гиперболы впервые возникли в работах, посвященных конструкции солнечных часов. Известно, что древние действительно использовали в солнечных часах эти кривые. Задолго до того, как Аполлоний посвятил коническим сечениям свой классический труд (гл. I), было известно, что параболы позволяют фокусировать падающий на них солнечный свет. Следовательно, физические приложения конических сечений в оптике – области науки, которой греки уделяли немало внимания, – несомненно, послужили толчком к некоторым из исследований по геометрии конических сечений.

Коническими сечениями греки занимались задолго до Аполлония в связи с решением знаменитой задачи об удвоении куба – построении ребра куба вдвое большего объема, чем данный куб. Для греческой геометрии, в которой единственный способ доказать существование того или иного объекта сводился к его построению, такого рода задачи имели первостепенное значение.

Разумеется, Аполлоний доказал сотни теорем о конических сечениях, не имеющих не только непосредственных приложений, но даже потенциально неприменимых. В этом отношении он мало чем отличался от современных математиков, которые, напав на благодатную тему, начинают разрабатывать ее либо по причинам, о которых говорилось выше, – из желания побольше узнать о чем-то важном либо из стремления ответить, так сказать, на интеллектуальный вызов.

Второй, наиболее часто приводимый пример чистой математики, впоследствии нашедшей, однако, немаловажные приложения, – неевклидова геометрия. По словам тех, кто ссылается на этот пример, получается, будто математики создали неевклидову геометрию, размышляя на досуге над тем, что произойдет, если изменить евклидову аксиому о параллельных. Но утверж-

[58] Нейман фон Дж. Математик. – Природа, 1983, № 2, 88–95.

дать подобное – значит игнорировать более чем двухтысячелетнюю историю науки. Аксиомы Евклида считались самоочевидными истинами о реальном физическом пространстве (гл. I). Аксиома о параллельных, весьма произвольно и своеобразно сформулированная Евклидом, стремившимся избежать исходного предположения о существовании параллельной, по сравнению с остальными аксиомами была куда как менее очевидной. Многие усилия, затраченные на поиск более приемлемого варианта аксиомы, привели в конце концов к открытию: аксиома о параллельных не обязательно должна быть истинной – другая аксиома о параллельных, отличающаяся от евклидовой (и, следовательно, неевклидова геометрия), может так же хорошо описывать физическое пространство. Итак, подчеркнем главное: попытки доказать истинность аксиомы Евклида о параллельных предпринимались не для «услаждения мозгов, поднаторевшия в умозрительных рассуждениях», а для того, чтобы удостовериться в **истинности** геометрии, лежащей в основе тысяч и тысяч теорем чистой и прикладной математики.

Чистые математики нередко ссылаются также на работы Римана, который обобщил известную в его время неевклидову геометрию и указал, на существование целого семейства неевклидовых геометрий, получивших впоследствии название римановых геометрий (или геометрий римановых пространств). И в этом случае чистые математики полагают, будто Риман создал свои геометрии лишь с той целью, чтобы «посмотреть, что можно сделать». Думающие так глубоко заблуждаются. Как мы уже говорили, усилия математиков, направленные на устранение малейших сомнений в адекватности евклидовой геометрии окружающему нас миру, увенчались созданием неевклидовой геометрии, оказавшейся столь же пригодной для описания свойств физического пространства, как и евклидова геометрия. Существование двух различных геометрий заставило математиков задуматься над вопросом о том, что, собственно, нам достоверно известно о физическом пространстве? Этот вопрос послужил для Римана отправным пунктом для размышлений. Отвечая на него, Риман в своей лекции [106][59] 1854 г., которая была опубликована лишь после его смерти, развил общую теорию, включающую классическую геометрию Евклида и неевклидову геометрию Лобачевского–Бойаи в качестве частных случаев. Вследствие ограниченности наших физических знаний римановы геометрии могли оказаться столь же полезными для описания физического пространства, как и евклидова геометрия. Риман предвидел, что пространство и материю нужно рассматривать в неразрывной связи.[60] Следует ли удивляться после этого, что Эйнштейн счел риманову геометрию полезной? Предвидение Римана относительно физичности предложенной им геометрии отнюдь не умаляет остроумного применения, которое нашел римановой геометрии Эйнштейн. Применимость римановой геометрии явилась следствием работы над решением наиболее фундаментальной из физических проблем, которыми когда-либо занимались математики, – выяснением природы физического пространства.

Нельзя не упомянуть еще об одном примере. Одно из интенсивно развивающихся направлений современной математики – теория групп. По мнению чистых математиков, теория групп также была создана «из любви к искусству». Понятие группы ввел в математику Эварист Галуа (1811–1832), хотя неявно оно встречалось в работах Лагранжа, норвежца Абеля и итальянца Паоло Руффини (1765–1822). Внимание Галуа привлекла по существу самая простая и практически важная задача всей математики – разрешимость простых алгебраических уравнений, таких, как квадратное уравнение

$$3x^2 + 5x + 7 = 0,$$

кубическое уравнение

$$4x^3 + 6x^2 - 5x + 0 = 0$$

и уравнения более высоких степеней. Уравнения такого типа встречаются в тысячах физических задач. К тому времени, когда эта задача привлекла внимание Галуа, математики научились решать в радикалах общие алгебраические уравнения от первой до четвертой степени (т.е. выражать корни таких уравнений через их коэффициенты с помощью конечного числа алгебраических операции), а Нильс Хенрик Абель (1802–1829) доказал неразрешимость в радикалах общего алгебраического уравнения пятой степени

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0,$$

---

[59] Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании математики. В кн.: Сочинения. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948, с. 279–293; 500–526 или в кн.: Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956, с. 309–341.

[60] **Яглом:** В последней части «Применение к пространству» замечательной лекции [106] Риман сам подробно обсуждает приложимость к (будущей) физике предложенных им геометрических схем.

где *a*, *b*, *c*, *d*, *e* и *f* – любые вещественные (или комплексные) числа, а также и уравнений более высоких степеней. Галуа задался целью выяснить, почему общие уравнения пятой и выше степени неразрешимы в радикалах и почему частные уравнения сколь угодно высокой степени могут оказаться разрешимыми. Решая эту задачу, Галуа создал теорию групп. Нужно ли удивляться, что понятие, возникшее из решения столь фундаментальной проблемы, как решение алгебраических уравнений, оказалось применимым ко многим другим математическим и физическим задачам? Можно с уверенностью сказать, что теория групп не была «придумана», а родилась на прочной и вполне реальной физико-математической основе.

Кроме того, теория групп была вызвана к жизни не только работами Галуа. Возможно, от внимания чистых математиков ускользнула работа французского кристаллографа Огюста Браве (1811–1863) по структуре кристаллов типа кварца, алмаза и горного хрусталя. Эти вещества состоят из различных атомов, расположенных по определенной схеме, многократно повторяющейся в объеме кристалла. Атомы в кристаллах таких веществ, как поваренная соль и обычные минералы, расположены особым образом. В простейшем случае (поваренной соли) можно считать, что соседние атомы расположены в вершинах куба. С 1848 г. Браве занялся изучением преобразований (поворотов кристалла вокруг какой-либо оси), трансляций (параллельных переносов, или сдвигов) или отражений, переводящих кристалл в себя. Такие преобразования образуют различные группы. Камил Жордан (1833–1922), обративший внимание на работу Браве, дополнил и обобщил ее в своей работе 1868 г. и в своем труде «Трактат о подстановках» (*Traité des substitutiones*, 1870), сыгравшем существенную роль в распространении понятия группы в среде математиков, использовал заимствованные из кристаллографии соображения наряду с другими аргументами, подтверждающими важность изучения теории групп.

Работа Браве навела Жордана на мысль об изучении бесконечных групп – групп вращений и параллельных переносов. Бесконечные (непрерывные) группы обрели известность после знаменитой лекции [107][61] Феликса Клейна, прочитанной в Эрлангенском университете в 1872 г. и тогда же опубликованной, где он предложил различать все известные в то время геометрии по допускаемым ими группами «движений» и по инвариантам этих «движений». Так, евклидова геометрия занимается изучением тех свойств фигур, которые остаются инвариантными при поворотах, параллельных переносах и преобразованиях подобия (см., например, [108][62]), Занимавшую в 1872 г. умы математиков проблему, чем отличаются известные и столь непохожие друг на друга геометрии и какая из них соответствует физическому пространству, вряд ли можно отнести к чистой математике. Немало работ по применению дискретных и непрерывных групп к классификации методов решений дифференциальных уравнений[63] вошло в математику, прежде чем в 90-х годах XIX в. было сформулировано современное понятие группы.[64]

К аналогичному выводу приводит изучение и всех других понятий и теорий, якобы являющихся продуктом чистой математики: матриц тензорного исчисления, топологии. Например, вся современная алгебра обязана своим происхождением кватернионам Гамильтона (гл. IV). Мотивы создания абстрактной алгебры прямо или косвенно были связаны с физическими соображениями, и ее творцы неусыпно заботились о приложениях, которые могут иметь вводимые ими понятия.

---

[61] Клейн Ф. *Сравнительное обозрение новейших геометрических учений* (Эрлангенская программа). – В кн.: Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956, с. 399–434.

[62] Яглом И.М. *Геометрические преобразования* I–II. – М.: Гостехиздат, 1955–1956; Введения к чч. 1, 2 и 3; Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. – М.: Наука, 1969, §1.

[63] **Яглом:** Классификация дифференциальных уравнений по свойственным им группам симметрии была произведена великим норвежским математиком Софусом Ли (1842–1899), который построил своеобразную «теорию Галуа для дифференциальных уравнений», где вопрос о решимости алгебраического уравнения в радикалах заменялся вопросом о решимости дифференциального уравнения «в квадратурах» (т.е. с применением операции интегрирования). В свое время эта теория пользовалась очень большой популярностью, но затем, в связи с наступлением века ЭВМ, поставившего совсем по-другому вопрос о решении дифференциальных уравнений, была почти забыта. Взрывоподобный рост интереса к учению Ли о «группах симметрии дифференциальных уравнений», выразившийся, в частности, в появлении большого числа посвященных этой теме книг (см., например, [109: Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. – М.: Наука, 1978.]) и диссертаций, относится к последним десятилетиям; это связано с той большой ролью, которую играют соображения симметрии в современной физике.

[64] Артур Кэли дал общее (абстрактное) определение группы еще в работах 1849–1854 гг. [у Э. Галуа фигурировали только группы подстановок.– *Ред.*], но значение этого понятия было оценено по достоинству лишь после того, как оно стало широко применяться в математике и естественных науках (о некоторых применениях мы упоминали выше).

Следовательно, история неоспоримо свидетельствует, что любая математическая дисциплина, намеренно создаваемая как область чистой математики и лишь впоследствии нашедшая различные применения, как правило, возникала при исследовании реальных физических проблем или проблем, имеющих непосредственное отношение к изучению природы. Часто случается, что «хорошая математика», создание которой первоначально было стимулировано потребностями физики, находит новые приложения, которых не предвидели творцы теории. Так математика возвращает свой долг естествознанию. Новых, непредвиденных приложений следует ожидать заранее. Не удивляемся же мы, что молотком, который был изобретен для того, чтобы крушить горные породы, можно также и забивать гвозди. Неожиданные естественнонаучные приложения математики возникают по той простой причине, что математические теории с самого начала имеют физическую подоплеку, а отнюдь не обязаны своим происхождением пророческому прозрению всеведущих математиков, сражающихся разве лишь в собственным духом. Неизменный успех абстрактных математических теорий отнюдь не случаен.

Рассказывают, что один из выдающихся английских математиков – Годфри Гарольд Харди (1877–1947) – однажды провозгласил тост: «За чистую математику! Да не найдет она никаких приложений!»[65]. Леонард Юджин Диксон (1874–1954), пользовавшийся непререкаемым авторитетом в Чикагском университете, говаривал: «Слава богу, теория чисел не запятнана никакими приложениями».

В статье о математике, написанной во время второй мировой войны (1940), Харди утверждал:

> Считаю своим долгом заявить с самого начала, что под математикой я понимаю настоящую математику, математику Ферма и Эйлера, Гаусса и Абеля, а не то, что выдают за математику в инженерной лаборатории. Я имею в виду не только «чистую» математику (хотя именно она интересует меня в первую очередь) – Максвелла и Эйнштейна, Эддингтона и Дирака я также причисляю к «чистым» математикам.

Прочитав эти строки, повторенные в книге Харди «Апология математика», можно было бы подумать, что он, по крайней мере частично, приемлет прикладную математику. Но далее у Харди говорится следующее:

> В понятие чистой математики я включаю всю совокупность математических знаний, обладающих непреходящей эстетической ценностью, какой обладает, например, греческая математика, которая вечна потому, что лучшая ее часть, подобно лучшим произведениям литературы, и через тысячи лет продолжает приносить тысячам людей эмоциональное удовлетворение.

Харди и Диксон могут покоиться с миром, ибо история подтвердила правильность их высказываний. Их чистая математика, как и всякая математика, созданная ради самой себя, почти заведомо не найдет никаких приложений.[66] Тем не менее полностью исключить всякую

---

[65] **Яглом:** Характерно даже название, которое дал Харди своему учебнику [110: Харди Г.Х. *Курс чистой математики*. – М.: ИЛ, 1949.] (классического) математического анализа. [Заметим, что, вероятно, не меньше 90% всех упоминаний имени воинственного адепта «чистой» математики Харди в современной научной, научно-популярной и учебной литературе связано не с его на самом деле выдающимися достижениями в теории чисел, а с единственным «грехом» – с выполненной в молодости несложной работой прикладного характера (так называемый закон Харди–Вейнберга популяционной генетики – см., например, [111: Ли Ч. Введение в популящюнную генетику. – М.: Мир, 1978.]).]

[66] **Яглом:** Этот тезис можно и оспаривать: так, например, в *теории кодирования*, имеющей огромное прикладное значение в условиях современной недостаточности пропускной способности большинства линий связи, большую роль играет *абстрактная алгебра* (в частности, так называемые *конечные поля Галуа*), *конечные геометрии* (геометрии в плоскостях или пространствах, содержащих всего конечное число точек) и прочие разделы «абстрактной» математики, созданные вне всякой связи с возможными их приложениями (ср., например, [112: Бэрликэмп Э. *Алгебраическая теория кодирования*. – М.: Мир, 1971; Касами Т. и др. *Теория кодирования*. – М.: Мир, 1978; Питерсон У., Уэлдон Э. *Коды, исправляющие ошибки*. – М.: Мир, 1976; Мак Вильямс Ф., Слоэн Н. Дж. *Теория кодов, исправляющих ошибки*. – М.: Связь, 1979.] или статью [113: Livinson N. *Coding theory: a counter-example to G.H. Hardy's conception of applied mathematics*. – American Math. Monthly, v. 77, 1970, № 3, p. 249–258.]). Также и такие области математики, как *топология* или *алгебраическая геометрия*, (не говоря уже о *функциональном анализе*), совсем еще недавно считавшиеся чисто абстрактными, в последнее время стали активно изучаться (и применяться) физиками (см., например, [114: Минеев В.П. *Топологические объекты в нематических жидких кристаллах*.

применимость чистой математики «по Харди и Диксону» мы не можем. Ребенок, наугад наносящий мазки краски на холст, может создать шедевр, соперничающий с картинами Микеланджело (скорее с произведениями современного искусства!), а обезьяна, нажимающая как попало клавиши пишущей машинки, может, как заметил Артур Эддингтон, создать пьесу, сравнимую по своим художественным достоинствам с пьесами Шекспира. Когда работают тысячи чистых математиков, вряд ли можно поручиться, что хотя бы один из полученных результатов случайно не окажется полезным для каких-либо приложений. Тот, кто ищет на улице золотые монеты, может найти мелкие медные монетки. Но интеллектуальные усилия, не соотнесенные с реальностью, почти заведомо оказываются бесплодными. Как заметил Джордж Биркгоф, «по-видимому, новые математические открытия, совершаемые по подсказке физики, всегда будут наиболее важными, ибо природа проложила путь и установила каноны, которым должна следовать математика, являющаяся языком природы». Но природа не сообщает свои секреты громогласно, а шепчет еле слышно – и математик должен чутко прислушиваться, усиливать слабый голос природы и доносить услышанное до всеобщего сведения.

Несмотря на убедительные свидетельства истории, некоторые математики продолжают утверждать, что чистая математика в будущем непременно найдет приложения и что независимость математики от естественных наук якобы расширяет ее перспективы. Этот тезис недавно (1961) был повторен профессором Гарвардского, Йельского и Чикагского университетов Маршаллом Стоуном. В статье «Революция в математике» Стоун, воздав должное значению математики для естественных наук, далее говорит:

> Хотя в нашей концепции математики и в наших взглядах на нее по сравнению с началом XX в. произошло несколько важных изменений, лишь одно из них вызвало подлинный переворот в наших представлениях о математике – открытие полной независимости математики от физического мира... Математика, как мы сейчас понимаем, не имеет ни одной обязательной связи с физическим миром, помимо той смутной и несколько загадочной, что неявно содержится в утверждении о том, что процесс мышления происходит в мозгу. Без преувеличения можно сказать, что открытие независимости математики от внешнего мира знаменует собой одно из самых значительных интеллектуальных достижений в истории математики...
>
> Сравнивая современную математику с той, какой она была в конце XIX в., нельзя не удивляться, как быстро выросла паша математика и количественно, и качественно. Вместе с тем нельзя не отметить, как быстро она развивалась, как всё больше места в ней отводилось абстракции и всё больше внимания уделялось введению и анализу емких математических структур. Как показывает более внимательное рассмотрение, именно новая ориентация математики, ставшая возможной лишь благодаря ее отходу от приложений, и была подлинным источником необычайной жизнеспособности и роста математики за последнее столетие...
>
> Современный математик предпочитает определять предмет своей науки как изучение общих абстрактных схем, каждая из которых представляет собой здание, построенное из вполне определенных абстрактных элементов, скрепленных произвольными, но однозначно определенными соотношениями... По мнению математика, ни сами системы, ни предоставляемые логикой средства для изучения их структурных свойств не имеют прямой или необходимой связи с физическим миром... Лишь в той степени, в какой математика освободилась от уз, связывающих ее в прошлом с теми или иными конкретными аспектами реальности, она может стать гибким и мощным инструментом, столь необходимым для вторжения в области, лежащие за пределами известного. Уже сейчас можно было бы привести многочисленные примеры, подтверждающие сказанное...

Далее Стоун приводит в качестве примеров генетику, теорию игр и математическую теорию связи. В действительности же эти примеры вряд ли могут служить подтверждением его тезиса. Все названные им науки возникли в результате применения классической математики, стоявшей на прочном физическом основании.[67]

Приложение к кн.: Болтянский В.Г., Ефремович В.А. *Наглядная топология*. – М.: Наука, 1982, с. 148–158; Воловик Г.Е., Минеев В.П. *Физика и топология*. – М.: Знание, 1980.]; ср. [103: Яглом И.М. *Математические структуры и математическое моделирование*. – М.: Советское радио, 1980.]).

[67] **Яглом:** Стоун, видимо, имел в виду совершенно новые разделы математической науки (математическую теорию связи, или *теорию информации*; *теорию кодирования*, *теорию игр*), возникшие сравнительно недавно в связи с их применениями, а далее развивавшиеся как чисто абстрактные области знания, бурный прогресс которых, безусловно, стимулировался возможностями немедленного использования полученных в этих направлениях результатов (осуществляющегося, однако, чаще всего, не математиками, а техниками, экономистами или биологами).

С резкими возражениями против отстаиваемого Стоуном тезиса выступил в 1962 г. Курант[68]:

> В статье [Стоуна] утверждается, что мы живем в эпоху великих успехов математики, превосходящих всё когда-либо достигнутое в прошлом со времен античности. Причину триумфа «современной математики» автор статьи усматривает в одном фундаментальном принципе: абстракции и сознательном отрыве математики от физического и прочего содержания. По его мнению, математический ум, освобожденный от балласта, может воспарить до высот, откуда можно прекрасно наблюдать и исследовать лежащую глубоко внизу реальность.
>
> Я отнюдь не склонен извращать или приуменьшать высказывания или педагогические выводы знаменитого автора. Но как призывный клич, как попытка указать направление, в котором должны развиваться исследования, и прежде всего образование, статья Стоуна в действительности представляет собой сигнал опасности и зов о помощи. Опасность преисполненного энтузиазмом абстракционизма усугубляется тем, что абстракционизм не отстаивает бессмыслицы, а выдвигает полуистииу. Разумеется, совершенно недопустимо, чтобы односторонние полуистины мирно сосуществовали с жизненно важными аспектами сбалансированной полной истины.
>
> Никто не станет отрицать, что абстракция является действенным инструментом математического мышления. Математические идеи нуждаются в непрестанной «доводке», придающей им всё более абстрактный характер, о аксиоматизации и кристаллизации. Правда, существенного упрощения в понимании структурных связей и зависимостей удается достичь лишь после выхода на более высокое плато. Верно и то, что, как неоднократно подчеркивалось, основные трудности в математике исчезают, если отказаться от метафизических предрассудков и перестать рассматривать математические понятия как описания некой реальности.
>
> Я отнюдь не отрицаю, что наша наука питается живительными соками, идущими от корней. Эти корни, бесконечно ветвясь, глубоко уходят в то, что можно назвать «реальностью» – будет ли это механика, физика, биологическая форма, экономическая структура, геодезия или (в данном контексте) другая математическая теория, лежащая в рамках известного. Абстракция и обобщение для математики имеют не более важное значение, чем индивидуальность явлений, и прежде всего индуктивная интуиция. Только взаимодействие этих сил и их синтез способны поддерживать в математике жизнь, не давая нашей науке иссохнуть и превратиться в скелет. Мы должны решительно пресекать всякие попытки придать одностороннее направление развитию, сдвинуть его к одному полюсу антиномии бытия.
>
> Нам ни в коем случае не следует принимать старую кощунственную чушь о том, будто математика существует к «вящей славе человеческого разума». Мы не должны допускать раскола и разделения математики на «чистую» и «прикладную». Математика должна сохраниться и еще более укрепиться как единая живая струя в бескрайнем потоке науки. Нельзя допустить, чтобы она превратилась в ручеек, уходящий в сторону от основного потока и теряющийся в песках.
>
> Центробежные силы внутренне присущи математике и всё же непрестанно угрожают ее существованию. Фанатики изоляционистского абстракционизма представляют для математики реальную опасность. Но не меньшую опасность представляют консервативные реакционеры, не умеющие проводить различия между пустыми претензиями и подлинным вдохновением.

Не отрицая ценности абстракции, Курант утверждал в 1964 г., что математика должна черпать побудительные мотивы из вполне конкретных проблем и должна быть нацелена на некий слой реальности. Если математике необходимо воспарить в абстракцию, то полет в горные выси должен быть не просто бегством от реальности – неоценимое значение имеет возвращение на землю, даже если один и тот же пилот не в состоянии взять на себя управление полетом от начала и до конца.

Математику часто сравнивают с деревом, корни которого прочно и глубоко вросли в плодородную естественную почву. Ствол дерева – число и геометрическая фигура. От ствола отходит множество ветвей, символизирующих различные понятия и разделы математики, которые возникли в ходе ее развития. Одни ветви прочны и питают множество молодых побегов, другие дали несколько чахлых отростков, не увеличивающих особо ни размеры, ни прочность всего дерева. Есть на дереве и засохшие, мертвые ветви. Но самое важное, пожалуй, то, что дерево математики уходит своими корнями в надежную земную твердь, а через ствол и ветви с реальностью связаны и все математические теории. Предпринятые в последнее время попытки полностью удалить почву, оставив в неприкосновенности дерево, корни, ствол и всю пышную крону, не могли увенчаться успехом. Многие ветви смогут расцвести лишь после того, как корни еще глубже проникнут в плодородную землю. От черенков, привитых на новые ветви, но не

[68] SIAM [Society for Industrial and Applied Mathematics] Review, October 1962, pp. 297–320.

подпитываемых живительными соками реальности, рождались вялые побеги, которым так и не суждено было обрести жизнь. При тщательном уходе таким побегам можно придать видимость живых: они также отходят от ствола и переплетаются с зелеными ветвями, но всё же они мертвы, и их можно отсечь, не нанеся ни малейшего ущерба всему живому.

Другие аргументы, казалось бы, подкрепляют утверждение Стоуна о том, что возможность свободно заниматься чистой математикой благоприятно скажется на укреплении всей математики и будет способствовать возникновению новых подходов к прикладной математике. Но тот, кто занимается чистой математикой, сколь бы изощрен ни был его разум и сколь бы громкое имя он ни носил, затрачивает на это значительную часть своих сил и, следовательно, может с меньшей эффективностью применять математические построения к практическим ситуациям. Отдавая свое время и энергию абстрактной математике, он неизбежно проникается ее атмосферой, и у него остается меньше времени для того, чтобы узнать о потребностях прикладной математики и разработать средства, отвечающие ее нуждам. Прикладные математики могут с пользой для себя осведомляться о достижениях чистых математиков, однако чрезмерное внимание к чистой математике приводит к пагубному для судеб математики распылению ресурсов. Невнимание к приложениям чревато изоляцией и, возможно, атрофией всей математики в целом.

Как показала история, Стоун заведомо заблуждался. В своем очерке «Математик» (1947) фон Нейман отметил:

> Не подлежит сомнению, что определенная часть движущих идей в математике (причем именно в тех ее разделах, к которым как нельзя лучше применимо название «чистая математика») берет свое начало в естественных науках... На мой взгляд, наиболее характерная отличительная черта математики состоит в ее особом отношении к естественным наукам и вообще к любой науке, интерпретирующей факты на уровне более высоком, чем чисто описательный. ([105][69], с. 88–89.)

Выдающийся французский математик Лоран Шварц, не колеблясь, заявил, что наиболее бурно развивающиеся области современной математики – абстрактная алгебра и алгебраическая топология – не имеют приложений.[70] Некоторые работы облекают конкретные темы в терминологию и понятия, характерные для этих областей, но подобный камуфляж не способствует решению прикладных проблем.

Однако сторонники чистой, абстрактной математики не думают сдаваться. Один из ведущих англистов нашего времени профессор Жан Дьедонне в 1964 г. отверг, как ошибочное, утверждение о том, что если математике предоставить вариться в собственном соку, то она погибнет от истощения:

> Напоследок я хотел бы подчеркнуть, сколь мало новейшая история оправдывает благочестивые пошлости прорицателей краха, регулярно предупреждающих нас о гибельных последствиях, которые математика неминуемо навлечет на себя, если откажется от применений к другим наукам. Я не собираюсь утверждать, что тесный контакт с иными областями, такими, как теоретическая физика, невыгоден для обеих сторон. Однако совершенно ясно, что из всех поразительных достижений, о которых я рассказывал, ни одно, за возможным исключением теории распределений, ни в малейшей степени не пригодно для физических применений. Даже в теории уравнений с

[69] Нейман фон Дж. *Математик*. – Природа, 1983, № 2, 88–95.

[70] **Яглом:** Этот тезис можно и оспаривать: так, например, в *теории кодирования*, имеющей огромное прикладное значение в условиях современной недостаточности пропускной способности большинства линий связи, большую роль играет *абстрактная алгебра* (в частности, так называемые *конечные поля Галуа*), *конечные геометрии* (геометрии в плоскостях или пространствах, содержащих всего конечное число точек) и прочие разделы «абстрактной» математики, созданные вне всякой связи с возможными их приложениями (ср., например, [112: Бэрликэмп Э. *Алгебраическая теория кодирования*. – М.: Мир, 1971; Касами Т. и др. *Теория кодирования*. – М.: Мир, 1978; Питерсон У., Уэлдон Э. *Коды, исправляющие ошибки*. – М.: Мир, 1976; Мак Вильямс Ф., Слоэн Н. Дж. *Теория кодов, исправляющих ошибки*. – М.: Связь, 1979.] или статью [113: Livinson N. *Coding theory: a counter-example to G.H. Hardy's conception of applied mathematics*. – American Math. Monthly, v. 77, 1970, № 3, p. 249–258.]). Также и такие области математики, как *топология* или *алгебраическая геометрия*, (не говоря уже о *функциональном анализе*), совсем еще недавно считавшиеся чисто абстрактными, в последнее время стали активно изучаться (и применяться) физиками (см., например, [114: Минеев В.П. *Топологические объекты в нематических жидких кристаллах*. Приложение к кн.: Болтянский В.Г., Ефремович В.А. *Наглядная топология*. – М.: Наука, 1982, с. 148–158; Воловик Г.Е., Минеев В.П. *Физика и топология*. – М.: Знание, 1980.]; ср. [103: Яглом И.М. *Математические структуры и математическое моделирование*. – М.: Советское радио, 1980.]).

частными производными сейчас упор больше делается на «внутренние» и структурные проблемы, чем на вопросы, имеющие прямое физическое значение. Даже если бы математика насильно была отрезана от всех прочих каналов человеческой деятельности, в ней достало бы на столетия пищи для размышлений над большими проблемами, которые мы должны еще решить в нашей собственной науке. ([115][71], с. 11.)

Хотя Дьедонне отчетливо представлял себе нескончаемую вереницу проблем чистой математики, он – надо отдать ему должное – не обошел молчанием тезис о том, что всякое творение чистой математики в конечном счете находит применение. Приведя внушительный перечень исследований по чистой математике, и в частности по теории чисел, Дьедонне заметил: «Трудно представить, что подобные результаты окажутся применимыми к какой-нибудь физической проблеме». Выступая в защиту чистой математики в целом, Дьедонне вместе с тем не мог не заметить, что хвастливые заявления математиков о ценности чистой математики для естественных наук представляют собой своего рода «мелкое жульничество». По словам Дьедонне, чистые математики не пожалеют сил, чтобы доказать единственность решения какой-нибудь проблемы, но не ударят палец о палец, чтобы попытаться найти это решение. Физик же знает, что решение существует и единственно (Земля не обращается вокруг Солнца по двум различным орбитам), но ему необходимо знать истинную орбиту.

Более реалистических взглядов на значимость той математики, которой следовало бы заниматься, придерживался человек, который по своим заслугам в области чистой математики не уступал Дьедонне, – швед Ларе Гординг. Свои взгляды он изложил в докладе на Международном конгрессе математиков в 1958 г.:

Я не могу здесь вдаваться во многие важные части интересующего нас предмета, например в теорию разностных уравнений, теорию систем, приложения к квантовой механике и дифференциальной геометрии. Мой предмет – общая теория дифференциальных операторов с частными производными. Он вырос из классической физики, но не имеет сколько-нибудь существенных применений к ней. Тем не менее физика по-прежнему остается для него основным источником интересных проблем. У меня сложилось убеждение, что общие доклады, подобные тому, с которым я сейчас выступаю, менее полезны, чем периодические обзоры нерешенных физических проблем, требующих новых математических методов. Такие обзоры вряд ли сообщали что-либо новое специалистам, но могли бы указать многим математикам задачи, заслуживающие внимания. Усилия, направленные на более тесное взаимодействие между физикой и математикой, редко планировались заранее. Но именно они должны стать главной заботой международных математических конгрессов.

Тех, кто гордится созданием математики, не опороченной связью с физическим миром, а под давлением начинает утверждать, что в один прекрасный день другие найдут применение их ныне бесцельным работам, можно было бы оставить в покое. Но их действия противоречат всему ходу истории. Их уверенность в том, что математика, освобожденная от связей с естественными науками, принесет более весомые, разнообразные и плодотворные результаты, применимые к более широкому кругу явлений, чем старая, традиционная математика, не подкрепляется ничем, кроме их же собственного голословного утверждения.

Сторонники чистой математики могут выдвигать (и действительно выдвигают) и другие аргументы в защиту ценности своей работы, ссылаясь на внутреннюю красоту таких исследований и интеллектуальный вызов, который они бросают ученому. В существовании подобных ценностей вряд ли кто-нибудь сомневается. Но позволительно усомниться в том, что они могут служить достаточным основанием для огромного количества работ по чистой математике. Какого бы мнения мы ни придерживались, ясно одно: эти ценности не вносят никакого вклада в то, что придает математике наибольшую значимость, – в изучение природы. Красота и интеллектуальный вызов – атрибуты математики ради математики. Но эти проблемы, безусловно, заслуживают особого разговора, который выходит далеко за рамки нашего рассказа об изоляции математики.

Защитники и критики чистой математики по вполне понятным причинам находятся в довольно натянутых отношениях друг с другом. Все споры между ними тотчас рождают юмористические или саркастические замечания. Прикладные математики, язвят приверженцы чистой математики, не заботятся о строгих доказательствах – единственно, что их интересует, это

[71] Дьедонне Ж. *Современное развитие математики*. – Сб. переводов «Математика», 1966, т.10, № 3, с, 3–11.

соответствие полученных ими результатов физическим явлениям. Типичным представителем прикладной математики был один из основоположников современной «теоретической электротехники» англичанин Оливер Хевисайд (1856–1925). Применяемые им методы решений, с точки зрения чистых математиков, были сомнительны в силу полной своей необоснованности, за что Хевисайда не раз резко критиковали. В свою очередь Хевисайд относился к своим критикам, которых он называл «логическими контролерами», с высокомерным пренебрежением. «Логике нетрудно быть терпеливой, ведь она вечна», – говорил он. Ему доводилось не раз приводить чистых математиков в замешательство. В те времена, когда так называемые расходящиеся ряды считались полностью «незаконными», Хевисайд заявил по поводу одного из таких рядов: «Подумаешь, ряд расходится! Ведь можем же мы что-нибудь с ним сделать!» Впоследствии все «экстравагантные» методы Хевисайда были строго обоснованы и даже породили новые направления математических исследований. Дабы уязвить пуристов, прикладные математики имеют обыкновение утверждать, что чистые математики способны лишь находить трудности в любом решении, тогда как прикладные математики могут разрешить любую трудность. Популярно также высказывание, что чистые математики решают «то, что можно, так как нужно», а прикладные – «то, что нужно, так как можно».

Прикладные математики любят поддразнивать пуристов и по-другому. Математикам, работающим в приложениях, приходится решать те задачи, которые ставит природа, тогда как чистые математики сами придумывают себе задачи. Поэтому прикладные математики и говорят, что чистые математики ведут себя подобно человеку, который ищет потерянный на темной улице ключ под фонарем только потому, что там светлее.

А чтобы еще больше унизить своих извечных противников, прикладные математики рассказывают и такую историю. У одного человека скопилось грязное белье, и он отправился на поиски прачечной. Увидев вывеску «Прием белья в стирку», он заходит в помещение и кладет узел с бельем на прилавок. Владелец заведения, глядя на посетителя с некоторым удивлением, спрашивает: «Что вам угодно?» «Я хочу отдать белье в стирку», – говорит посетитель. «Но мы не принимаем белье в стирку», – отвечает хозяин заведения. На этот раз удивляется посетитель. «А для чего же эта вывеска в витрине?» – спрашивает он. «Не обращайте на нее внимания, – отвечает хозяин, – мы ее сделали просто так».

Спор между прикладными и чистыми математиками продолжается, а поскольку в современной математике тон задают чистые математики, они могут позволить себе смотреть сверху вниз на своих «заблудших собратьев» и даже выговаривать им. Как заметил профессор Клиффорд Э. Трусделл, ««прикладная математика» – это оскорбление, наносимое теми, кто считает себя «чистыми» математиками, тем, кого они считают нечистыми... но «чистая» математика – самоубийственное отрицание своего происхождения от воспринимаемых человеком ощущений или тайный пароль, позволяющий «чистых» отличать от «нечистых», – не более чем болезнь, изобретенная в прошлом веке...». Она стала самоцелью, и никому из чистых математиков не приходит в голову задуматься над тем, для чего нужна их наука. Само по себе такое положение не слишком завидно. Цель математики – открывать нечто достойное познания. Ныне же одно математическое исследование порождает другое, то в свою очередь порождает третье и т.д. В храме математики никто более не осмеливается спрашивать что-либо о цели и смысле. Математика утратила связь с реальностью. Стены башни из слоновой кости стали настолько толстыми, что находящиеся внутри ее исследователи перестали видеть то, что происходит снаружи. Попавшие в башню умы оказались в изоляции.

Математики могут расходиться во мнениях, но физикам и представителям других наук не остается ничего другого, как оплакивать то горестное положение, в котором они оказались. Вот что говорит, например, профессор Массачусетского технологического института Джон Кларк Слэтер:

> Физик получает очень мало помощи от математика. На каждого математика, способного понять прикладные проблемы, как фон Нейман, и внести реальный вклад в их решение, приходится двадцать математиков, не проявляющих к прикладным проблемам ни малейшего интереса, работающих либо в областях, далеких от физики, либо уделяющих основное внимание более старым и знакомым разделам математической физики. Неудивительно, что при взгляде на математиков физик испытывает такое чувство, будто они сошли с пути, который в прошлом привел к величию математики, и вряд ли ступят на него до тех пор, пока решительно не сойдут в основной поток развития математической физики, потому что именно ей мы обязаны наиболее плодотворными

достижениями математики в прошлом... Это единственный путь, способный привести современного математика к величию.

Забвение интересов физики было избрано темой большой лекции [116][72], с которой в 1972 г. выступил перед математиками известный американский физик Фримеи Джон Дайсои. И прежде, и теперь, отметил Дайсон, математикам неоднократно предоставлялась возможность внести свой вклад в решение физических проблем первостепенной важности, но математики неизменно упускали свой шанс. Некоторые из этих проблем, полностью или частично, каким-то образом всё же проникли в математику, но математикам не известно ни их происхождение, ни физическая значимость. Математики следуют в произвольном направлении и не пытаются даже осмысливать собственные достижения. По словам Дайсона, брак между математикой и физикой закончился разводом.

В XX в. разрыв между математикой и физикой ускорился. В наше время нередко приходится слышать и читать заявления математиков о том, что их наука не зависит от естественных наук. Математики теперь, не колеблясь, открыто признают, что их интересы сосредоточены на чистой математике, а физика им безразлична. Хотя точная статистика неизвестна, но можно полагать, что основная часть работающих сегодня математиков не сведущи в физике и спокойно пребывают в этом благословенном состоянии. Несмотря на опыт истории и на критику, тенденция к абстракции, к обобщению ради обобщения и к изучению произвольно выбранных проблем сохраняется в математике и поныне. Разумная потребность в изучении целого класса проблем с целью более глубокого понимания частных случаев и в абстракции с целью выявления сущности проблемы стала не более чем предлогом для обобщений ради обобщений и абстракций ради абстракций.

За много веков человек создал такие великие построения, как евклидова геометрия, птолемеева система мира, гелиоцентрическая система мира, механика Ньютона, теория электромагнитного поля, а позднее – теория относительности и квантовая теория. Математика, как известно, является неотъемлемой частью всех этих и многих других важных и мощных теорий, их основой и их сущностью. Математические теории позволили нам многое узнать о природе и охватить в понятных теоретических схемах множество внешне различных явлений. Математические теории дали человечеству возможность обнаружить порядок и план повсюду в природе, где только их можно было найти; они помогли нам частично или полностью овладеть обширными областями знания.

Но большинство математиков предало забвению древние традиции математики и наследие ее прошлого. Наполненные глубоким содержанием сигналы, которые посылает нам природа, достигают лишь закрытых глаз и нечутко прислушивающихся ушей. Математики продолжают жить на проценты от репутации, заработанной их предшественниками, и жаждут при этом шумного одобрения и такой же поддержки, какую математика имела в прошлом. Чистые математики пошли еще дальше – они изгнали прикладных математиков из своего братства в надежде, что им одним достанется вся слава, которую снискали их предшественники. Они выбросили за борт богатейший источник идей и беспечно транжирят накопленное ранее богатство. В погоне за блуждающим огоньком они покинули пределы реального мира. Правда, некоторые чистые математики, памятуя о благородной традиции, стимулировавшей в прошлом математические исследования и приведшей Ньютона и Гаусса к выпавшим на их долю почестям, продолжают твердить о потенциальной ценности своих математических работ для естественных наук. Они утверждают, что создают модели для теоретического естествознания. Но в действительности подобная цель их нисколько не занимает. Более того, поскольку большинство математиков абсолютно не сведущи в естественных науках, они просто не в состоянии создавать такие модели. Они считают, что лучше хранить целомудрие, чем делить брачное ложе с естествознанием. Современная математика в целом обращена внутрь, она питается своими собственными соками. Судя по опыту прошлого, маловероятно, что многие из современных математических исследований внесут хоть какой-нибудь вклад в развитие естественных наук. Возможно, математике суждено еще долго брести в кромешной тьме, отыскивая свой путь на ощупь, ведь современная математика автономна. Развиваясь в направлениях, которые по ее собственным критериям определяются как имеющие отношение к делу и предпочтительные перед другими, современная математика даже гордится своей независимостью от диктуемых

[72] Дайсон Ф.Дж. *Упущенные возможности*. – Успехи математических наук, 1980, т.35, № 1 (211), с. 171–183 (и комментарии переводчика: с. 183–191).

внешним миром проблем, мотивировок, побудительных стимулов. В отличие от математики прошлого современная математика не обладает более ни единством, ни целью.

Изоляция большинства современных математиков достойна сожаления по многим причинам. Сфера приложений математики в науке и технике расширяется необычайно быстро. Вплоть до недавнего времени казалось, что близко к осуществлению пророчество Декарта, видевшего в математике высшее достижение человеческого разума, триумф логики над эмпиризмом и предсказавшего проникновение математических методов во все науки. Но именно в тот момент, когда математический подход распространился на многие области знания, математики отошли в сторону. Сто лет назад и ранее математика и физика были тесно связаны между собой. С тех пор между ними произошел разрыв, и ныне брешь между математикой и физикой достигла весьма ощутимых размеров. Современные математики упускают из виду, что ценность их науки определяется прежде всего тем вкладом, который она вносит в познание законов природы и в овладение природой. Большинство современных математиков хотят полностью изолировать свою науку и заниматься лишь исследованиями, лежащими в стороне от насущных проблем естествознания. Между теми, кто считает необходимым при выборе направления своих исследований придерживаться древней благородной традиции, и теми, кто предпочитает плыть по течению и расследовать всё, что подсказывает их неуемная фантазия, произошел раскол. Утратив за последние сто лет развития математики – становившейся всё более чистой – остроту зрения, математики разучились читать книгу природы и потеряли всякую охоту к подобному чтению. Они обратились к таким областям математики, как абстрактная алгебра и топология, к таким абстракциям и обобщениям, как функциональный анализ, к такой далекой от приложений деятельности, как доказательство теорем существования решений дифференциальных уравнений, к аксиоматизации различных наук и к бесплодной игре разума.[73] Лишь немногие современные математики всё еще пытаются решать более конкретные проблемы, главным образом в теории дифференциальных уравнений и близких к ней областях.

Означает ли отход большинства математиков от естественных наук, что современное естествознание может лишиться математики? Не совсем. Как заметили некоторые наиболее проницательные математики, новые Ньютоны, Лапласы и Гамильтоны создадут в будущем нужную им математику, подобно тому, как их предшественники создали ее в прошлом. Ньютон, Лаплас и Гамильтон были физиками, хотя и снискали всеобщее признание как первоклассные математики. Рихард Курант писал в 1957 г. в некрологе по случаю кончины Франца Реллиха: «Если существующая ныне тенденция сохранится, то не исключена опасность, что развитие «прикладной» математики в будущем станет уделом физиков и инженеров, а профессиональные математики сколько-нибудь высокого ранга не будут иметь к этому никакого отношения». Слово «прикладная» Курант взял в кавычки, потому что он имел при этом в виду всю содержательную и наполненную смыслом математику. Сам он не проводил различия между чистой и прикладной математикой.

Пророчество Куранта сбылось. Поскольку система ценностей, принятая в математическом сообществе, отдает предпочтение чистой математике, лучшие работы в области прикладной математики выполняют инженеры-электрики, вычислители, биологи, физики, химики и астрономы. Подобно тем математикам, которых Гулливер встретил во время путешествия в Лапуту, пуристы живут на острове, висящем над Землей. Решать проблемы, связанные с жизнью

[73] **Яглом:** Этот тезис можно и оспаривать: так, например, в *теории кодирования*, имеющей огромное прикладное значение в условиях современной недостаточности пропускной способности большинства линий связи, большую роль играет *абстрактная алгебра* (в частности, так называемые *конечные поля Галуа*), *конечные геометрии* (геометрии в плоскостях или пространствах, содержащих всего конечное число точек) и прочие разделы «абстрактной» математики, созданные вне всякой связи с возможными их приложениями (ср., например, [112: Бэрликэмп Э. *Алгебраическая теория кодирования*. – М.: Мир, 1971; Касами Т. и др. *Теория кодирования*. – М.: Мир, 1978; Питерсон У., Уэлдон Э. *Коды, исправляющие ошибки*. – М.: Мир, 1976; Мак Вильямс Ф., Слоэн Н. Дж. *Теория кодов, исправляющих ошибки*. – М.: Связь, 1979.] или статью [113: Livinson N. *Coding theory: a counter-example to G.H. Hardy's conception of applied mathematics*. – American Math. Monthly, v. 77, 1970, № 3, p. 249–258.]). Также и такие области математики, как *топология* или *алгебраическая геометрия*, (не говоря уже о *функциональном анализе*), совсем еще недавно считавшиеся чисто абстрактными, в последнее время стали активно изучаться (и применяться) физиками (см., например, [114: Минеев В.П. *Топологические объекты в нематических жидких кристаллах*. Приложение к кн.: Болтянский В.Г., Ефремович В.А. *Наглядная топология*. – М.: Наука, 1982, с. 148–158; Воловик Г.Е., Минеев В.П. *Физика и топология*. – М.: Знание, 1980.]; ср. [103: Яглом И.М. *Математические структуры и математическое моделирование*. – М.: Советское радио, 1980.]).

общества на Земле, они предоставляют другим. Еще какое-то время такие математики будут жить в атмосфере, созданной для их науки усилиями математиков прошлого, но по исчерпании запасов живительного воздуха они обречены на гибель от удушья.

Талейран заметил однажды, что идеалист не может долго оставаться идеалистом, если он не реалист, и реалист не может долго оставаться реалистом, если он не идеалист. Применительно к математике высказывание Талейрана можно истолковать так, что реальные проблемы необходимо идеализировать и изучать абстрактно, но деятельность идеалиста, игнорирующего реальность, не жизнеспособна. Математика должна прочно стоять на земле и уходить головой в облака. Подлинную, живую, содержательную математику рождает сочетание абстракции и конкретных проблем. Математики могут воспарять в облака абстрактного мышления, но, подобно птицам, за пищей должны возвращаться на землю. Чистую математику можно сравнить с тортом, подаваемым на десерт. Он приятен на вкус и даже способен в какой-то мере насытить нас, но организм не может существовать только на тортах – без «мяса и картошки» реальных проблем, составляющих основу его питания.

Чрезмерное внимание к искусственным проблемам чревато опасностью. Если и впредь математики будут направлять свои усилия главным образом на чистую математику, то математика перестанет быть той наукой, которую так ценили в прошлом, хотя и будет носить то же название. Математика – чудесное изобретение, но чудо кроется в способности человеческого разума конструировать модели сложных и, казалось бы, не поддающихся описанию явлений природы. Именно эта способность позволяет человеку постигать глубинную сущность явлений и обретать власть над природой.

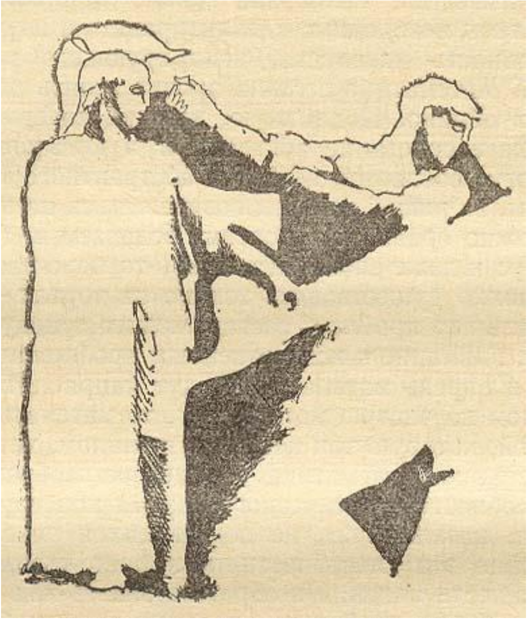
Но чтобы выбрать свой путь, человек должен быть свободен. Как сказано в «Одиссее» Гомера, «различное людям различным». Гомеру вторит живший веком позже поэт Архилох: «Каждый по-своему радует сердце». Ту же мысль мы находим у Гете: «У человека остается свобода заняться тем, что более всего привлекает его, что доставляет ему наслаждение, что кажется ему наиболее полезным». Но подлинным предметом исследования для человечества, добавляет Гете, является сам человек. Перефразируя высказывание Гете, мы можем сказать, что подлинным предметом исследования для математиков является природа. Как сказано в «Новом органоне» Фрэнсиса Бэкона, «подлинная же и надлежащая мета [конический столбик, устанавливавшийся в начальном и конечном пунктах конского ристалища в Древнем Риме] наук не может быть другой, чем наделение человеческой жизни новыми открытиями и благами» ([23][74], т. 2, с. 43).

В конечном счете здравый смысл должен подсказать, какое направление исследований стоит того, чтобы им заниматься. Математический мир должен проводить различие не между чистой и прикладной математикой, а между математикой, ставящей своей целью решение разумных проблем, и математикой, потакающей лишь чьим-то личным вкусам и прихотям, математикой целенаправленной и математикой бесцельной, математикой содержательной и бессодержательной, живой и бескровной.

[74] Бэкон Ф. Сочинения в 2-х томах. – М.: Мысль, 1977 (т.1); 1978 (т.2).

XIV. Куда идет математика?

Смири гордыню, бессильный разум.
Блез Паскаль



Рассказывая о всё возрастающих трудностях, с которыми приходилось сталкиваться математикам при поисках ответа на вопрос, что такое математика и что следует принять за основу при ее построении, мы обнаружили в итоге неприглядную картину. Главное утешение, которое получали математики от своей работы, – необыкновенная эффективность математики в приложениях к другим наукам – частично утратило свою силу, поскольку большинство математиков перестало заниматься приложениями. Как же воспринимают математики стоящую перед ними дилемму – вновь обратиться к приложениям или продолжить занятие чистой математикой – и что они могут ожидать от будущего? В чем сущность математики?

Попытаемся сначала проанализировать, как математика дошла до ее нынешнего бедственного положения и к чему это привело. Математики Древнего Египта и Вавилона, заложившие первые камни в фундамент своей науки, не имели ни малейшего представления о том, какое здание они возводят. Поэтому они не стали рыть глубокий котлован под фундамент, а начали закладывать его прямо на поверхности земли. В те давние времена земля казалась им достаточно прочным основанием, и материал, с которым они начали строительство, – факты о числах и геометрических фигурах – был взят из повседневного, земного опыта. Чисто земное происхождение математики нашло отражение в постоянно используемом нами термине «геометрия», что означает землемерие.

Однако когда здание математики начало расти, выяснилось, что всё сооружение достаточно шатко и что, надстраивая новые этажи, можно превратить в руины и то, что было создано раньше. Греки классического периода не только заметили грозящую опасность, но и произвели необходимую реконструкцию. С этой целью они приняли две меры. Во-первых, выбрали на поверхности земли узкие полосы прочного грунта, на которых, как им казалось, не страшно возводить стены. Такими опорными полосами стали самоочевидные истины о пространстве и о целых числах. Во-вторых, греки укрепили каркас здания стальной арматурой – роль «стали» здесь играло дедуктивное доказательство каждого нового факта.

Здание античной математики – структуры, состоящей в основном из евклидовой геометрии, – оказалось вполне устойчивым. Правда, в нем обнаружился один досадный дефект. Дело в том, что длины некоторых отрезков выражаются иррациональными числами: например, длина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с единичными катетами равна иррациональному числу $\sqrt{2}$. Но греки признавали только обычные целые числа и их отношения; поэтому они не могли допустить существование таких величин, как $\sqrt{2}$. Греки решили возникшую проблему, попросту изгнав иррациональные числа: они отказались считать $\sqrt{2}$ «числом», а следовательно, отказались и от идеи сопоставлять любым длинам, площадям и объемам численные значения. Тем самым греки не внесли никаких дополнений в арифметику и алгебру целых чисел, которые можно было бы включить и в структуру геометрии. Правда, некоторые ученые александрийского периода (в первую очередь Архимед) производили арифметические действия над иррациональными числами, но эти результаты не были включены в канонический свод знаний, составляющих логическую структуру математики.

Индийцы и арабы возвели новые этажи здания математики, нимало не заботясь о его устойчивости. Прежде всего примерно в VI в. индийцы ввели отрицательные числа. Затем индийцы и арабы – менее привередливые, чем греки, – не только приняли иррациональные числа, но и разработали правила действий, над ними. Европейцы эпохи Возрождения, унаследовавшие математику греков, индийцев и арабов, поначалу с недоверием отнеслись к этим чужеродным элементам. Но вскоре потребности естествознания возобладали над осторожностью – европейцы поступились заботами о логической обоснованности математики.

Расширяя математику чисел, индийцы, арабы, а позднее европейцы возводили этаж за этажом: так появились комплексные числа, новые разделы алгебры, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия и т.д. Однако вместо «стали» древнегреческих мыслителей европейцы использовали «деревянные колонны и балки» – смесь интуитивных рассуждений и физических построений. Но деревянные опоры не выдержали нагрузки – в стенах величественного здания математики стали появляться трещины. К началу XIX в. здание математики снова оказалось в аварийном состоянии, и математики в спешном порядке принялись заменять дерево сталью.

Пока укрепляли верхние этажи, выяснилось, что в казавшемся столь твердом грунте (выбранных греками аксиомах), на котором покоилась вся постройка, имеются не замеченные ранее дыры. Создание неевклидовой геометрии показало, что аксиомы евклидовой геометрии не были, как считалось прежде, полосками прочного грунта, а лишь казались таковыми. Не могли служить прочной основой и аксиомы неевклидовой геометрии. То, что математики принимали за абсолютную реальность, уповая на способность своего разума познавать и безошибочно анализировать природу, на поверку оказалось ненадежными данными чувственного опыта. Но беда никогда не приходит одна: создание новых алгебр заставило математиков осознать, что и казавшиеся столь надежными свойства чисел имеют в действительности не более прочное основание, чем геометрия. Так над всем зданием математики – над геометрией и арифметикой с их продолжениями в алгебру и анализ – нависла смертельная угроза. Поднявшееся уже высоко здание могло в любой момент рухнуть или провалиться в трясину.

Чтобы спасти здание от разрушения, необходимы были экстренные меры – и математики приняли вызов. Они наконец поняли, что прочного грунта, на котором можно было бы возвести фундамент здания математики, не существует. То, что кажется прочным, в действительности обманчиво и зыбко, Но, быть может, здание математики удастся возвести на прочном основании иного рода? В качестве такого основания математики решили выбрать четко сформулированные определения, полные перечни используемых аксиом и явное доказательство всех результатов, сколь бы очевидными они ни выглядели интуитивно. Кроме того, вместо поиска истины математики устремились теперь на поиск логической непротиворечивости. Доказываемые теоремы должны быть строго взаимосвязаны, придавая зданию математики желанную прочность (гл. VII). Движение за аксиоматизацию, развернувшееся в конце XIX в., позволило придать прочность зданию математики. Так, несмотря на то, что математика как будто бы утратила опору в реальности, очередной кризис в истории математики удалось преодолеть.

К сожалению, цемент, скрепляющий фундамент нового здания, не затвердевал. Строители не могли гарантировать непротиворечивость, и, когда возникли противоречия в теории множеств, математики поняли, что над их творением нависла еще более серьезная угроза. Разумеется, они не собирались безучастно наблюдать, как обращаются в прах плоды многовековых усилий. Непротиворечивость зависит от того, что положено в основу рассуждений. Следовательно, спасти положение может лишь полная перестройка оснований математики. Необходимо было укрепить сам фундамент реконструируемой математики – ее логические и математические аксиомы, и строители решили копать еще глубже. К сожалению, они так и не смогли прийти к единому мнению относительно того, где и как надлежит укреплять основания, и каждый, считая, что именно ему суждено обеспечить надлежащую прочность здания математики, приступал к перестройке так, как считал нужным. Построенное совместными усилиями здание не отличалось ни изяществом пропорций, ни особой устойчивостью. Оно расползалось во все стороны и было весьма шатким. Каждое крыло здания претендовало на роль единственно истинного храма математики, где хранятся жемчужины математической мысли.

Вероятно, всем известна притча о семи слепцах и слоне. Наткнувшись на слона, слепцы принялись ощупывать его и спорить, на что он похож. Тот, кто ощупывал хвост, заявил, что слон похож на веревку; его товарищ по несчастью, ощупывавший ногу слона, сравнил слона с колонной; третий слепец, ощупывавший хобот, утверждал, что слон подобен змее и т.д. Слепцы не могли прийти к согласию, так как все они представляли себе слона по-разному. Хотя математика по своей структуре, возможно, намного изящнее слона, тем, кто занимается основаниями математики и рассматривает ее с различных точек зрения, так же трудно согласовать свои позиции, как и несчастным слепцам.

Математика достигла ныне той стадии развития, когда вопрос о том, что, собственно, надлежит считать математикой – логицизм, интуиционизм, формализм или теорию множеств, – вызывает ожесточенные споры. Каждое течение в основаниях математики обладает тонкой структурой: разделяется на отдельные русла, состоящие в свою очередь из множества протоков. Так, интуиционисты не сходятся между собой во мнениях относительно того, что следует считать фундаментальными, интуитивно воспринимаемыми понятиями: только целые или также и некоторые иррациональные числа, закон исключенного третьего, распространяемый только на конечные или и на счетные множества, по-разному трактуемые конструктивные методы. Логицисты полагаются только на логику, но и они не избавлены от сомнений по поводу аксиом сводимости, выбора и бесконечности. Представители теоретико-множественного течения могут двигаться в любом из нескольких различных направлений в зависимости от того, принимают они аксиому выбора и гипотезу континуума или отвергают одну из этих аксиом (ибо гипотеза континуума также имеет ныне статус аксиомы!) или даже отказываются от них обеих. Даже формалисты могут выбирать путь но своему усмотрению. Выбор принципов математики для доказательства непротиворечивости не вполне однозначен. Финитистских принципов, отстаиваемых Гильбертом, оказалось недостаточно даже для доказательства исчисления предикатов (первой ступени), не говоря уже об установлении непротиворечивости формальных математических систем Гильберта. Формалистам не оставалось ничего другого, как воспользоваться нефинитистскими методами (гл. XII). Кроме того, как показал Гёдель, в рамках наложенных Гильбертом ограничений любая достаточно мощная формальная система содержит неразрешимые утверждения, т.е. утверждения, которые, базируясь на аксиомах, нельзя ни доказать, ни опровергнуть; но это значит, что подобные утверждения (или их отрицания) можно принять в качестве дополнительных аксиом. Однако и после присоединения новой аксиомы расширенная система, согласно теореме Гёделя, всё еще должна содержать неразрешимые утверждения. Приняв их за новые дополнительные аксиомы, мы могли бы вторично расширить формальную систему и т.д. Процесс последовательного расширения исходной формальной системы можно было бы продолжать бесконечно.

Логицисты, формалисты и представители теоретико-множественного направления полагаются на аксиоматические основания. В первые десятилетия XX в. именно аксиоматика превозносилась как наиболее подходящий фундамент для построения математики. Но теорема Гёделя утверждает, что ни одна система аксиом не охватывает всех истин, содержащихся в любой математической структуре, а теорема Левенгейма–Сколема показывает, что каждая система аксиом включает больше, чем предполагалось. Только интуиционисты могут позволить себе безразличие к проблемам, возникшим в связи с аксиоматическим подходом.

В довершение всех разногласий и неясностей по поводу того, какие основания математики считать наилучшими, над головами математиков, подобно дамоклову мечу, висит нерешенная проблема доказательства непротиворечивости всей математики. Какую бы философию ни исповедовал тот или иной математик, в своей работе он рискует натолкнуться на противоречие.

Основной вывод, который можно сделать из существования нескольких противоборствующих подходов к математике, состоит в следующем: имеется не одна, а много математик. О математике в целом, по-видимому, правильнее говорить во множественном числе (как о многих математиках), оставив единственное число для обозначения любого из подходов. Философ Джордж Сантаяна как-то сказал; «Не существует бога, и дева Мария – матерь его». Перефразируя эти слова, можно сказать: «Не существует единой, общепринятой математики, и греки – создатели ее». Широкий выбор подходов, открывающийся перед математиками, вызывает у них ощущение, близкое к тому, которое отлично передано в следующих строках Шелли:

Пред роем нескончаемым
Бесчисленных миров
Фантазии крылатой
Кружится голова.

Насколько можно судить, в ближайшем будущем нам придется обходиться без критерия, который позволял бы выбрать предпочтительный подход к собственно математике.

Примирить разные взгляды на то, что такое истинная математика (или по крайней мере в каком направлении она должна развиваться), можно надеяться лишь основываясь на прогрессе в решении тех спорных вопросов, по которым расходятся во мнениях математики разных школ. Больше всего разногласий вызывает вопрос о том, что такое математическое доказательство.

Во все времена – начиная с древнейших ионийской и пифагорейской школ (гл. I) – предполагалось, что математическое доказательство – это ясный и бесспорный процесс; формализации этого процесса Аристотель посвятил десять лет жизни. Правда, долгое время им пренебрегали (гл. V–VIII), но в целом математики никогда о нем не забывали. Само понятие математического доказательства всегда существовало; оно и служило парадигмой и образцом, которому в той или иной степени стремились следовать ученые.

Что же заставило математиков изменить отношение к доказательству и даже разбиться на враждующие группировки, каждая из которых придерживается своей версии этого важнейшего понятия? На протяжении более чем двух тысячелетий математики разделяли старые взгляды на логику, согласно которым логические принципы в том виде, как их кодифицировал Аристотель, являются абсолютными истинами. Уверенность в непогрешимости логических принципов подкреплялась их длительным и, казалось бы, безотказным использованием. Но впоследствии математики поняли, что основы логики – такие же продукты человеческого опыта, как и аксиомы евклидовой геометрии. Возникло легкое беспокойство по поводу того, какие же логические аксиомы можно считать надежными. Так, интуиционисты не без основания ограничили область применения закона исключенного третьего. И кто знает, стали бы мы считать, что приемлемые ныне логические принципы останутся таковыми и впредь, не будь их репутация столь безупречной в прошлом?

Второй связанный с понятием доказательства спорный вопрос, возникший с появлением логистической школы, можно сформулировать так: что входит и что не входит в («исходные») логические принципы? Хотя Рассел и Уайтхед без каких-либо колебаний в первом издании «Оснований математики» включили в свой список аксиом аксиомы бесконечности и выбора, позднее они отступили от этой позиции, не только признав, что первоначальные логические принципы не были абсолютными истинами, но уяснив, что аксиомы выбора и бесконечности аксиомами логики не являются. Во втором издании «Оснований математики» эти аксиомы не были включены в исходный список аксиом и их использование при доказательстве некоторых теорем каждый раз оговаривалось особо.

Помимо разногласий относительно того, какие логические принципы можно считать приемлемыми, существуют разногласия и по поводу того, сколь далеко простираются сферы действия логики. Как известно, логицисты были убеждены, что логики достаточно для обоснования всей математики, хотя впоследствии им приходилось всячески изворачиваться, когда дело касалось проблем, связанных с аксиомами бесконечности и выбора. По мнению формалистов, одной лишь логики недостаточно и для обоснования математики; логические аксиомы необходимо дополнить чисто математическими. Представители теоретико-множественного направления обращались с логическими принципами довольно небрежно, и кое-кто из них даже не удосуживался указывать используемые логические принципы в явном виде. Интуиционисты из принципиальных соображений считали нужным не вдаваться в логику.

Еще один спорный вопрос – понятие существования. Например, установив, что каждый многочлен имеет по крайней мере один корень, мы доказываем чистую теорему существования (*Existenzbewies*.– нем). Любое доказательство, если оно непротиворечиво, приемлемо с точки зрения логицистов, формалистов и представителей теоретико-множественного направления. Но доказательство, даже не использующее закона исключенного третьего, может не указывать метода, позволяющего **найти** (или **вычислить**) тот объект, существование которого мы установили. Для интуиционистов доказательства существования такого рода неприемлемы. Нежелание интуиционистов допустить трансфинитные кардинальные и ординальные числа (поскольку эти числа интуитивно не очевидны и конструктивно не достижимы в интуиционистском понимании конструктивности, или вычислимости) – еще один пример различных стандартов понимания «существования». Спорный вопрос, в каком смысле существуют не только отдельные математические объекты, например корни многочленов, но и вся математика в целом, имеет первостепенное значение, и мы еще вернемся к нему в этой главе.

Интерес к тому, что такое истинная математика, подогревается еще одним обстоятельством. Какие математические аксиомы можно считать приемлемыми? Блестящий пример вопросов такого рода – вопрос о том, допустимо ли использование аксиомы выбора. Пытаясь ответить па него, математики встали перед дилеммой; не использовать аксиому выбора или отвергнуть ее означало отказаться от больших и важных разделов математики, а применение аксиомы выбора приводило если не к противоречиям, то к интуитивно неразумным выводам (гл. XII).

Неспособность математиков доказать непротиворечивость своей науки бросает тень на весь идеал математики. Противоречия обнаруживались в самых неожиданных местах. И хотя их удавалось разрешить более или менее приемлемым образом, опасность возникновения новых противоречий, несомненно, заставила многих математиков скептически относиться к чрезмерным усилиям, которые их собратья прилагали для достижения строгости.

Что же такое математика, если она перестала быть однозначной, строгой логической конструкцией? Это серия интуитивных прозрений, тщательно отсеянных, очищенных и организованных с помощью той логики, которую занимавшиеся ее отбором люди хотели и могли применять, когда им заблагорассудится. Чем больше усилий прилагалось к уточнению понятий и систематизации дедуктивной системы математики, тем более изощренными становились интуитивные представления. Но опирается ли математика на какие-либо фундаментальные интуитивные представления, которые могут косвенно отражать структуру наших органов чувств, мозга и внешнего мира? Математика – творение человеческого разума, и любая попытка подвести под нее некую абсолютную базу обречена на провал.

Прогресс математики представляет собой цепочку великих интуитивных озарений, впоследствии получавших обоснования, которые возникают не за один прием, а путем последовательных поправок, долженствующих исправить различного рода ошибки и упущения, вводимых до тех пор, пока доказательство не достигнет приемлемого для своего времени уровня строгости.[75] Ни одно доказательство не является окончательным. Новые контрпримеры подрывают старые доказательства, лишая их силы. Доказательства пересматриваются, и новые варианты ошибочно считаются окончательными. Но, как учит история, это означает лишь, что для критического пересмотра доказательства еще не настало время. Иногда математики сознательно откладывают пересмотр доказательства на будущее. Промедление объясняется не только тем, что обнаружение ошибки в чужом доказательстве не приносит славы открывателю, но и другой причиной: математик, которому хватило ума усомниться в правильности ранее известного доказательства теоремы, обычно стремится самостоятельно доказать ее, связав тем самым старый факт со своим именем. Математики гораздо больше озабочены доказательством собственных теорем, нежели поиском ошибок в чужих доказательствах.

Некоторые школы пытались заточить математику в стенах логики. Но интуиция не терпит никаких посягательств на свою свободу. Представление о математике как о своде абсолютно надежных, бесспорных и неопровержимых истин, имеющих под собой прочное основание, разумеется, восходит к классическому периоду, воплощенному в «Началах» Евклида. Греческий идеал довлел над мышлением математиков более двадцати столетий. Но «злой гений» Евклид явно сбил математиков с истинного пути.

В действительности математик не полагается на строгое доказательство до такой степени, как обычно считают. Его творения обретают для него смысл до всякой формализации, и именно этот смысл сам по себе придает реальность. Попытки установить точные границы результата путем вывода его из системы аксиом могут оказаться в известной степени полезными, но, по существу, они довольно слабо влияют на значение результата.

Интуиция может оказаться более удовлетворительной и вселять бóльшую уверенность, чем логика. Когда математик спрашивает себя, почему верен тот или иной результат, он ищет ответа в интуитивном понимании. Строгое доказательство ничего не значит для математика, если результат ему непонятен интуитивно. Обнаружив непонимание, математик подвергает доказательство тщательнейшему критическому пересмотру. Если доказательство покажется ему правильным, то он приложит все силы, чтобы понять, почему интуиция подвела его. Математик жаждет понять внутреннюю причину, по которой успешно срабатывает цепочка силлогизмов. Пуанкаре сказал однажды: «Когда довольно длинное рассуждение приводит нас к простому и неожиданному результату, мы не успокаиваемся до тех пор, пока нам не удается показать, что

[75] **Яглом:** Классический пример, подкрепляющий высказанную мысль, доставляет нам хотя бы теория пределов, начавшаяся с принадлежащей Ньютону «чисто физической» концепции предела; также и первое определение предела, данное Д'Аламбером в одноименной статье знаменитой «Энциклопедии», с нашей сегодняшней точки зрения было дефектным (так, например, Д'Аламбер настаивал на монотонном приближении переменной величины к своему пределу). Ныне же мы имеем много разных определений этого понятия с разными областями применимости. (О другом примере такого рода – лейбницевском исчислении дифференциалов – ниже говорит сам автор.)

полученный результат – если не целиком, то по крайней мере в общих чертах – можно было предвидеть заранее».

Многие математики предпочитали полагаться на интуицию. Артур Шопенгауэр объяснил это так: «Чтобы усовершенствовать метод в математике, необходимо прежде всего решительно отказаться от предрассудка – веры в то, будто доказанная истина превыше интуитивного знания». Паскалю принадлежат два выражения – *esprit de géométrie* [дух геометрии] и *esprit de finesse* [дух проницательности]. Под первым Паскаль понимал силу и прямоту ума, проявляющиеся в железной логике рассуждений.[76] Под вторым – широту ума, способность видеть глубже и прозревать истину как бы в озарении. Для Паскаля даже в науке *esprit de finesse* был уровнем мышления, стоящим неизмеримо выше (и вне) логики и несоизмеримым с ней. То, что непостижимо для разума, считал Паскаль, может тем не менее быть истиной.

Задолго до Паскаля другие математики также утверждали, что интуитивное убеждение превосходит логику подобно тому, как ослепительный блеск Солнца затмевает бледное сияние Луны. Декарт полагался на врожденные интуитивные представления. По поводу логики Декарт заметил: «Я обнаружил, что силлогизмы и большинство посылок логики более пригодны, когда речь идет о вещах уже известных... или о вещах, в которых говорящий несведущ». Тем не менее Декарт охотно дополнял интуицию дедуктивными рассуждениями (гл. II).

Великие математики заранее, еще до того, как им удавалось найти логическое доказательство, знали, что какая-то теорема верна, и иногда ограничивались всего лишь беглым наброском доказательства. Более того, Ферма в своей обширной классической работе по теории чисел и Ньютон в работе по кривым третьего порядка те привели даже набросков доказательств. Прогрессу математики, несомненно, способствовали главным образом люди, наделенные не столько способностью проводить строгие доказательства, сколько необычайно сильной интуицией.

Итак, понятие доказательства, сколь ни преувеличивали его значение общественное мнение и публикации математиков, не играло той роли, которая ему обычно отводилась. Возникновение противоборствующих философий математики, каждая из которых отстаивала свои мерки строгости доказательства, вызывало скептическую переоценку важности доказательства. Критические нападки на понятие доказательства начались еще до того, как успели сформироваться различные течения в основаниях математики и их взаимно исключающие точки зрения получили сколько-нибудь широкое распространение. Еще. в 1928 г. Годфри Гарольд Харди утверждал с присущей ему прямотой:

> Строго говоря, того, что принято называть математическим доказательством, не существует... В конечном счете мы можем лишь указывать... Любое доказательство представляет собой то, что мы с Литтлвудом называем газом, – риторические завитушки, предназначенные для психологического воздействия, картинки, рисуемые на доске во время лекции, средство для стимуляции воображения учащихся.

Харди считал доказательства скорее фасадом, чем несущими опорами здания математики.

В 1944 г. выдающийся американский математик Рэймонд Луис Уайлдер выступил с вполне обоснованной статьей [98*][77], в которой низвел доказательство на еще более низкую ступень. Доказательство, утверждал Уайлдер, есть не что иное, как

> проверка продуктов, нашей интуиции... Совершенно ясно, что мы не обладали и, по-видимому, никогда не будем обладать критерием доказательства, не зависящим ни от времени, ни от того, что требуется доказать, ни от тех, кто использует критерий, будь то отдельное лицо или школа мышления. В этих условиях самое разумное, пожалуй, признать, что, как правило, в математике не существует абсолютно истинного доказательства, хотя широкая публика убеждена в обратном.

Ценность доказательства, как такового, подверг критике Уайтхед в своей лекции под названием «Бессмертие»:

> Резюмируя, можно, сказать, что логика, понимаемая как адекватный анализ процесса человеческого мышления, есть не более чем обман. Логика – превосходный инструмент, но ей необходим в качестве основы здравый смысл... По моему убеждению, окончательный вид,

---

[76] **Яглом:** Напомним, что в те времена под словом «геометрия» часто понималась вся математика.

[77] Wilder R.L. *The Nature of Mathematical Proof*. – Amer. Math. Month., 1944, 51, p. 309–323.

принимаемый философской мыслью, не может опираться на точные утверждения, составляющие основу специальных паук. Точность иллюзорна.

Доказательство, абсолютная строгость и тому подобные понятия – блуждающие огоньки, химеры, «не имеющие пристанища в математическом мире». Строгого определения строгости не существует. Доказательство считается приемлемым, если оно получает одобрение ведущих специалистов своего времени или строится на принципах, которые модно использовать в данный момент.[78] Никакого общепризнанного критерия строгости в современной математике не существует. Математическая строгость переживает сейчас не лучшее время. То, что некогда считалось неотъемлемой особенностью математики – неоспоримый вывод из явно сформулированных аксиом, – навсегда отошло в прошлое. Неопределенность и способность впадать в ошибку присущи логике в той мере, в какой они ограничивают возможности человеческого разума. Приходится лишь удивляться, сколько фундаментальных допущений мы обычно принимаем в математике, даже не сознавая этого.

Философ Ницше как-то раз назвал шутки «эпитафиями эмоциям». Чтобы хоть как-то скрыть охватившее их уныние, математики принялись подшучивать над логикой своей науки: «Достоинство логического доказательства состоит не в том, что оно вселяет веру, а в том, что оно заставляет сомневаться относительно того, какое место в рассуждениях должно вызывать у нас особенно сильные сомнения... К математическому доказательству относись не только с почтением, но и с подозрением!.. Мы не можем более надеяться, что нам удастся быть логичными. Будем же по крайней мере надеяться, что нам удастся не быть нелогичными... Больше страстности – меньше ясности». Математик Анри Леон Лебег, стоявший на позициях интуиционизма, заявил в 1928 г.: «Логика может заставить нас отвергнуть некоторые доказательства, но она не в силах заставить нас поверить ни в одно доказательство». В статье 1941 г. Лебег добавил, что логика служит не для того, чтобы убеждать, создавать уверенность. Мы верим в то, что согласуется с нашей интуицией. Лебег утверждал, что, по мере того как мы становимся всё более сведущими в математике, наша интуиция становится всё более изощренной.

Даже Бертран Рассел с его сугубо логистической программой не мог удержаться от язвительных замечаний в адрес логики. В «Принципах математики» (1903) Рассел писал: «Одно из главных достоинств, присущих доказательствам, состоит в том, что они пробуждают определенный скептицизм по отношению к доказанному результату». В том же издании «Принципов» он утверждал, что, как явствует из самой попытки положить в основу математики систему неопределяемых понятий и исходных утверждений, любой результат вполне может быть опровергнут (для этого достаточно, чтобы кому-нибудь удалось обнаружить противоречие в нашей формально-логической системе), но никогда не может быть доказан. Всё в конечном счете зависит от непосредственного восприятия. Чуть позже (1906) Рассел, встревоженный обнаруженными тогда парадоксами, высказался более откровенно, чем имел обыкновение высказываться в последующие годы. Когда антиномии показали, что логическое доказательство на существовавшем тогда уровне строгости небезупречно, Рассел заявил: «Элемент неопределенности должен оставаться всегда, подобно тому, как он неизбежно остается в астрономии. Со временем он может существенно уменьшиться, но смертным свойственно ошибаться».

Говоря о насмешках, которым подвергалась логика, нельзя не вспомнить слова одного из видных современных философов и специалистов по основаниям математики австрийца Карла Поппера (р. 1902)[79]:

> Существуют три уровня понимания доказательства. На самом низком уровне у вас появляется приятное ощущение, что вы поняли ход рассуждений. Средний уровень достигается, когда вы можете воспроизвести доказательство. На верхнем, или высшем, уровне вы обретаете способность опровергнуть доказательство.

---

[78] **Яглом:** Довольно распространенным ныне является такое «определение» (математического) доказательства: доказательство – это рассуждение, которое убеждает нас в справедливости теоремы. При этом вполне допустимо (и даже неизбежно) сосуществование в одной стране и в одно время совершенно разных уровней строгости допустимых доказательств в зависимости от научных школ или даже математических дисциплин (скажем, математическая логика и дифференциальная геометрия).

[79] **Яглом:** Карл Раймунд Поппер выдвинул также так называемый принцип фальсификации (опровержимости), согласно которому критерий научности теории задается возможностью опытного ее опровержения.

Оливер Хевисайд, весьма пренебрежительно относившийся к постоянным заботам математиков о строгости, иронически заявил: «Логика непобедима, потому что одолеть ее можно только с помощью логики».

Феликс Клейн, бывший на протяжении первой четверти XX в. признанным главой мирового центра математики – математического института Гёттингенского университета, – не занимался специально проблемами оснований математики, однако из истории развития этой науки он извлек кое-какие выводы. В своей книге «Элементарная математика с точки зрения высшей»[80] (1908) Клейн так описывал развитие математики:

> Математика развивалась подобно дереву, которое разрастается не путем тончайших разветвлений, идущих от корней, а разбрасывает свои ветки и листья вширь, распространяя их зачастую вниз, к корням... В основных исследованиях в области математики не может быть окончательного завершения, а вместе с тем и окончательно установленного первого начала... [117][81]

Аналогичное мнение, хотя и несколько по иному поводу, выразил Пуанкаре: не существует решенных проблем, существуют только проблемы более или менее решенные.

Математики поклонялись золотому тельцу – строгому, одинаково приемлемому для всех доказательству, истинному во всех возможных мирах, искренне веря, что это и есть бог. Теперь наступило прозрение: математики поняли, что их бог – ложный. Но истинный бог так и не открылся, и теперь им не оставалось ничего другого, как гадать, существует ли он вообще. «Пророк Моисей», который мог бы пролить на них свет истины, так и не появился. Математикам оставалось лишь терзаться не находящими ответа вопросами.

У некоторых вполне разумных критиков оснований математики сильное раздражение вызывали нюансы, по поводу которых спорили те, кто занимался основаниями. Если математика в конечном счете основана на интуиции, спрашивал один из таких критиков Имре Лакатош (или Лакатос; 1922–1974), то почему мы должны идти всё дальше и дальше?

> Почему бы нам не остановиться раньше и не заявить, что «окончательным критерием допустимости того или иного метода должен служить вопрос, является ли он интуитивно убедительным»... Почему честно не признать потенциальную возможность ошибки в математическом доказательстве и не попытаться защитить достоинство знания, возможно в чем-то и ошибочного, от циничного скептицизма, вместо того чтобы обманывать себя тем, будто мы всегда можем искусно заштопать последнюю прореху на ткани нашей «первичной» интуиции? (Ср. также [52*][82].)

По поводу относительной ценности интуиции и доказательства уместно привести следующую притчу. В кабинете одного врача над дверью висела подкова. Уходя после приема, пациент спросил врача, принесла ли ему подкова удачу в жизни и в работе. «Нет, – ответил врач, – я не верю в подобные предрассудки. Но всё же подкова помогает».

Артур Стэнли Эддингтон заметил однажды: «Доказательство – это идол, во имя которого математики терзают себя». Почему же математики идут на такие муки ради строгого доказательства? Уместно спросить: чем, собственно, занимаются математики, ставящие превыше всего железную логику, если они не знают, непротиворечива ли их наука, и, в частности, не могут прийти к единому мнению относительно того, что такое правильное доказательство? Не следует ли им стать полностью безразличными к строгости, поднять руки вверх и заявить, что математика как свод твердо установленных истин не более чем иллюзия? Не должны ли они оставить дедуктивное доказательство и прибегать лишь к убедительным, интуитивно здравым аргументам? Ведь используют же интуитивные соображения физические науки, которые даже там, где они применяют математику, не придают особого значения пристрастию математиков к строгости. Но отказ от строгости вряд ли показан математике. Всякий, кто знает, какой вклад внесла математика в сокровищницу человеческого мышления, не станет жертвовать понятием доказательства.

Нельзя не признать важного значения логики для математики. Если интуиция – господин, а логика – всего лишь слуга, то это тот случай, когда слуга обладает определенной властью над

---

[80] Название книги Клейна (*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus)* точнее было бы перевести как «Элементарная математика с высшей точки зрения», – *Прим. ред*.

[81] Клейн Ф. *Элементарная математика с точки зрения высшей*, т. I, – М.–Л.: ОНТИ, 1935.

[82] Lakatos I. *Proofs and Refutations*. – New York: Cambridge University Press., 1976. [Русский перевод более краткого варианта книги: Лакатос И. *Доказательства и опровержения*. – М.: Наука, 1967.]

своим господином. Логика сдерживает необузданную интуицию. Хотя, как мы и признали, интуиция играет в математике главную роль, всё же сама по себе она может приводить к чрезмерно общим утверждениям. Надлежащие ограничения устанавливает логика. Интуиция отбрасывает всякую осторожность – логика учит сдержанности. Правда, приверженность логике приводит к длинным утверждениям со множеством оговорок и допущений и обычно требует множества теорем и доказательств, мелкими шажками преодолевая то расстояние, которое мощная интуиция перемахивает одним прыжком. Но на помощь интуиции, отважно захватившей расположенное перед мостом укрепление, необходимо выслать боевое охранение, иначе неприятель может окружить захваченную территорию, заставив нас отступить на исходные позиции.

Интуиция может и обмануть нас. На протяжении большей части XIX в. математики – в том числе Коши, одним из первых ставший насаждать математическую строгость, – считали, что любая непрерывная функция имеет производную. Но Вейерштрасс поразил математический мир, продемонстрировав непрерывную функцию, ни в одной точке не имеющую производной.[83] Такая функция недоступна интуиции. Математическое рассуждение не только дополняет интуицию, но и подтверждает, исправляет, а в иных случаях и превосходит ее.

То, что дают математикам логические рассуждения, можно пояснить с помощью аналогии. Предположим, фермер купил участок непроходимого леса, намереваясь расчистить его и заняться земледелием. Вырубив лес на небольшом пятачке, он заметил рыскавших в лесу диких зверей. Опасаясь их нападения, фермер вырубил лес, примыкавший к уже расчищенному участку, и звери отступили вместе с лесом. Теперь их можно было видеть чуть дальше – там, где на границе расчищенного участка стеной поднимался девственный лес. Фермер снова взялся за топор и т.д. до бесконечности. Каждый раз он расчищал всё новый участок земли – звери отступали к кромке нетронутого леса. Спросим себя: чего же достиг фермер? По мере того как увеличивался свободный от леса участок земли, фермер обретал всё большую безопасность, по крайней мере если он работал в центре расчищенного участка. Но звери не исчезли, они лишь отступили и когда-нибудь смогут неожиданно наброситься на фермера и растерзать его, хотя по мере увеличения размеров расчищенного участка фермер обретал всё большую относительную безопасность. Аналогичным образом степень уверенности, с какой мы можем пользоваться центральным ядром математических знаний, возрастает по мере того, как логика применяется для выяснения то одной, то другой проблемы в основаниях математики. Иначе говоря, доказательство гарантирует нам относительную уверенность в правоте. Мы окончательно убеждаемся в правильности той или иной теоремы, если нам удастся доказать ее на основе разумных утверждений о числах и геометрических фигурах, которые интуитивно более приемлемы, чем доказываемая теорема. По словам Реймонда Луиса Уайлдера, доказательство – это проверка идей, подсказанных интуицией.

К сожалению, доказательства одного поколения воспринимаются другим поколением как ворох логических ошибок. Один из основоположников современной математики в США, Элиаким Гастингс Мур (1862–1932), выразил (1903) эту мысль так: «Любая наука, включая логику и математику, есть продукт своей эпохи. Наука воплощена в своих идеалах не в меньшей мере, чем в результатах». Век строгости короток – это всего лишь один день. В наше время понятие строгости зависит и от того, к какой школе принадлежит математик. Насколько можно судить, самого Уайлдера вполне устроило бы доказательство, не содержащее явных противоречий и к тому же полезное для математики. Например, он не стал бы возражать против понятия гипотезы континуума в качестве аксиомы. Не придавая особого значения доказательству, Уайлдер критиковал различные школы мышления за разобщенность. Разве не напоминает приверженность догматам одной школы в ущерб всем остальным фанатизм религиозных сектантов, провозглашающих своего бога истинным и отвергающих все остальные секты как заблудшие?

Мы не можем отрицать, что не существует ни абсолютного доказательства, ни даже доказательства, одинаково приемлемого для всех. Мы знаем, что если усомнимся в истинности утверждений, принятых на интуитивной основе, то сможем доказать их, лишь приняв на интуитивной же основе некие другие утверждения. Проверяя истинность утверждений, непосредственно воспринимаемых интуицией, мы не можем заходить слишком далеко, не рискуя столкнуться с парадоксами или другими неразрешенными трудностями, часть которых лежит в

[83] **Яглом:** Ср. со сказанным на с. 205, гл. VIII.

сфере логики. В начале XX в. знаменитый французский математик Жак Адамар высказал следующую мысль: «Цель математической строгости состоит в том, чтобы санкционировать и узаконить завоевания интуиции». Мы не можем теперь согласиться с Адамаром. Более уместно повторить вслед за Германом Вейлем: «Логика – это своего рода гигиена, позволяющая математику сохранять свои идеи здоровыми и сильными». Неверно утверждать, что доказательство не играет никакой роли: оно сводит к минимуму риск противоречий.

Нельзя не признать, что абсолютное доказательство не реальность, а цель. К ней следует стремиться, но скорее всего она так никогда и не будет достигнута. Абсолютное доказательство не более чем призрак, вечно преследуемый и неизменно ускользающий. Мы должны неустанно укреплять то доказательство, которым располагаем, не надеясь на то, что нам удастся довести его до совершенства. Мораль всей истории развития математического доказательства сводится к следующему: хотя мы и стремимся к недостижимой цели, нам, возможно, удастся произвести чудесные ценности, которые математике случалось дарить миру в прошлом. Если мы изменим свое отношение к математике, то сможем более эффективно заниматься ею, несмотря на постигшее нас разочарование.

Осознание того, что в обосновании математических истин главную роль играет интуиция, а доказательству отводится лишь вспомогательная роль, означает, что математика в своем развитии описала полный круг. Математика начиналась на интуитивной и эмпирической основе. Начиная с древних греков доказательство стало целью математической деятельности, и, хотя до XIX в. эта цель пребывала в почетной отставке, в конце XIX в. математикам показалось, что они сумели достичь ее. Но попытки довести математическую строгость до пределов возможного завели математиков в тупик: логика нанесла поражение логике, подобно собаке, кусающей себя за хвост. В «Мыслях» Паскаля мы находим следующее признание: «Сила разума в том, что он признает существование множества явлений, ему непостижимых»[84] ([119][85], с. 157).

Кант также признавал ограниченность человеческого разума. В его «Критике чистого разума» есть такие строки:

> На долю человеческого разума в одном из видов его познания выпала странная судьба: его осаждают вопросы, от которых он не может уклониться, так как они навязаны ему собственной природой; но в то же время он не может ответить на них, так как они превосходят возможности человеческого разума. ([18][86], т. 3, с. 73.)

Близкую мысль высказал знаменитый испанский писатель и философ Мигель де Унамуно (1864–1936) в «Трагическом смысле жизни»: «Высшего триумфа разум достигает, когда ему удается заронить сомнение в собственной годности».

Более пессимистических взглядов на роль логики придерживался Герман Вейль. В 1940 г. он утверждал: «Несмотря на наше критическое озарение (а может быть, благодаря ему), мы сегодня менее, чем когда-либо раньше, уверены в основаниях, на которых зиждется математика». В 1944 г. Вейль развил свою мысль подробнее:

> Вопрос об основаниях математики и о том, что представляет собой в конечном счете математика, остается открытым. Мы не знаем какого-то направления, которое позволит в конце концов найти окончательный ответ на этот вопрос, и можно ли вообще ожидать, что подобный окончательный ответ будет когда-нибудь получен и признан всеми математиками. «Математизирование» может остаться одним из проявлений творческой деятельности человека, подобно музицированию или литературному творчеству, ярким и самобытным, но прогнозирование его исторических судеб не поддается рационализации и не может быть объективным.

Как сказал Вейль, математика – это вид умственной деятельности, а не свод точных знаний. Математику лучше всего рассматривать в исторической перспективе. Рациональные

---

[84] **Яглом:** Противоположной точки зрения придерживался Гильберт – см. приведенную на с. 302 цитату из его статьи «О бесконечном» или с. 22 книги [51: Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969.]. Популярно также известное высказывание А. Эйнштейна: «Самое непостижимое во Вселенной – это то, что она все-таки постижима».

[85] Ларошфуко Ф. де. *Максимы*. Паскаль Б. *Мысли*, Лабрюйер Ж. де. *Характеры*. – М.: Художественная литература, 1974.

[86] Кант И. Сочинения в 6-ти томах. – М.: Мысль, 1964 (т.3), 1965 (т.4), 1966 (т.6).

конструкции и реконструкции оснований при таком подходе предстают перед нами лишь как попытки исказить историческую правду.

Наиболее крайние взгляды выразил в своей книге «Логика научного исследования» [120][87] Карл Поппер. Математическое рассуждение никогда не бывает верным, оно может быть только ошибочным. Было бы опрометчивым поручиться и за истинность математических теорем. Существующей математической теорией можно продолжать пользоваться за неимением лучшей, подобно тому, как пользовались ньютоновской механикой в течение двух столетий до появления специальной теории относительности или как пользовались евклидовой геометрией до того, как была создана риманова геометрия. Уверенность в правильности математической теории недостижима.

Как свидетельствует история, не существует раз и навсегда заданного, обоснованного единого свода математических знаний. Кроме того, если история позволяет делать какие-то прогнозы, то можно сказать, что любые дополнения к существующей математике потребуют новых оснований. В этом отношении математика схожа с любой из физических наук. Физические теории приходится модернизировать и перестраивать всякий раз, когда новые наблюдения или новые экспериментальные данные вступают в противоречие с ранее установленными теориями и вынуждают формулировать новые. Математическую истину невозможно описать безотносительно ко времени. Все попытки построить математику на незыблемом основании заканчивались неудачей. Непрекращающиеся попытки – от Евклида через Вейерштрасса до современных школ в основаниях – подвести под математику прочный фундамент не дают ни малейшего повода надеяться на эволюционный прогресс, сулящий конечный успех.

Изложенные выше взгляды на роль интуиции и доказательства отражают точку зрения на современную математику, но не учитывают всех мнений о будущем. Взгляд на логику был подтвержден группой французских математиков, выступающих под коллективным псевдонимом Никола́ Бурбаки. В предисловии к первому тому «Элементов математики» Бурбаки пишет:

> Как показывает анализ исторического развития математики, было бы неверно утверждать, что математика свободна от противоречий; непротиворечивость предстает как цель, к которой следует стремиться, как некое данное богом качество, ниспосланное нам раз и навсегда. С древнейших времен все критические пересмотры принципов математики в целом или любой из ее областей почти неизменно сменялись периодами неопределенности, когда появлялись противоречия и их приходилось решать... Вот уже двадцать пять веков математики имеют обыкновение исправлять свои ошибки и видеть в этом обогащение, а не обеднение своей науки; это дает им право смотреть в будущее спокойно. ([2][88], с. 30.)

Обращение к истории, возможно, в какой-то степени утешает, но та же история учит, что новые кризисы непременно возникнут. Однако столь мрачная перспектива не охлаждает оптимизма Бурбаки.

Одни из ведущих французских математиков, бурбакист Жан Дьедонне, выразил уверенность в том, что проблемы логики, коль скоро они возникнут, непременно будут разрешены:

> Если когда-нибудь будет доказано, что математика противоречива, то скорее всего станет известно, какому правилу следует приписать полученный результат. Отбросив это правило или надлежащим образом видоизменив его, мы избавимся от противоречия. Иначе говоря, математика изменит направление своего развития, но не перестанет быть наукой. Сказанное не просто умозаключение: нечто подобное произошло после открытия иррациональных чисел. Мы далеки от мысли оплакивать это открытие, потому что оно вскрыло противоречие в пифагорейской математике, а, напротив, сегодня мы считаем его одной из великих побед человеческого духа.

Дьедонне мог бы привести еще один пример: лейбницевский подход к дифференциальному и интегральному исчислению (гл. VII). После всех критических замечаний, выпавших на долю понятия бесконечно малой величины в XVIII в., новая формулировка (нестандартный анализ, гл. XII) придала ему строгий смысл, согласующийся с логистическим, формалистским и теоретико-множественным вариантами оснований математики.

---

[87] Popper K.R. *The Logic of Scientific Discovery*. – London, 1959. (Неполный русский перевод в кн.: Попер К. *Логика и рост научного знания*. – М.: Прогресс, 1983, с. 33–235.

[88] Бурбаки Н. *Теория множеств*. – М.: Мир, 1965.

Помимо тех, кто, подробно бурбакистам, преисполнен оптимизма и считает устранимым любое противоречие, могущее возникнуть в основаниях математики, среди математиков есть и такие, кто верит в существование единого непротиворечивого, вечного ядра математики, которое может быть применимым или неприменимым к физическому миру. По мнению этих математиков, не все идеи, образующие вечное ядро математики, могут быть известны человеку, тем не менее эти идеи существуют, – так и несогласованность и неопределенность доказательства обусловлены только ограниченностью человеческого разума. Имеющиеся ныне разногласия между математиками не более чем временное препятствие, которое постепенно будет преодолено.

Некоторые из мыслителей считают, что математика настолько глубоко внедрилась в человеческий разум (в этом отношении их можно считать кантианцами), что вопрос о ее непротиворечивости отпадает сам собой. Так, Уильям Роуан Гамильтон, хотя он и ввел объекты (кватернионы), которые породили сомнение в соответствии арифметики физическому миру, в 1836 г. высказался вполне в духе Декарта:

> Такие чисто математические науки, как алгебра и геометрия, являются науками чистого разума, не подкрепляемыми опытом и не получающими от него помощи, изолированными или могущими быть изолированными от всех внешних и случайных явлений... Вместе с тем это идеи, рожденные внутри нас, обладание которыми в сколько-нибудь ощутимой степени есть следствие нашей врожденной способности, проявление человеческого начала.

В докладе, прочитанном в 1883 г. на заседании Британской ассоциации поощрения науки, один из крупнейших алгебраистов XIX в. Артур Кэли заявил: «Мы обладаем априорными знаниями, не зависящими не только от того или иного опыта, но и от всякого опыта вообще... Эти знания составляют вклад нашего разума в интерпретацию опыта».

В то время как одни (например, Гамильтон и Кэли) представляли математику как «внедрившуюся» в человеческий разум, другие считали, что она существует в мире, лежащем вне человека. Трудно понять, как могли просуществовать до начала XX в. представления о математике как о едином реальном мире математических идей. Корни таких представлений восходят к Платону (гл. I). Эти представления неоднократно возрождали, в особенности Лейбниц, проводивший различия между истинами разума и истинами факта (последние остаются истинными во всех возможных мирах). Даже Гаусс, первым по достоинству оценивший неевклидову геометрию, был убежден в абсолютной истинности арифметики (числа) и анализа (гл. IV).

Веру в существование объективного реального мира математики разделял один из искуснейших аналитиков XIX в. Шарль Эрмит (1822–1901). В письме математику Томасу Яну Стильтьесу ,Эрмит утверждал:

> Я убежден в том, что числа и функции анализа не являются произвольным продуктом нашего духа. Я верю, что они лежат вне нас с той же необходимостью, как предметы объективной реальности, а мы обнаруживаем или открываем и исследуем их так же, как это делают физики, химики и зоологи.[89]

По другому случаю Эрмит сказал: «В математике мы больше слуги, чем господа».

Многие из математиков XX в., несмотря на споры по поводу оснований, заняли ту же позицию. Создатель теории множеств и трансфинитных чисел Георг Кантор считал, что математики не изобретают понятия и теоремы, а открывают их. Математические понятия и теоремы существуют независимо от человеческого мышления. Себя самого Кантор считал репортером и секретарем, записывающим эти понятия и теоремы. Годфри Гарольд Харди, скептически относившийся к предлагаемым человеком доказательствам, утверждал в 1929 г.:

> Мне кажется, что ни одна философия не может вызвать сочувствие у математика, если она так или иначе не признает незыблемости и безусловной годности математической истины. Математические теоремы истинны или ложны, и их истинность или ложность абсолютно не зависит от того, известны ли нам эти теоремы. В некотором смысле математическая истина является частью объективной реальности.

---

[89] **Яглом:** Ср. с примечанием 1 к Введению.

Аналогичные взгляды Харди выразил и в своей книге «Апология математика» [39*][90]:

> Свою позицию я сформулирую догматически во избежание малейшей неясности. Я считаю, что математическая реальность лежит вне нас, что наша функция заключается в открытии и наблюдении ее и что теоремы, которые мы доказываем и высокопарно называем своими «творениями», в действительности являются не более чем записями наших наблюдений.

Выдающийся французский математик XX в. Жак Адамар (1865–1963) утверждал в работе «Исследование психологии процесса изобретения в области математики», что, «хотя истина еще не известна нам, она предсуществует и неизбежно подсказывает нам путь, которым мы должны следовать» [70][91].

Гёдель также разделял мнение о существовании трансцендентального мира математики. Что касается теории множеств, то он считал вполне допустимым рассматривать все множества как реальные объекты:

> Мне кажется, что допущение о существовании таких объектов столь же законно, как и допущение о существовании физических объектов, и что имеется не меньше оснований верить в их существование. Они необходимы для получения удовлетворительной теории математики в том же смысле, в каком физические тела необходимы для удовлетворительной теории наших чувственных восприятий, и в обоих случаях невозможно интерпретировать утверждения, которые мы хотим высказать об этих сущностях, как утверждения о «данных», т.е., в последнем случае, о реальных чувственных восприятиях.

Некоторые из приведенных выше высказываний принадлежат ученым двадцатого столетия, которых не очень беспокоили основания математики. Еще более удивительно, что и кое-кто из лидеров различных школ в основаниях математики, например Гильберт, Алонзо Черч и члены группы Бурбаки, утверждали, что математические понятия и свойства существуют в некотором объективном смысле и могут быть постигнуты человеческим разумом. Таким образом, математическую истину открывают, а не изобретают, и в результате открытия возникает не математика, а человеческое знание математики.

Людей, разделяющих подобные взгляды, часто называют платонистами. Хотя Платон и верил в то, что математика существует в некотором идеальном мире независимо от людей, его учение содержит много несовместимого с современными воззрениями; поэтому здесь апелляция к платонизму не столько помогает, сколько вводит в заблуждение.

Все утверждения о существовании объективного, единого ядра математики ничего не говорят о том, где же находится математика. Они указывают лишь, что математика существует в некотором «потустороннем» мире, своего рода воздушном замке, а человек лишь открывает ее. Аксиомы и теоремы отнюдь не только творения человеческого разума – их скорее можно сравнить с сокровищами, скрытыми в недрах, которые можно извлечь на поверхность, если запастись терпением и копать всё глубже и глубже. Но существование аксиом и теорем не зависит от человека, как не зависит от него, например, существование планет.

Является ли математика коллекцией алмазов, спрятанных в недрах Вселенной и постепенно извлекаемых на поверхность, или коллекцией искусственных драгоценных камней, созданных человеком и сверкающих так ярко, что они ослепили тех математиков, кто уже отчасти был ослеплен гордостью за свои творения?

Если существует мир сверхчувственных и трансцендентально абсолютных объектов и если наши логические и математические утверждения представляют собой всего лишь записи наблюдений этих объектов, то не существуют ли противоречия и ложные утверждения в том же смысле, в каком существуют истинные утверждения? Сорные семена ложности и противоречивости могут давать столь же пышные всходы, как и семена истинные и прекрасные. Дьявол сеет свои семена и собирает жатву наряду с богом истины. Разумеется, платонисты могли бы возразить, что ложные утверждения и противоречия возникают только из-за неадекватности усилий, прилагаемых человеком для достижения истины.

---

[90] Hardy G.H. A *Mathematician's Apology*. – Cambridge: University Press, 1981. [Русский перевод отрывков из книги: Харди Г.Г. *Исповедь математика*. – В кн.: Математики о математике. – М.: Знание, 1967, с. 4–15.]

[91] Адамар Ж. *Исследование психологии процесса изобретения в области математики*. – М.: Советское радио, 1970.

Иной точки зрения (согласно которой математика – это только продукт человеческого мышления) придерживаются интуиционисты. Эта точка зрения восходит к Аристотелю. Однако если одни интуиционисты считают, что истина гарантируется разумом, то другие утверждают, что математика представляет собой не незыблемый свод непреложных знаний, а творение человеческого разума, которому свойственно ошибаться. Классическое высказывание на эту тему, появившееся задолго до современных споров, мы находим в «Мыслях» Паскаля: «Истина – слишком тонкая материя, а наши инструменты слишком тупы, чтобы ими можно было прикоснуться к истине, не повредив ее. Достигнув истины, они сминают ее и отклоняются в сторону, скорее ложную, нежели истинную»[92]. По утверждению главы интуиционистов Аренда Рейтинга, в наше время никто не может говорить об истинной математике, т.е. о математике как едином своде правильных знаний.

Герман Ганкель, Рихард Дедекинд и Карл Вейерштрасс считали математику творением человека. В письме Генриху Веберу Дедекинд утверждал: «По-моему, то, что мы понимаем под числом, само по себе есть не класс, а нечто новое.... созданное нашим разумом. Мы божественная раса и обладаем... способностью творить». Ту же мысль Вейерштрасс выразил такими словами: «Истинный математик всегда поэт». Ученик Рассела философ Людвиг Виттгенштейн (1889–1951) считал, что математик – изобретатель, а не открыватель. Все эти и многие другие мыслители рассматривали математику как нечто далеко выходящее за пределы эмпирических данных или рациональных дедуктивных умозаключений. В пользу их мнения свидетельствует хотя бы тот факт, что такие элементарные понятия, как иррациональные и отрицательные числа, не являются ни дедукциями из эмпирических данных, ни объектами, заведомо существующими в некотором внешнем мире.

Герман Вейль с большой иронией относился к вечным истинам. В книге «Философия математики и естественных наук» [93*][93] он писал:

> Гёделю с его истовой верой в трансцендентальную логику хочется думать, что наша логическая оптика лишь немного не в фокусе, и надеяться, что после небольших коррекций мы будем видеть четко, и тогда всякий согласится, что мы видим верно. Но того, кто не разделяет этой веры, смущает высокая степень произвола в системе Z [Цермело] или даже в системе Гильберта... Никакой Гильберт не сможет убедить нас в непротиворечивости на вечные времена. Мы должны быть довольны, если какая-нибудь простая аксиоматическая система математики пока выдерживает проверку наших сложных математических экспериментов. Если на более поздней стадии появятся расхождения, то мы еще успеем изменить основания.

Лауреат Нобелевской премии американский физик и философ Перси Уильяме Бриджмен в своей книге «Логика современной физики» (1946) решительно отвергает существование объективного мира математики: «Это общеизвестная истина, очевидная с первого взгляда, что математика – изобретение человека». Теоретическая наука – игра математического воображения. Все, кто считал математику творением человека, утверждали также, что математика испытала на себе сильное влияние тех культур, в рамках которых она развивалась. Математические «истины» в такой же мере зависимы от людей, как восприятие цвета или английский язык. Лишь относительно широкое принятие математических доктрин – по сравнению с политическими, экономическими и религиозными – создает иллюзию, будто математика представляет собой свод истин, объективно существующих вне человека. Математика может существовать независимо от любого человека, но не от культуры, которая его окружает. Перефразируя Германа Вейля, можно сказать, что математика не отдельное техническое достижение, а неотъемлемая часть человеческого существования во всей его общности – и в этом она находит свое обоснование.

---

[92] **Яглом:** Здесь естественно вспомнить о знаменитом физическом принципе неопределенности Гейзенберга, одна из распространенных интерпретаций которого говорит о неизбежном изменении физической интуиции при попытке ее наблюдения, скажем, об отклонении частицы от первоначального положения при падении на нее фотона света, без чего частицу нельзя увидеть. Аналогично этому филологи иногда говорят об определенной деформации природного явления при описании его на том или ином языке (Аристотель говорил о бесконечности природных явлений и конечности числа слов любого языка) и т.д.

[93] Weyl H. *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*. – Princeton: University Press, 1949. [Немецкий оригинал: Weyl H. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften*. – München: Oldenberg, 1922; русский перевод (частичный): Вейль Г. *О философии математики*. – М.: Гостехиздат, 1934, с. 34–91; 2-е изд. доп. и перераб. München: Leibniz Verlag, 1950; русский перевод отрывков – в кн.: *Прикладная математика* (под ред. Э. Беккенбах.) – М.: Мир, 1968, с. 309–361.]

Тех, кто разделяет взгляд на математику как на творение человека, по существу, можно было бы назвать кантианцами, ибо они усматривают источник математики в организующей силе человеческого разума. Но эти современные кантианцы подчеркивают, что математика связана не с морфологией или физиологией мозга, а с его деятельностью. Разум организует, используя эволюционные методы. Творческая деятельность разума постоянно порождает всё более новые, высшие формы мышления. В математике человеческий разум отчетливо видит, что он способен создать совокупность знаний, которые ему интересны или полезны. Область его созидательной деятельности не замкнута. Формулируемые разумом понятия применимы как к существующим, так и к вновь возникающим областям знания. Разум обладает способностью возводить структуры, охватывающие опытные данные и упорядочивающие их. Источник математики лежит в прогрессивном развитии самого разума.

Острые споры о природе математики и потере ею прежнего статуса свода общепринятых незыблемых истин, бесспорно, свидетельствует в пользу концепции математики, созданной человеком. Как сказал Эйнштейн, «каждый, кто осмеливается взять на себя роль судьи во всем, что касается Истины и Знания, терпит крушение под смех богов».

По иронии судьбы, мыслители Века разума, рассматривая математику как пример способности человека мыслить и получать истины, без тени сомнения утверждали, что разум разрешит все человеческие проблемы. Современные мыслители, даже если некоторые из них разделяют веру в могущество разума, заведомо не считают математику эталоном или парадигмой. Такой поворот событий не так далек от интеллектуальной катастрофы. Математика по-прежнему остается самой длительной и последовательной попыткой человека создать точное и эффективное мышление, а достижения математики по-прежнему служат мерилом того, на что способен человеческий разум. Математика устанавливает верхний предел, которого мы можем лишь надеяться достичь во всех рациональных областях. К сожалению, споры относительно того, что такое «настоящая» математика, не прекращаются. Именно поэтому Гильберт так страстно стремился восстановить истинность в смысле объективных, достоверных умозаключений. В его статье 1925 г. «О бесконечном» говорится: «Где же еще искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечки?» ([50][94], с. 349.)

Озабоченность Гильберта судьбами математики явственно слышится в его докладе «Проблемы обоснования математики» на Международном математическом конгрессе в Болонье (1928):

> Что было бы с истинностью наших знаний вообще и как обстояло бы дело с существованием и прогрессом науки, если бы в математике не было достоверной истины? В наше время нередко даже в специальных изданиях и в открытых докладах высказывается сомнение и уныние по поводу науки; это есть в некотором роде оккультизм, который я считаю вредным. ([50], с. 399.)

Непрестанные, нескончаемые поиски абсолюта могут показаться менее привлекательными, чем реальное достижение абсолюта, но Гете уже давно усмотрел в этих поисках спасение человеческого рода:

> Wer immer strebend sich bemüht
> Den können wir erlösen.
> [Спасти можно лишь того,
> Кто неустанно борется за свое спасение.]

Не будучи столь уверенным в существовании абсолютных истин, один из выдающихся математиков современности Андре Вейль утверждает, что занятия математикой необходимо продолжать, хотя математика теперь уже не то прежнее величественное творение человеческой мысли. Вот что он говорит:

> Для нас, чьи плечи ноют под тяжестью наследия греческой мысли, кто идет по стопам героев эпохи Возрождения, цивилизация немыслима без математики. Подобно постулату о параллельности, постулат о том, что математика выживет, утратил свою «очевидность». Но если первый постулат перестал быть необходимостью, то без второго мы жить бы не смогли.

---

[94] Гильберт Д. *Основания геометрии*. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

Будущее математики никогда не внушало особых надежд. Природа математики никогда не была вполне понятной. Тонкий анализ очевидного привел к нескончаемой цепи осложнений. Но математика продолжает бороться с проблемами, возникающими в ее основаниях. Как сказал Декарт, «я буду продолжать до тех пор, пока не установлю нечто несомненно истинное или по крайней мере не устраню все сомнения в том, что ничего несомненно истинного не существует».

Если верить Гомеру, боги обрекли царя Коринфа Сизифа на тяжкое наказание после смерти: он должен вкатывать на гору огромный камень; но как только камень почти достигает вершины, он начинает скатываться вниз, к подножию горы. Сизиф не мог питать никаких иллюзий, что его напрасный труд когда-нибудь завершится. Математики почти инстинктивно мобилизуют всю свою волю и мужество, чтобы дополнить и укрепить основания своей науки. Их борьба также может оказаться нескончаемой, а труд – напрасным. Но современные Сизифы не сдаются.

XV. Авторитет природы

Я возношу молитву, твердо зная,
Что не предаст Природа никогда
Ее так верно любящего сердца.
Уордсворт

Для получения новых результатов математики могут избрать любое из множества соперничающих направлений. Поскольку внутренних критериев, позволяющих отдать предпочтение одному направлению перед другим или как-то обосновать принятое решение, не существует, математик вынужден при выборе направления руководствоваться внешними соображениями. Наиболее важным из них по-прежнему остается традиционный и наиболее объяснимый довод в пользу создания новой и развития уже существующей математики – ее ценность для других наук. Ставшую ныне очевидной неопределенность в вопросах, связанных с истинными основаниями математики, и зыбкость ее логики можно в какой-то мере игнорировать (хотя и не исключить полностью), если акцентировать внимание на внешних приложениях математики. Последуем же завету Эмерсона и «построим в материи дом для ума». Из априорных соображений невозможно установить, будут ли получаемые математические теоремы непосредственно применимы, или же они, что тоже неплохо, в сочетании с разумными физическими принципами приведут к физически значимым результатам. Приложения служат своего рода практическим критерием, которым мы проверяем математику. Теоремы, приводящие к правильным результатам, с каждым разом можно применять всё увереннее. Например, если мы, постоянно используя аксиому выбора, получаем подтверждаемые физическим экспериментом результаты, то сомнения в приемлемости этой аксиомы если и не рассеятся полностью, то по крайней мере уменьшатся.

С исторической точки зрения апелляция к приложениям не означает радикального изменения сути математики, как это может показаться современным блюстителям математической строгости. Математические понятия и аксиомы берут свое начало из наблюдений реального мира. Даже законы логики, как теперь стало ясно, являются не более чем продуктом опыта. Проблематика, обдумывая которую математик приходит к своим теоремам, и даже наводящие соображения, касающиеся методов доказательства теорем, черпаются из того же источника. О ценности, или значимости, результатов, полученных из аксиом, лет семьдесят пять назад судили по пригодности этих результатов для описания реального мира. Почему бы и теперь не судить о правильности математики в целом по тому, насколько хорошо она продолжает описывать и предсказывать природные феномены? Если правильность математики оценивать по ее приложимости к реальному миру, то никакого абсолютного критерия истинности нет и быть не может. Теорема может великолепно сработать в n случаях и дать осечку в (n+1)-м случае. Одно-единственное расхождение с опытом полностью дисквалифицирует теорему. Видоизменяя формулировку теоремы, математики могут прийти (и неоднократно приходили) к поправкам, делающим новый вариант вполне применимым – а значит, «истинным».

Среди тех, кто отстаивал наличие у математики эмпирических оснований и критериев, видное место занимал Джон Стюарт Милль (1806–1873). Он допускал, что математика обладает большей общностью, чем некоторые физические науки, но видел «оправдание» математики лишь в том, что ее утверждения проверены и подтверждены шире и основательнее, чем утверждения физических наук. Следовательно, заключал Милль, глубоко заблуждаются те, кто считает, что математические теоремы качественно отличаются от подтвержденных гипотез и теорий других наук. Причина подобного заблуждения заключается в том, что эти люди считают математические теоремы вполне достоверными, а физические теории – весьма вероятными или всего лишь подкрепляемыми опытом.

Милль обосновал свои взгляды философскими соображениями задолго до того, как возникла современная дискуссия по основаниям математики. Тем больше оснований быть прагматиками у тех, кто работал и работает в основаниях математики. Как заметил Гильберт, «и познаешь их по плодам их». Еще одно высказывание Гильберта по этому поводу – «Успех здесь [в математике] необходим; он является высшей инстанцией, перед которой все преклоняются» ([50][95], с. 340) – относится к 1925 г.

Мнение Гильберта разделяет один из выдающихся специалистов по основаниям математики поляк Анджей Мостовский. На конгрессе, состоявшемся в Польше в 1953 г., он заявил:

> Единственная непротиворечивая точка зрения, согласующаяся не только со здравым смыслом, но и с математической традицией, сводится по существу к допущению того, что источник и высший смысл понятия числа (не только натурального, но и вещественного) лежит в опыте и практической применимости. То же относится и к понятиям теории множеств в том объеме, в каком они необходимы для классических областей математики.

Мостовский идет дальше. Он утверждает, что математика – естественная наука. Ее понятия и методы восходят к опыту, и любые попытки обосновать математику безотносительно к ее естественнонаучному происхождению, приложениям и даже истории обречены на провал.

Более удивительно другое: с тезисом, провозглашающим, что о «правильности» математики можно судить по степени ее применимости к физическому миру, согласился интуиционист Вейль. Вейль внес огромный вклад в математическую физику,[96] поэтому, сколь ни твердо он отстаивал интуиционистские принципы, ему, разумеется, не хотелось жертвовать полезными результатами из-за чрезмерной приверженности этим принципам. В своей «Философии математики и естественных наук» (1949) Вейль сделал такое признание:

> Насколько более убедительны и ближе к фактам эвристические аргументы и последующие систематические построения в общей теории относительности Эйнштейна или в квантовой механике Гейзенберга–Шредингера. Подлинно реалистическая математика наряду с физикой должна восприниматься как часть теоретического описания единого реального мира и по отношению к гипотетическим обобщениям своих оснований занять такую же трезвую и осторожную позицию, какую занимает физика.

Вейль открыто выступает за то, чтобы рассматривать математику как одну из естественных наук. Математические теоремы, подобно физическим утверждениям, могут быть формально не обоснованными, но экспериментально проверяемыми гипотезами. Иногда они подлежат переделке, но надежным критерием их правильности служит их соответствие реальности.

Еще дальше пошел выдающийся представитель формалистской школы Хаскелл Б. Карри. В его «Основаниях математической логики»[97] (1963) мы читаем:

---

[95] Гильберт Д. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

[96] **Яглом:** Так, от Вейля идет, в частности, важная идея классификации физических объектов по свойственным им группам симметрии [121: Weyl H. *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. – Leipzig: Leubner, 1928. (Существуют более поздние издания и переводы на другие языки.)] (независимо от Вейля эту идею выдвинул в 1963 г. американский физик венгерского происхождения Юджин (Эуген) Вигнер (1963), уже после смерти Вейля удостоенный за нее Нобелевской премии по физике); Вейлю же принадлежит первый, притом выдающийся, учебник [122: Weyl H. *Raut, Zeit, Materie*. – Berlin: Springer, 1918. (Существуют более поздние издания и переводы на другие языки.)] общей теории относительности, содержащий свежие физические идеи, сыгравшие большую роль в дальнейшем прогрессе физической науки (ср., например, [123: Бергман П. *Единые теории поля*. – УФН, т. 132, вып. I, 1980, с. 177–190.], а также [124: Яглом И.М. *Герман Вейль*. – М.: Знание, 1967.]).

[97] **Яглом:** Учебник математической логики [125: Карри Х.Б. *Основания математической логики*. – М.: Мир, 1969.] отличается от многих других пособий широким обсуждением (гл. 1–4, с. 17–244) общих вопросов (смежных между математической логикой и философией математики) обоснования математической науки; с этой точки зрения вдумчивому читателю, желающему глубже ознакомиться с затронутыми в настоящей книге вопросами, вполне можно порекомендовать книгу [125: Эйнштейн А. Собрание

Нужна ли математике для своего оправдания абсолютная надежность? Зачем, скажем, нам так уж нужно быть уверенными в непротиворечивости теории или в том, что ее можно вывести с помощью абсолютно определенной интуиции чистого времени, прежде чем использовать эту теорию? Ведь ни к какой другой науке мы не предъявляем таких требований. В физике, например, теории всегда гипотетичны; мы принимаем теорию, коль скоро на ее основе можно делать полезные предсказания, и видоизменяем или отвергаем ее, коль скоро этого сделать нельзя. Именно так случалось и с математическими теориями, когда в связи с обнаружением в них противоречий приходилось модифицировать не оспариваемые до того времени доктрины. Так почему мы не можем поступать так же и в будущем? ([125][98], с. 38–39.)

Выдающийся математический логик Уиллард Ван Орман Куайн, предпринявший много безуспешных попыток упростить «Основания математики» Рассела и Уайтхеда, также выразил желание (по крайней мере, заявил о нем сравнительно недавно) воспользоваться как критерием математических результатов физической истинностью следующих из них выводов. В работе 1958 г., опубликованной в серии «Философское значение современной логики» Куайн утверждал:

Теорию множеств и всю математику разумнее представлять себе так, как мы представляем теоретические разделы естественных наук, – состоящими из истин, или гипотез, правильность которых подтверждается не столько сиянием безупречной логики, сколько косвенным систематическим вкладом, который они вносят в организацию эмпирических данных в естественных науках.

Джон фон Нейман, внесший весомый вклад в развитие формализма и теории множеств, охотно воспользовался тем же выходом из тупика, в котором оказалась современная математика. В знаменитой статье «Математик» (1947) фон Нейман, в частности, попытался объяснить, почему большинство математиков продолжают пользоваться классической математикой, хотя ни одной из нескольких школ в основаниях математики не удалось убедительно обосновать ее:

В конце концов именно классическая математика позволяет получать результаты, которые как полезны, так и красивы, и хотя прежней уверенности в ее надежности не стало, классическая математика всё же покоится на столь же прочном основании, как, например, существование электрона. Следовательно, тот, кто принимает естественные науки, не может не принять классическую систему математики. ([105][99], с. 92.)

Итак, статус математики ничем не лучше статуса физики.

Даже Рассел, провозгласивший в 1901 г., что здание математической истины – логической и одновременно физической – останется незыблемым навеки, в работе 1914 г. был вынужден признать, что «наше знание геометрии физического мира носит синтетический, а не априорный характер». Иначе говоря, геометрия не следует из одной лишь логики. Во втором издании «Оснований математики» (1926) Рассел пошел на еще большие уступки. По его словам, в правильность логики и математики так же, как и в правильность уравнений Максвелла, мы «верим потому, что из наблюдений убеждаемся в правильности некоторых логических следствий, к которым они приводят».

Еще более удивительное утверждение высказал в 1950 г. Гёдель:

Роль пресловутых «оснований» сравнима с той функцией, которую в физических теориях выполняют поясняющие что-либо гипотезы... Так называемые логические или теоретико-множественные основания теории чисел или любой другой вполне сформировавшейся математической теории по существу объясняют, а не обосновывают их, так же, как в физике, где истинное предназначение аксиом состоит в объяснении явлений, описываемых физическими теоремами, а не в обосновании этих теорем.

научных трудов. – М.: Наука, 1965 (т.1), 1966 (т.2), 1967 (т.4).] наряду, скажем, с классическим сочинением [86*: Tarski A. *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, 2nd ed. – New York: Oxford University Press, 1946. [Русский перевод 1-го изд.: Тарский А. *Введение в логику и методологию дедуктивных наук*, – М.: ИЛ, 1948.]] и довольно сложными, но высокосодержательными книгами [81: Манин Ю.И. *Доказуемое и недоказуемое*. – М.: Советское радио, 1979; *Вычислимое и невычислимое*. – М.: Советское радио, 1980.].

[98] Карри Х.Б. *Основания математической логики*. – М.: Мир, 1969.

[99] Нейман фон Дж. *Математик*. – Природа, 1983, № 2, 88–95.

Итак, все эти ведущие ученые, работающие в основаниях математики, сходятся на том, что попытка создать приемлемую для всех, логически безупречную математику провалилась. Математика – одна из разновидностей человеческой деятельности, и она подвержена всем слабостям и порокам, присущим всему человеческому. Любая формальная псевдологическая система не более чем псевдоматематика, фикция, даже легенда, хотя и не лишенная оснований.

Тот же критерий «правильности» математики приняли как рабочую гипотезу и многие другие выдающиеся математики, логики и философы, занятые вопросами оснований математики. Правильность математики достаточно твердо (хотя, возможно, и не абсолютно надежно) гарантируется ее применимостью; даже если время от времени в здание математики приходится вносить кое-какие поправки, то и это ничего не меняет по существу дела. Как сказал Уордсворт, «природной тверди верит ум, что строит навсегда».

Может показаться, что, принимая прагматический критерий применимости математики к естественным наукам, логицисты, формалисты, интуиционисты и представители теоретико-множественного направления в основаниях математики отказались тем самым от своих собственных принципов и убеждений. Но хотели они того или не хотели, принятый ими критерий являлся критерием истинности математики во все времена. Что заставляло верить в свою науку математиков, работавших в длившееся не одно столетие смутное время ее нелогичного развития (гл. V–VIII)? Не подозревая, что предлагаемые доказательства страдают дефектами, они считали, что им удалось получить некие результаты. Им было известно, что ни отрицательные, ни иррациональные, ни комплексные числа, как и покоящиеся на этом шатком основании алгебра и анализ, не имели под собой никакого логического фундамента. Но математики продолжали работать, считая, что применимость полученных ими результатов сама по себе является гарантией их правильности.

Надежда на применимость математики к естественным наукам (можно сказать, к эмпирическим данным) привела к результату, о котором стоит рассказать. Евклидов идеал предполагал, что, начав с аксиом, истинность которых не вызывает сомнений, мы затем станем выводить из них теоремы по раз и навсегда установленным логическим правилам, исключающим любую ошибку в рассуждениях. Полагаясь на применимость к физике, мы обращаем вспять всю концепцию математики. Если полученные на завершающем этапе заключения истинны в силу их применимости, то аксиомы по крайней мере разумны, хотя, возможно, и не единственны (могут существовать другие аксиомы, приводящие к тем же заключениям). Истинность, понимаемая как полезность (или применимость) математики, против течения не поплывет.

Лидерам различных школ в основаниях математики случалось иногда надолго отходить от собственных убеждений. Так, один из основателей интуиционизма Леопольд Кронекер получил превосходные результаты в области алгебры, никак не согласующиеся с его собственными стандартами строгости. Как заметил Пуанкаре, Кронекер предал забвению собственную философию. Брауэр, провозгласив философию интуиционизма в своей диссертации 1907 г., следующее десятилетие посвятил плодотворным исследованиям в области топологии, в которых полностью игнорировал интуиционистские доктрины.

Итогом всей этой бурной и разнообразной деятельности стал вывод о том, что правильная математика должна определяться не основаниями (каковыми бы те ни были), безошибочность которых можно и оспаривать, – о «правильности» математики следует судить по ее применимости к реальному миру. Математика – такая же эмпирическая наука, как и ньютоновская механика. Математика правильна, лишь покуда она действует, а если что-то не срабатывает, то в нее необходимо вводить надлежащие поправки. Математика не свод априорных знаний, каковой ее считали в течение более чем двух тысячелетий; она не абсолютна и не неизменна.

Но коль скоро математику надлежит рассматривать как одну из естественных наук, важно досконально представить себе, как устроены и как работают естественные науки. В любой такой науке производят наблюдения над природными явлениями или ставят специально организованные эксперименты, а затем на основании полученных результатов строят теории – движения, света, звука, теплоты, электричества, химического строения вещества и т.д. Все эти теории созданы человеком, и правильность их оценивается по соответствию сделанных на их основе предсказаний с последующими наблюдениями и экспериментами. Если предсказания подтверждаются (во всяком случае, в пределах ошибки эксперимента), то теория считается верной. Тем не менее впоследствии такая теория может быть опровергнута; поэтому ее всегда надлежит рассматривать как «полуэвристическую» теорию (где, впрочем, доли «теоретичности» и «эвристичности» могут варьироваться в весьма широких пределах), а не как абсолютную истину, входящую неотъемлемой составной частью в структуру физического мира. Мы привыкли к подобному взгляду на естественнонаучные теории, поскольку нам неоднократно приходилось быть свидетелями того, как одни естественнонаучные теории (корпускулярная теория света, флогистон, эфир, в какой-то степени даже ньютонова механика и волновая теория света Гюйгенса) опровергались и уступали место новым теориям.[100] Единственная причина, по которой подобный взгляд не распространялся на математику, состояла, как отметил Милль, в том, что элементарная арифметика и евклидова геометрия сохраняли эффективность на протяжении многих веков и люди ошибочно приняли эту эффективность за абсолютную истинность.[101] Однако не следует упускать из виду, что любая область математики предлагает только такую теорию, которая дееспособна. Покуда она эффективна, мы можем следовать ей, но впоследствии нам, возможно, понадобится более усовершенствованный вариант теории. Математика выполняет миссию посредника между человеком и природой, между внутренним миром человека и тем, что его окружает. Математика – это отличающийся необычайной смелостью линий грандиозный мост между нами и внешним миром. Горько сознавать, что концы его не закреплены ни в реальности, ни в умах людей.

Разум обладает способностью прозревать истину только в том, что строит по собственному плану и, хотя начать построение он может, руководствуясь своими идеями, на более позднем этапе ему необходимо с помощью эксперимента выведать у природы, насколько удачны предложенные им идеи. Вот тогда и наступает время для теории и для проверки ее соответствия реальному миру. В основном математика отличается от естественных наук одной особенностью: в то время как в физике на смену одним теориям приходили другие, радикально новые, в математике значительная часть логики, теории чисел и классического анализа успешно функционировали на протяжении многих веков. Более того, они применимы и поныне. Независимо от того, являются ли названные выше составные части математики абсолютно надежными или нет, они отлично нам служат – у нас нет ни оснований, ни права усомниться в них. Все эти разделы математики можно было бы назвать «квазиэмпирическими», ибо эмпирические их истоки потонули в глубине веков и для нас почти неразличимы.

В подтверждение сказанного приведем пример из истории дифференциального и интегрального исчисления. Несмотря на несмолкавшие споры о логических основах исчисления, как методология оно оказалось вполне успешным. По иронии судьбы именно теория бесконечно малых Лейбница (а не весь аппарат математического анализа) во второй половине нашего столетия неожиданно получила строгое обоснование (так называемый нестандартный анализ; см. гл. XII).

Критерием применимости к внешнему миру можно воспользоваться даже для проверки аксиомы выбора. Сам Цермело в работе 1908 г. утверждал; «Каким образом Пеано приходит к своим основополагающим принципам ... если в конечном счете он не может их доказать? Ясно, что он получает их, анализируя способы логического вывода, признанные правильными в ходе исторического развития, и отмечая, что эти принципы интуитивно очевидны и необходимы для науки...». Отстаивая правомерность использования аксиомы выбора, Цермело ссылался на успехи, достигнутые с помощью этой аксиомы. В работе 1908 г. он отметил, сколь полезной оказалась (даже тогда) аксиома выбора в теории трансфйнитных чисел, в теории вещественного числа Дедекинда (см. [46][102] и [47][103]) и в решении более специальных проблем анализа.

Лидеры различных математических школ и направлений, рекомендуя использовать приложения к естественным наукам как путеводную нить и критерий доброкачественности математики, руководствуются не только желанием выбрать одно из течений в основаниях математики. Все они сознают, что силы математики в решении физических проблем неизмеримо

---

[100] **Яглом:** При этом, разумеется, следует различать, скажем, *опровержения* теорий флогистона или эфира, полностью отброшенные современной наукой, и *уточнения* ньютоновской механики и гюйгенсовской оптики, не отменяющие, а лишь дополняющие эти выдающиеся достижения науки XVII в.

[101] **Яглом:** По поводу возможных вариантов геометрической структуры физического пространства, отличных от классической геометрии Евклида, см. гл, IV. Что касается случаев, в которых может оказаться неприемлемой обычная арифметика, то здесь можно, например, порекомендовать читателю неконкретную, но весьма выразительно написанную заметку [30: Рашевский П.К. *О догмате натурального ряда*. – Успехи математических наук, 28, вып. 4 (172), 1973, с, 243–246.].

[102] Дедекинд Р. *Непрерывность и иррациональные числа*. – Одесса: Матезис, 1923.

[103] Дедекинд Р. *Что такое числа и для чего они служат*. – Казань: Изд-во Императорского университета, 1905.

возросли, и считают недопустимым игнорировать услуги, оказываемые математикой человечеству в познании мира, только потому, что сохранились разногласия в основаниях математики. Хотя многие математики на протяжении без малого последних ста лет и перестали заниматься естественнонаучными приложениями, величайшие из математиков XX в. – Пуанкаре, Гильберт, фон Нейман и Вейль – внесли существенный вклад в современную физику.

К сожалению, большинство математиков – в силу указанных ранее (гл. XIII) причин, которые следует считать скорее предосудительными, чем похвальными, – и поныне не работают в области приложений своей науки; вместо этого они продолжают во всё возрастающем темпе создавать всё новые теоремы чистой математики. Некоторое представление о размахе современных исследований по (чистой и прикладной) математике можно получить по журналу *Mathematical Review*,[104] печатающему краткие рефераты наиболее значительных новых работ, – ежемесячно в этом журнале публикуется около 2500 рефератов, т.е. около 30˙000 рефератов в год.

Можно было бы думать, что тупик, в который зашел нескончаемый спор о том, какую именно математику можно считать «правильной» и какая школа математической мысли является наиболее последовательной, а также множество направлений, по которым математика может далее развиваться (даже оставаясь в рамках одного и того же течения в области оснований), позволит чистым математикам воспользоваться «паузой» и переключиться на решение проблем, связанных с основаниями математики, вместо того, чтобы достраивать в разных направлениях здание математической науки, игнорируя шаткость фундамента и рискуя тем, что новые теоремы могут оказаться логически неверными. Но этого не происходит, так что математики пренебрегают как философскими вопросами оснований, так и критерием практической приложимости. Почему же они так охотно работают в областях математики, далеких от приложений?

Это объясняется несколькими причинами. Многие математики ничего не знают о работах по основаниям математики. Стиль деятельности, выработавшийся у математиков XX в., типичен для подхода наших современников ко многим проблемам. Почти каждый математик работает в своем уголке на каком-то этаже огромного здания математики. Покуда те, кто занимается основаниями математики, копают всё глубже и глубже, дабы придать зданию устойчивость, обитатели верхних этажей продолжают оставаться на своих рабочих местах и выполнять свои функции. Специалисты по основаниям математики зарылись в землю так глубоко, что их просто не видно. Работающие в здании даже не знают, что кто-то заботится о его устойчивости, и не подозревают, что оно может рухнуть. Без тени сомнения они спокойно продолжают пользоваться традиционной математикой. Пребывая в счастливом неведении о вызовах, бросаемых господствующей доктрине, они трудятся в рамках этой доктрины, не интересуясь ни ее обоснованием, ни дополнительными подкреплениями, коими может служить критерий практики.

Другие математики прекрасно осведомлены о разногласиях и пробелах в основаниях математики, но предпочитают держаться в стороне от этих, как они называют, философских (в отличие от чисто математических) проблем. Таким математикам трудно поверить в существование сколько-нибудь серьезных проблем, связанных с основаниями математики, по крайней мере таких, которые касались бы их собственной деятельности. Они предпочитают оставаться верными обветшалому символу веры. Их неписаный девиз гласит: будем действовать так, словно за последние семьдесят пять лет ничего не произошло. Они говорят о доказательстве в некотором общепринятом смысле, хотя этот «зверь» не то что занесен в «Красную книгу», но просто давно вывелся, пишут и публикуют работы, словно никаких разногласий по поводу оснований математики не было и в помине. Единственное, что их интересует, – это число новых публикаций. Чем больше, тем лучше. Если «прагматики» и заботятся о надежных основаниях, то исключительно по воскресеньям, и даже в эти дни они либо возносят молитвы об отпущении грехов, либо воздерживаются от писания новых статей только для того, чтобы почитать, чем занимаются их соперники. Личное преуспевание – превыше всего, а будут ли основания математики надежными, не так уж важно.

Но разве нет власти, способной наложить запрет на массовое производство новых результатов на том основании, что, прежде чем продвигаться дальше, необходимо навести порядок в основаниях математики? Редакторы математических журналов могли бы |отказаться печатать новые работы. Но редакторы и рецензенты – такие же математики и находятся в таком

---

[104] **Яглом:** Сходные результаты может дать анализ русского РЖ «Математика» или немецкого (ГДР–ФРГ) журнала *Zentralblaft für Mathematik*.

же положении, как и большинство их коллег – и работы, хотя бы отдаленно отвечающие требованиям строгости, т.е. требованиям начала XX в., охотно принимаются к печати и публикуются. Если король голый и придворным также нечем прикрыть наготу, то появление голого человека никого уже не удивляет и не приводит в замешательство. Как сказал однажды Лаплас, прогресс стоит человеческому разуму меньших усилий, чем познание самого себя.

Как бы то ни было, проблемы оснований отступили для многих математиков на задний план. Правда, те, кто занимается математической логикой, уделяют основаниям математики значительное внимание, но математическую логику нередко считают лежащей за пределами собственно математики.

Не следует думать, будто все математики, игнорирующие проблемы оснований и действующие так, словно этих проблем никогда не было, достойны осуждения. Некоторые из них серьезно озабочены применением математики и в подтверждение своего *modus vivendi* [образа жизни] ссылаются на примеры из истории математики. Как мы уже видели (гл. V–VI), несмотря на отсутствие логических обоснований системы чисел и правил действий над ними, а также дифференциального и интегрального исчисления, по поводу чего на протяжении почти ста лет велись жаркие споры, математики продолжали использовать материал и получать новые результаты, эффективность которых не вызывала никаких сомнений. Приводимые доказательства были грубыми и даже содержали прямые ошибки. Когда обнаруживались противоречия, математики пересматривали свои рассуждения и вносили в них надлежащие изменения. Часто и исправленный вариант доказательства не был строгим даже по тем критериям, которые предъявлялись к строгости в конце XIX в. Если бы математики вздумали ждать до тех пор, пока им удастся достичь уровня строгости, они не смогли бы продвинуться ни на шаг.[105] Как заметил Эмиль Пикар, если бы Ньютон и Лейбниц знали, что непрерывные функции не обязательно должны быть дифференцируемыми, математический анализ никогда не был бы создан. В прошлом смелость и разумная осторожность приводили к наилучшим результатам.

Философ Джордж Сантаяна отметил в своей книге «Скептицизм и слепая вера», что скептицизм и сомнения важны для мышления, тогда как слепая вера важна для поведения. Значительная часть математических работ отличается высокими достоинствами, и, если мы хотим, чтобы эти достоинства приумножались, математические исследования необходимо продолжать. Слепая вера позволяет действовать без колебаний.

Лишь немногие математики проявили озабоченность по поводу спорных вопросов в основаниях математики, обесценивающих их работу. Эмиль Борель, Рене Бэр и Анри Лебег открыто выразили сомнения в пригодности теоретико-множественных методов, но продолжали пользоваться этими методами с некоторыми оговорками относительно надежности получаемых с их помощью результатов. Борель заявил в 1905 г., что охотно допускает всякого рода рассуждения о канторовских трансфинитных числах, поскольку эти числа оказываются весьма полезными в важных математических исследованиях. Но курс, избранный Борелем и некоторыми другими математиками, не следует расценивать как проявление своего рода математического легкомыслия. Прислушаемся, что сказал по этому поводу Герман Вейль, один из наиболее глубоких математиков современности и, несомненно, наиболее эрудированный из них:

> Сейчас мы менее, чем когда-либо, уверены в первичных основаниях математики и логики. Мы переживаем свой «кризис» подобно тому, как переживают его всё и вся в современном мире. Кризис этот продолжается вот уже пятьдесят лет [Вейль написал эти строки в 1946 г.]. На первый взгляд кажется, будто нашей повседневной работе он особенно не мешает. Тем не менее я должен сразу же признаться, что на мою математическую работу этот кризис оказал заметное практическое влияние: он направил мои интересы в области, которые я считал относительно «безопасными», и постоянно подтачивал энтузиазм и решимость, с которой я занимался своими исследованиями. Мой опыт, вероятно, разделили и другие математики, небезразличные к тому, какое место их собственная научная деятельность занимает в этом мире в общем контексте бытия человека, интересующего, страдающего и созидающего.

Коль скоро о степени обоснованности математики мы намереваемся судить по ее приложениям, сразу же возникает вопрос: насколько эффективна математика в этом отношении?

---

[105] **Яглом:** Здесь естественно вспомнить призыв Д'Аламбера, хорошо понимавшего шаткость оснований, на которых зиждилась математика его времени: «Работайте, работайте – понимание придет потом».

Рассказывая о математике, созданной и применявшейся до XIX в., мы привели несколько примеров, показывающих, сколь хорошо математика описывает и предсказывает явления реального мира (гл. III). Но в XIX в. математики, руководствуясь, несомненно, вескими доводами, ввели ряд понятий и теорий, не заимствованных непосредственно из природы и даже, казалось, противоречивших ей, например бесконечные ряды и неевклидовы геометрии, комплексные числа и кватернионы, необычные алгебры и бесконечные множества различной мощности, а также другие не менее странные объекты, которых мы не касались. Никаких оснований ожидать априори, что эти понятия и теории окажутся применимыми, разумеется, не было. Итак, прежде всего убедимся, что вся современная математика работает в приложениях, причем делает это великолепно.

Все величайшие достижения физики за последние сто лет – теория электромагнитного поля, теория относительности и квантовая механика – широко используют современную математику. Мы рассмотрим лишь теорию электромагнитного поля, наиболее знакомую неспециалистам. В первой половине XIX в. физики и математики провели многочисленные исследования электричества и магнетизма. Им удалось получить небольшое число математических законов, описывающих различные электрические и магнитные явления. В 60-е годы XIX в. Джеймс Клерк Максвелл поставил перед собой задачу собрать все эти разрозненные законы и выяснить, насколько они совместимы. Максвелл обнаружил, что для математической совместимости необходимо ввести в уравнения еще один член, который он назвал током смещения. Единственный физический смысл, который Максвелл мог придать току смещения, состоял в утверждении, что источник электричества (грубо говоря, проводник с током) должен быть источником электромагнитного поля (т.е. от него исходит – и распространяется в пространстве – электромагнитная волна). Испускаемые источником электромагнитные волны имеют различные частоты. Это могут быть радиоволны, улавливаемые антеннами наших радиоприемников и телевизоров, гамма-лучи, видимый свет, инфракрасное и ультрафиолетовое излучение. Так, из чисто математических соображений Максвелл предсказал существование огромного класса ранее не известных явлений и пришел к правильному выводу об электромагнитной природе света.

Электромагнитные волны, как и гравитация (гл. III), обладают одной замечательной особенностью: мы не имеем ни малейших представлений о том, какова их физическая природа. Существование этих волн подтверждается только математикой – и только математика позволила инженерам создать радио и телевидение, которые нашим предкам показались бы поистине сказочными чудесами.

То же самое можно сказать и о всевозможных явлениях атомной и ядерной физики. Математики и физики-теоретики говорят о полях (гравитационном, электромагнитном, поле электрона и других частиц) так, словно все эти поля – «материальные» волны, которые распространяются в пространстве и вызывают различные наблюдаемые эффекты, подобно, скажем, волнам на воде, бьющим о борт судна или разбивающимся о скалы. Но все эти поля не более чем фикции. Их физическая природа нам неизвестна. Они лишь отдаленно связаны с наблюдаемыми явлениями, например с ощущениями света, звука, движения материальных тел, с радио и телевидением. Беркли некогда назвал производную призраком навсегда ушедших величин. Современная физическая теория имеет дело с призраком материи.[106] Но, формулируя математические законы, которым подчиняются фиктивные поля, не имеющие наглядных аналогов в реальности, и выводя из этих законов логические следствия, мы приходим к выводам, допускающим при надлежащем переводе на язык физики проверку с помощью чувственных восприятий.

Фиктивный характер современной науки подчеркивал еще в 1931 г. Альберт Эйнштейн:

> Согласно ньютоновской системе, физическая реальность характеризуется понятиями пространства, времени, материальной точки и силы (взаимодействия материальных точек)...
>
> После Максвелла физическая реальность мыслилась в виде непрерывных, не поддающихся механическому объяснению полей, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Это изменение понятия реальности является наиболее глубоким и плодотворным из тех, которое испытала физика со времен Ньютона...

---

[106] **Яглом:** Сложность трактовки материи в квантовой механике (упомянутые в этой книге «размазанность» элементарных частиц в задание их исключительно с помощью абстрактных математических конструкций) не отменяет, скажем, понятия массы, играющего основную роль как в физике макромира, так и в описании колоссальных объектов современной астрофизики и в физике микромира.

> Нарисованной мною картине чисто фиктивного характера основных представлений научной теории не придавалось особого значения в XVIII и XIX вв. Но сейчас она приобретает всё большее значение, по мере того, как увеличивается в нашем мышлении расстояние между фундаментальными понятиями и законами, с одной стороны, и выводами, к которым они приводят в отношении нашего опыта, с другой стороны, по мере того как упрощается логическая структура, уменьшается число логически независимых концептуальных элементов, необходимых для поддержания структуры. ([126][107], т. 4, с. 136–139.)

Современную науку неоднократно восхваляли за то, что, дав рациональные объяснения явлений природы, она исключила духов, дьяволов, ангелов, демонов, мистические силы и анимизм. К этому необходимо добавить теперь, что, постепенно изгоняя физическое и интуитивное содержание, апеллирующее к нашему чувственному восприятию, наука исключила и материю. Теперь она имеет дело только с синтетическими и идеальными понятиями, такими, как поля и электроны, о которых единственно, что нам известно, это управляющие ими математические законы. После длинных цепочек дедуктивных умозаключений наука сохраняет лишь небольшой, но жизненно важный контакт с чувственными восприятиями. Наука – это рационализованная фикция, и рационализована она математикой.

Выдающийся физик Генрих Герц (1857–1894), первым экспериментально подтвердивший предсказание Максвелла о том, что электромагнитные волны могут распространяться в пространстве, был настолько восхищен могуществом математики, что воскликнул: «Трудно отделаться от ощущения, что эти математические формулы существуют независимо от нас и обладают своим собственным разумом, что они умнее нас, умнее тех, кто открыл их, и что мы извлекаем из них больше, чем было в них первоначально заложено».

Роль математики в изучении природы подчеркивал Джеймс Джинс (1877–1946). В книге «Загадочная Вселенная» он утверждал: «Самый важный факт состоит в том, что все картины природы, рисуемые наукой, которые только могут находиться в согласии с данными наблюдений, – картины математические... За пределы математических формул мы выходим на свой страх и риск». Физические понятия и механизмы подсказывают, как построить математическое описание явлений, после чего, как ни парадоксально, становится ясно, что вспомогательные физические средства не более чем фантазии и что только математические уравнения надежно следуют явлениям.

Аналогичную мысль Джинс высказал и в книге «Между физикой и философией». С помощью моделей или картин, доступных нашим органам чувств, человеческий разум не в силах постичь, как функционирует природа. Нам не дано понять, что представляют собой явления, и приходится ограничиваться описанием схем явлений на математическом языке. Урожай, пожинаемый физикой, всегда состоит из набора математических формул. Подлинная сущность материальной субстанции непознаваема.

Итак, как мы видим, роль математики в современной науке отнюдь не сводится к почетным обязанностям главного инструмента познания. О математике нередко говорят, что она резюмирует и систематизирует в символах и формулах данные физических наблюдений или экспериментов, извлекая из формул дополнительную информацию, недоступную прямому наблюдению и эксперименту. Такое описание умалчивает о многом из того, что делает математика в естественных науках. Математика выражает саму суть естественнонаучных теорий, и приложения чисто математических понятий позволили в XIX–XX вв. получить гораздо более сильные и неожиданные результаты, чем это удавалось сделать в предшествующие столетия математикам, оперировавшим с математическими понятиями, непосредственно связанными с физическими явлениями. Хотя достижениями современной науки – радио, телевидением, авиацией, телефоном, телеграфом, высококачественной звукозаписывающей и звуковоспроизводящей аппаратурой, гамма-лучами, транзисторами, атомной энергией (и, к сожалению, атомными бомбами!), если говорить только о некоторых наиболее известных достижениях, – мы обязаны не только математике, роль математики намного больше и оценить ее гораздо труднее, чем вклад экспериментальной науки.

Френсис Бэкон в XVII в. скептически относился к таким теориям, как астрономические теории Коперника и Кеплера. Бэкон опасался, что философские убеждения или религиозные верования (например, тезисы о том, что господь бог стремится к простоте или что природа построена богом по плану, основанному на математических принципах) сказываются на форми-

[107] Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1965 (т.1), 1966 (т.2), 1967 (т.4).

ровании этих теорий в большей степени, чем согласие с наблюдениями или экспериментом. Отношение Бэкона к теориям, несомненно, имеет некие разумные основания, но современные математические теории доминируют в физике только потому, что они эффективны. Разумеется, согласие с наблюдениями является непременным условием принятия любой математической теории в физике.

Итак, на любой вопрос о том, работает ли математика, мы можем с уверенностью дать положительный ответ. Гораздо труднее ответить на вопрос, почему она столь эффективна. Во времена античности и много столетий спустя математики считали, что знают верные приметы того, где следует искать «золото» (математика была сводом истин о физическом мире, и заложенные в ее основу логические принципы также были абсолютными истинами), и поэтому копали энергично, с размахом и настойчиво. Им удалось добиться замечательных успехов. Но теперь-то мы знаем, что они принимали за золото какой-то совсем другой, пусть даже и не менее драгоценный, металл. Этот «металл» позволял с замечательной точностью описывать явления природы. Вопрос о том, почему он служил так хорошо, требует особого рассмотрения. Действительно, почему некая независимая, абстрактная конструкция, плод «точной» мысли, должна соответствовать физическому миру человека?

Один из возможных ответов состоит в том, что математические понятия и аксиомы подсказаны человеку опытом. Даже законы логики человек заимствовал из опыта; поэтому они и согласуются с опытом. Но такой ответ чрезмерно упрощает суть дела. Разумеется, он позволяет объяснить, почему, прибавив к пятидесяти коровам еще пятьдесят, мы получим сто коров. В арифметике и в элементарной геометрии повседневный опыт может подсказать правильные аксиомы, и используемая здесь логика не выходит за рамки обычного здравого смысла. Но в алгебре, дифференциальном и интегральном исчислении, в теории дифференциальных уравнений и в других более «высших» областях математики были созданы математические понятия и методы, далеко выходящие за рамки повседневного опыта.

Помимо этих примеров «неэмпирической» математики необходимо также иметь в виду, что математическая прямая состоит из несчетного множества точек. В математическом анализе используется понятие времени, состоящего из мгновений, «спрессованных», как числа на вещественной прямой. Понятие производной (гл. VI) было навеяно физическим представлением о скорости за некоторый «бесконечно малый» промежуток времени; однако описывающая скорость производная соответствует мгновенной скорости, т.е. понятию, которое трудно признать интуитивно ясным. Разнообразие типов бесконечных множеств вовсе не подсказано повседневным опытом, тем не менее оно используется в математических рассуждениях и так же необходимо для удовлетворительной математической теории, как физические тела для чувственного восприятия. Математика ввела в научный обиход такие понятия, как, скажем, электромагнитное поле, физическая природа которого полностью не ясна и по сей день.

Даже если законы логики и некоторые основные физические принципы выведены из опыта, в процессе длинного математического доказательства, требующегося для получения физически значимого заключения, эти законы используются однократно – и всё наше доказательство опирается только на логику. Чисто математические рассуждения позволяют предсказывать некоторые явления. Так, на основе математического предсказания была открыта планета Нептун. Означает ли это, что природа подтверждает логические принципы? Иначе говоря, существуют ли (как угодно открытые) законы логики, которые говорили бы, как должна вести себя природа в тех или иных случаях? То, что целые теории, состоящие из сотен теорем и тысяч дедуктивных умозаключений об абстрактных понятиях, всё же отклоняются от реальности не более, чем исходные аксиомы, убедительно свидетельствуют о способности математики описывать и предсказывать реальные явления с поразительной точностью. Почему длинные цепочки, чисто умозрительных заключений должны приводить к выводам, столь хорошо согласующимся с природой? В этом – величайший парадокс математики.

Итак, перед человеком стоит загадка двоякого рода. Почему математика безотказно, срабатывает даже там, где заключение, требующее сотен дедуктивных выводов, оказывается столь же применимым, как и исходные аксиомы, хотя физические явления описываются не на математическом, а на физическом языке? И почему математика эффективна там, где мы располагаем лишь непроверенными гипотезами о сущности физических явлений и где при описании этих явлений вынуждены почти целиком полагаться на одну математику? От этих вопросов нельзя бездумно отмахнуться: слишком уж многое в нашей науке и технике зависит от математики. Может быть, эта наука, хотя ее и используют как непобедимое знамя истины, одерживает свои победы с помощью какой-то таинственной внутренней силы и действительно наделена какими-то волшебными чарами?

Этот вопрос интересовал и продолжает интересовать многих. Неоднократно задавал его себе и Альберт Эйнштейн в книге «Вокруг теории относительности» (1921):

> В этой связи возникает вопрос, который волновал исследователей всех времен. Почему возможно такое превосходное соответствие математики с реальными предметами, если сама она является произведением только человеческой мысли, не связанной ни с каким опытом? Может ли человеческий разум без всякого опыта, путем только одного размышления понять свойства реальных вещей?
>
> ...Если теоремы математики прилагаются к отражению реального мира, они не точны; они точны до тех пор, пока они не ссылаются на действительность. ([126][108], т. 2, с. 83.)

Далее Эйнштейн поясняет, что аксиоматизация математики сделала это различие очевидным. Хотя Эйнштейн понимал, что аксиомы математики и принципы логики выведены из опыта, его интересовало, почему длинная и сложная цепь чисто логических рассуждений, которые не зависят от опыта и используют понятия, созданные человеческим разумом без всякой апелляции к эксперименту и природным феноменам, может приводить к выводам, находящим столь широкие применения.

Современное объяснение необычайной эффективности математики восходит к Иммануилу Канту. Кант утверждал (гл. IV), что мы не знаем и не можем знать природы. Мы располагаем лишь чувственными восприятиями. Наш разум, обладая врожденными интуитивными представлениями о пространстве и времени, организует чувственные восприятия в соответствии с тем, что диктуют эти врожденные представления. Так, наши пространственные восприятия мы организуем в соответствии с законами евклидовой геометрии, потому что этого требует наш разум. Упорядоченные разумом, пространственные восприятия продолжают подчиняться законам евклидовой геометрии. Разумеется, Кант заблуждался, считая евклидову геометрию единственно возможной, но главное в его учении заключалось в другом: человеческий разум определяет, как ведет себя природа при неполном (частичном) объяснении. Разум формирует наши концепции пространства и времени. Мы видим в природе то, что предопределено нам видеть нашим разумом.

Взглядов, близких к воззрениям Канта, но выходящих далеко за их пределы, придерживался один из выдающихся физиков нашего времени – Артур Стэнли Эддингтон (1882–1944). По мнению Эддингтона, человеческий разум решает, как должна себя вести природа:

> ...там, где наука ушла особенно далеко в своем развитии, разум лишь получил от природы то, что им было заложено в природу. На берегах неизвестного мы обнаружили странный отпечаток. Чтобы объяснить его происхождение, мы выдвигали одну за другой остроумнейшие теории. Наконец нам всё же удалось восстановить происхождение отпечатка. Увы! Оказалось, что это наш собственный след.

В XX в. предложенное Кантом объяснение эффективности математики было подробно разработано Уайтхедом и поддержано Брауэром в работе 1923 г. Основная идея неокантианского объяснения состоит в том, что математика является не чем-то независимым от явлений, происходящих во внешнем мире, и применимым к ним, а элементом нашего способа восприятия явлений. Физический мир не дан нам объективно. Он является лишь нашей интерпретацией ощущений, конструкцией из них, и математика – основной инструмент, позволяющий упорядочивать ощущения. Из сказанного почти автоматически следует, что математика описывает внешний мир в той мере, в какой он известен человеку. То, что математическая организация ощущений оказывается одинаковой у многих людей, неокантианцы объясняют, ссылаясь на сходство в функционировании человеческого разума или на общность языка и культуры, вынуждающую различных людей принимать одну и ту же математическую схему. В пользу такого объяснения свидетельствует, например, господствующее положение, занимаемое евклидовой геометрией, хотя она не является последним словом в вопросах, связанных со структурой физического пространства. То же можно сказать и о гелиоцентрической системе мира. Своим происхождением она обязана отнюдь не расхождениями между птолемеевой теорией и наблюдениями. Кроме того, если бы теория Птолемея была сохранена и усовершенствована в

[108] Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1965 (т.1), 1966 (т.2), 1967 (т.4).

соответствии с новыми наблюдениями, то, несмотря на несколько большую математическую сложность, она могла бы служить потребностям астрономов и мореплавателей с не меньшим успехом, чем теория Коперника.

Суть изложенных выше взглядов сводится к следующему. Мы пытаемся абстрагировать из сложного переплетения явлений какие-то простые системы, свойства которых допускают математическое описание. Поразительно точным математическим описанием природы мы обязаны силе этой абстракции. Более того, мы видим лишь то, что позволяет нам видеть наша математическая «оптика». Ту же мысль мы находим, в частности, в «Прагматизме» философа Уильяма Джеймса: «Все грандиозные достижения математики и естественных наук... проистекают из нашего неутомимого желания придать миру в наших умах более рациональную форму, чем та, которую придал ему грубый порядок нашего опыта».

Один из современных авторов выразил эту мысль более «поэтически»: «Реальность – самая очаровательная из куртизанок, ибо делает то, что вы ожидаете от нее в данный момент, но она отнюдь не скала, на которой может утвердиться ваш дух, ибо соткана из призрачных видений. Реальность не существует вне ваших мечтаний, и зачастую это не более чем блик, отбрасываемый вашими мыслями на лицо природы».

Однако кантовское объяснение, согласно которому мы видим в природе лишь то, что разрешает нам видеть наш разум, не дает полного ответа на вопрос, почему математика эффективна. Такие достижения науки послекантовского периода, как создание теории электромагнитного поля, вряд ли можно отнести к порождениям чистого разума или способности разума упорядочивать ощущения. Ведь, скажем, радио и телевидение существуют вовсе не потому, что разум организовал какие-то ощущения в соответствии с некоторой «внутренней структурой», позволившей нам заняться разработкой радио и телевидения как следствий врожденных представлений разума о том, как природа должна себя вести.

Некоторые математики полагают, что математика автономна (гл. XIV), т.е. что ее аксиомы рождены чистым разумом или подсказаны опытом, а вся остальная математика построена на них уже независимо от опыта. Если встать на эту точку зрения, то как объяснить, почему математика применима к реальному миру, и особенно к физическим явлениям. На этот вопрос существует несколько ответов. Один из них состоит в том, что в математические аксиомы входят неопределяемые понятия, и, по-разному интерпретируя эти понятия, можно достичь согласия с описываемой физической ситуацией. Так, например, эллиптическая неевклидова геометрия применима и к обычным прямым на эллиптической плоскости, под которой можно понимать и обычные «физические» плоскости (ведь «в пределе» при очень большой длине каждой прямой эллиптическая геометрия переходит в евклидову!), и к геометрии на сфере, где «прямыми» служат дуги больших окружностей сферы, высекаемых из нее плоскостями, проходящими через центр сферы.

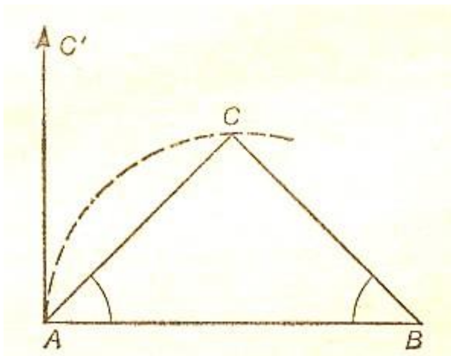


Рис. 15.1. Измерение расстояний методом триангуляции

Объяснение такого рода предложил Пуанкаре. Ему хотелось, чтобы математика была чисто дедуктивной наукой, которая лишь шаг за шагом выводит следствия из исходных аксиом. Используя правдоподобные аксиомы, возможно подсказанные его чувственными восприятиями, человек создает евклидову или неевклидову геометрии. Аксиомы и теоремы этих геометрий не являются ни эмпирическими, ни априорными истинами. Они истинны или ложны ничуть не больше, чем правильно или неправильно использование полярных координат по сравнению с прямоугольными. Пуанкаре назвал эти геометрии соглашениями для упорядочения и измерения тел или замаскированными определениями понятий. Мы используем ту геометрию, которая наиболее удобна. Тем не менее, подчеркивал Пуанкаре, мы всегда используем евклидову геометрию с прямыми, понимаемыми в обычном смысле, т.е. как натянутые нити или край линейки, потому что евклидова геометрия самая простая. Почему же теоремы геометрии должны быть применимы к физическому миру? Ответ, данный Пуанкаре, гласил: потому что мы изменяем физические законы, стремясь привести их в соответствие с математикой, «подогнать» под нее.

Чтобы проиллюстрировать выдвинутый Пуанкаре тезис, рассмотрим, как геодезисты определяют расстояния. Сначала они выбирают удобный базис – отрезок *AB* (рис. 15.1), длина которого измеряется мерной лентой. Чтобы определить расстояние *AC*, геодезист измеряет угол *CAB*, визируя в специальную трубу, установленную в точке *A*, направление на точку *C*, а затем наводя трубу на точку *B*. По лимбу на теодолите геодезист узнает, на какой угол была повернута труба, и тем самым измеряет угол *CAB*. Аналогичным образом геодезист измеряет угол *ABC*. Предполагается, что лучи света, идущие из *C* в *A* и из *B* в *A*, совпадают с отрезками прямых (натянутыми нитями), соединяющими точки *C* и *B* с точкой *A*. Но мы знаем, что аксиомы евклидовой геометрии согласуются с представлением о прямой как о натянутой нити, поэтому геодезист при вычислении расстояний *AC* и *BC* смело использует евклидову геометрию. Предположим теперь, что полученные геодезистом расстояния всё же оказались неверными. Как это могло произойти? Луч света, идущий из точки *C* в точку *A*, мог распространяться по траектории, показанной на рис. 15.1 пунктиром; при этом, чтобы поймать световой «зайчик», геодезисту приходилось наводить теодолит в точке *A* по касательной к описываемой лучом света траектории. Следовательно, теодолит мог быть наведен на точку *C'*, хотя геодезист видел точку *C*, и вместо угла *CAB* он измерил угол *C'AB*. В этом случае применение евклидовой геометрии могло бы дать неверные значения расстояний *AC* и *BC*.

Итак, возникает вопрос: по какому пути распространяются лучи света? Иногда они распространяются по «настоящим» (обычным) прямым, иногда изгибаются вследствие рефракции в атмосфере. Предположим, что геодезист определил расстояния *AC* и *BC* неверно. Не имея никаких оснований считать лучи света искривленными, он тем не менее счел их таковыми и в своих вычислениях обращался с отрезками *AC* и *BC* как с криволинейными. Введя надлежащие поправки в измерения углов в пунктах *A* и *B*, геодезист мог бы воспользоваться евклидовой геометрией и получить правильные значения расстояний *AC* и *BC*.

Приведем еще один пример, поясняющий тезис Пуанкаре о том, что математику можно подогнать под физическую реальность; этот пример касается вращения Земли. По мнению Пуанкаре, вращение Земли необходимо принять как физический факт, так как в астрономии это допущение приводит к более простой математической теории рассматриваемых явлений. Действительно, простота математической теории была единственным аргументом, который Коперник и Кеплер смогли привести в пользу гелиоцентрической системы по сравнению со старой геоцентрической системой Птолемея.

Развитая Пуанкаре философия науки обладает несомненным достоинством. Мы действительно пытаемся обходиться возможно более простой математикой и изменять в случае необходимости физические законы так, чтобы наши умозаключения находились в согласии с физическими фактами. Но современные физики и математики используют в качестве критерия простоту математической и физической теории в <u>целом</u>. И если для получения простейшей комбинированной [физико-математической] теорий нам придется воспользоваться неевклидовой геометрией, как это сделал Эйнштейн в своей теории относительности,[109] то мы пойдем на это.

Хотя объяснение эффективности математики, предложенное Пуанкаре, было более подробным, в определенных пределах он считал верным и кантовское объяснение, а именно ту его часть, где говорится, что согласие между математикой и природой создается человеческим разумом. Так, в «Ценности науки» Пуанкаре утверждает:

> Но та гармония, которую человеческий разум полагает открыть в природе, существует ли она вне человеческого разума? Без сомнения – нет; невозможна реальность, которая была бы полностью независима от ума, постигающего ее, видящего, чувствующего ее. Такой внешний мир, если бы даже он и существовал, никогда не был бы нам доступен. Но то, что мы называем объективной реальностью, в конечном счете есть то, что общо нескольким мыслящим существам и могло бы быть общо всем. Этой общей стороной, как мы увидим, может быть только гармония, выражающаяся математическими законами. ([1][110], с. 158.)

---

[109] **Яглом:** Здесь имеются в виду описывающая пространство-время специальной теории относительности (СТО) так называемая *псевдоевклидова геометрия Минковского* (см. по этому поводу, например, классическую книгу [127: Борн М. *Эйнштейновская теория относительности*. – М.: Мир, 1964.]) и *риманова* (точнее, *псевдориманова*) геометрия, являющаяся базисом общей теории относительности (см., скажем, основополагающую статью [128: Эйнштейн А. *Основы общей теории относительности*. – В кн.: [126], т.1, с. 452–504. [См. также: Лоренц Г. и др. *Принцип относительности*. – М.–Л.: ОНТИ, 1935, с. 231–305.]] или ту же книгу [127]).

[110] Пуанкаре А. *О науке*. – М.: Наука, 1983.

Есть и другое, несколько туманное, возможно, чрезмерно упрощенное объяснение эффективности математики. Согласно этому объяснению, существует объективный физический мир и человек стремится согласовать с ним свою математику. Мы вносим необходимые коррективы, когда приложения обнаруживают неточности математического описания или прямые ошибки в нашей математике. Подобную точку зрения Гильберт высказал в докладе на II Международном математическом конгрессе в 1900 г.:

> А между тем во время действия созидательной силы чистого мышления внешний мир снова настаивает на своих правах: он навязывает нам своими реальными фактами новые вопросы и открывает нам новые области математического знания. И в процессе включения этих новых областей знания в царство чистой мысли мы часто находим ответы на старые нерешенные проблемы и таким путем наилучшим образом продвигаем вперед новые теории. На этой постоянно повторяющейся и сменяющейся игре между мышлением и опытом, мне кажется, и основаны те многочисленные и поражающие аналогии и та кажущаяся предустановленной гармония, которые математик так часто обнаруживает в задачах, методах и понятиям различных областей знания, ([51][111], с. 16–17.)

В более простых (и в наше время менее правдоподобных) объяснениях эффективности математики повторяются тезисы, которые математики выдвигали с античных времен и примерно до середины XIX в. И сейчас находятся люди, продолжающие верить в то, что природа устроена на математических началах. Скрепя сердце им приходится признать несовершенство прежних математических теорий, созданных для объяснения физических явлений. В то же время такие люди полагают, что при непрерывном усовершенствовании математические теории могут не только охватить более широкий круг явлений, но и достигнуть более тонкого согласия с наблюдениями. Так, механика Ньютона пришла на смену механике Аристотеля, а специальная теория относительности внесла поправки в ньютоновскую механику. Разве из исторического развития науки не следует, что окружающий нас мир основан на неких определенных принципах и что человеческий разум всё более приближается к их познанию? Именно такое объяснение взаимосвязи между математикой и естествознанием дал Шарль Эрмит:

> Если я не ошибаюсь, существует мир, представляющий собой собрание математических истин и доступный нам только через наш разум, – точно так же существует мир физической реальности. Как один, так и другой не зависят от нас, они оба – творение господа бога и различимы лишь по слабости нашего разума, тогда как на более высокой ступени мышления они суть одно и то же. Синтез этих двух миров отчасти проявляется в чудесном соответствии между абстрактной математикой, с одной стороны, и всеми отраслями физики – с другой.

В письме к Лео Кёнигсбергеру Эрмит добавил, что «эти понятия анализа существуют самостоятельно вне нас, образуя единое целое, лишь часть которого беспрепятственно, хотя и несколько загадочно, открывается нам; это целое ассоциируется с другой совокупностью объектов, которые мы воспринимаем органами чувств».

Джеймс Джинс в «Загадочной Вселенной» также разделяет неоднократно высказывавшиеся ранее взгляды: «...судя по некоторым специфическим особенностям своего творения, великий создатель Вселенной начинает представать перед нами как чистый математик». Однако до этого Джинс счел необходимым заявить, что «математика, созданная человеком, пока еще не вошла в контакт с первозданной реальностью». На последующих страницах книги Джинс становится более догматичным в своих высказываниях:

> Природа, по-видимому, великолепно осведомлена о правилах чистой математики в том виде, в каком их сформулировали в своих исследованиях ученые, руководствуясь внутренним сознанием и не полагаясь особо на свой опыт общения с внешним миром... Во всяком случае не подлежит сомнению, что природа и наши сознательные математические умы действуют по одним и тем же законам.

Впоследствии Эддингтон изменил свои взгляды и стал считать, что природа основана на математических началах и что наш разум способен построить чистую науку из априорного знания («Фундаментальная теория», 1946). Эта наука – единственно возможная, любая другая содержала бы логические противоречия. Разум не может познать все детали науки, но создать

---

[111] *Проблемы Гильберта*. – М.: Наука, 1969.

общие законы – в его силах. Так, чистый разум говорит нам, что свет должен распространяться с конечной скоростью. Даже природные константы, такие, как отношение массы протона к массе электрона, могут быть определены из априорных соображений. Априорное знание не зависит от фактически произведенных наблюдений и более достоверно, чем экспериментальное знание.

Джордж Дэвид Биркгоф (первый выдающийся математик американского происхождения) в 1941 г. без колебаний повторил и поддержал мысль Эддингтона:

> ...Во всей системе законов физики не существует ничего, что нельзя было бы однозначно вывести из теоретико-познавательных соображений. Разум, незнающий ничего о нашей Вселенной, но знакомый с нашей системой мышления, с помощью которой человеческий разум интерпретирует для себя содержание чувственного опыта, смог бы достичь всего знания физики, которого мы достигли с помощью эксперимента... Например, он мог бы путем умозаключений прийти к выводу о существовании и свойствах радия, но не смог бы определить размеры Земли.

Не вполне адекватное, но разумное объяснение эффективности математики предложил в 1918 г. молодой Эйнштейн:

> ...Историй показала, что из всех мыслимых построений в данный момент только одно оказывается преобладающим. Никто из тех, кто действительно углублялся в предмет, не станет отрицать, что теоретическая система практически однозначно определяется миром наблюдений, хотя никакой логический путь не ведет от наблюдений к логическим принципам теории. В этом суть того, что Лейбниц удачно назвал «предустановленной гармонией». ([126][112], т. 4, с. 41.)

Позиция Эйнштейна в зрелые годы отражена в его книге «Мир, каким я вижу его» (1934), в которой он, в частности, утверждал следующее:

> Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы. Опыт может подсказать нам соответствующие математические понятия, но они ни в коем случае не могут быть выведены из него. Конечно, опыт остается единственным критерием пригодности математических конструкций физики. Но настоящее творческое начало присуще именно математике. Поэтому я считаю в известном смысле оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность. ([126][113], т, 4, с, 184.)

Свое убеждение Эйнштейн подтверждает и в следующем известном высказывании о боге: «Я не верю, что бог играет в кости»[114]. Если же бог и играет в кости, то, как сказал Ральф Вальдо Эмерсон, «кости господа бога налиты свинцом». В приведенном выше высказывании Эйнштейн не утверждает, что выведенные нами математические законы верны. Он лишь констатирует, что какие-то математические законы существуют вне нас – и мы надеемся приблизиться к ним возможно более. По словам самого Эйнштейна, «господь бог изощрен, но не злобен».

Один из крупнейших историков и философов науки, Пьер Дюгем, в своей книге «Цель и структура физической теории», подобно Эйнштейну, проходит эволюцию от сомнений к положительным утверждениям. Дюгем первым описал физическую теорию как «абстрактную систему, предназначенную для суммирования и логической классификации определенной группы экспериментальных законов и не претендующую на их объяснение». По Дюгему, теории носят приближенный, временный характер и «лишены ссылок на объективную реальность». Физика имеет дело лишь с данными чувственного опыта, и нам необходимо избавиться от иллюзии, будто теоретизируя, мы «срываем покров с данных чувственного опыта». Когда гениальный ученый привносит математический порядок и ясность в хаотическое нагромождение чувственных восприятий, он достигает своей цели лишь ценой замены сравнительно доступных разуму понятий символическими абстракциями, не открывающими истинной природы окружаю-

---

[112] Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1965 (т.1), 1966 (т.2), 1967 (т.4).

[113] Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1965 (т.1), 1966 (т.2), 1967 (т.4).

[114] **Яглом:** Последовательное (и в ряде отношений расходящееся с современными физическими концепциями) убеждение Эйнштейна в принципиальной прогнозируемости всех физических явлений (ср., например, [129: Дайсон Ф. *Будущее воли и будущее судьбы*. – Природа, 1982, № 8, с. 60–70.]) обусловило непринятие им квантовой механики (отчасти базирующейся на его же классических работах по теории фотоэффекта) – в связи со статистической трактовкой мира этой наукой.

щего нас мира. Тем не менее Дюгем заканчивает утверждением: «Невозможно поверить, что этот порядок и эта организация [вносимые математической теорией] не являются отражением реального порядка и реальной организации». Мир построен великим архитектором по математическому плану. Бог вечно геометризует, и человеческая математика описывает математические начала, на которых зиждется мир.

Герман Вейль был уверен в том, что математика отражает порядок, существующий в природе. В одном из выступлений Вейль сказал:

> В природе существует внутренне присущая ей скрытая гармония, отражающаяся в наших умах в виде простых математических законов. Именно этим объясняется, почему природные явления удается предсказывать с помощью комбинации наблюдений и математического анализа. Сверх всяких ожиданий убеждение (я бы лучше сказал, мечта!) в существовании гармонии в природе находит всё новые и новые подтверждения в истории физики.

Вейль считает, что, возможно, именно мечта о гармонии Вселенной вдохнула жизнь в научное мышление, и в книге «Философия математики и естественных наук» он добавляет:

> Наука погибла бы без поддержки трансцендентальной веры в истинность и реальность и без непрерывного взаимодействия между научными фактами и построениями, с одной стороны, и образным мышлением – с другой.

Хотя от высказываний Джинса, Вейля, Эддингтона и Эйнштейна невозможно просто отмахнуться, большинство современных математиков и физиков не разделяют их взглядов на взаимосвязь математики и природы. Математическое описание природы достигло столь поразительных успехов, что предлагаемые Джинсом, Вейлем, Эддингтоном и Эйнштейном объяснения представляются вполне разумными, подобно тому как евклидова геометрия на протяжении многих столетий казалась математикам неоспоримой истиной. Но в наше время вера в единый, основанный на математических принципах «план», лежащий в основе всей природы, давно угасла.

Существует еще один подход к объяснению взаимосвязи математики и природы. Он также наводит на мысль о неком соответствии, но соответствии особого рода, которое обычно упускают из виду. За последние сто лет возник статистический подход к описанию природы. По иронии судьбы его родоначальником стал Лаплас, твердо веривший в то, что явления природы строго детерминированы в соответствии с математическими законами. Однако причины, вызывающие то или иное явление, как считал Лаплас, не всегда известны, и наблюдения обладают лишь ограниченной точностью. Чтобы определить наиболее вероятные причины и наиболее вероятные результаты, следует воспользоваться теорией вероятностей. «Аналитическая теория вероятностей» (3-е изд. – 1820) Лапласа по праву считается классическим трудом по этому разделу математики. История теории вероятностей и математической статистики весьма обширна, и нам нет необходимости входить здесь в излишние подробности (см., например, [130][115] и по поводу позиции Лапласа – [131][116]). Но менее чем за сто лет вероятностно-статистические представления привели к возникновению новых взглядов, согласно которым явления природы не детерминированы, а носят случайный характер, но существует некий наиболее вероятный, средний, режим. Именно его мы и наблюдаем, утверждая, что он детерминирован математическими законами. Поясним сказанное на примере. Продолжительность человеческой жизни колеблется в довольно широких пределах: одни умирают в младенческом возрасте, другие доживают почти до ста лет. Поэтому для всех мужчин и женщин существует не только средняя продолжительность жизни, но и средняя продолжительность жизни по достижении определенного возраста. Строя свою деятельность с учетом этих данных, страховые компании извлекают солидные прибыли. Статистический подход к описанию природы особенно существенное распространение получил в последнее время в связи с развитием квантовой механики, которая утверждает, что не существует «твердых», дискретных, строго локализованных частиц. Каждая частица распределена с определенной вероятностью по всему

[115] Майстров Л.Е. *Развитие понятия вероятности*. – М.: Наука, 1980.

[116] Тутубалин В.Н. *Границы применимости* (вероятностно-статистические методы и их возможности). – М.: Знание, 1977.

пространству, но с наибольшей вероятностью она сосредоточена («локализована») в каком-то одном месте.

Согласно статистическим представлениям, математические законы природы описывают в лучшем случае наиболее вероятный режим протекания того или иного явления; однако они не исключают полностью, например, возможности того, что Земля может неожиданно сойти со своей орбиты и отправиться странствовать в глубины космического пространства. Статистический подход как бы оставляет за природой возможность «передумать» и не делать того, что наиболее вероятно. Некоторые философы, занимающиеся проблемами естествознания, пришли к заключению, что необъяснимая эффективность математики остается необъяснимой. Впервые эту точку зрения выразил американский математик, естествоиспытатель и философ Чарлз Сандерс Пирс (1839–1914): «По-видимому, в этом есть какая-то тайна, которую еще предстоит раскрыть».

Эрвин Шредингер в своей книге «Что такое жизнь с точки зрения физики» [132][117] (1945) признавал, что суть открытия человеком законов природы вполне может быть недоступна человеческому разуму. Другой физик, Фримен Дайсон, также считает, что «мы, по-видимому, еще не приблизились к пониманию взаимосвязи между физическим и математическим мирами». К словам названных ученых остается только добавить высказывание Эйнштейна: «Самое непостижимое в этом мире то, что он постижим» (ср. также [129][118]).

Лауреат Нобелевской премии по физике Юджин Пол Вигнер, обсуждая в 1960 г. непостижимую эффективность математики в естественных науках в статье под тем же названием, не дал никакого объяснения и ограничился лишь констатацией спорного вопроса:

> Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить за него судьбу и надеяться, что и в будущих своих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им. Мы думаем, что сфера его применимости (хорошо это или плохо) будет непрерывно возрастать, принося нам не только радость, но и новые головоломные проблемы. ([96*][119]; см. [133][120], с. 197.)

Последние из приведенных здесь «объяснений» носят скорее характер апологий. Они мало что говорят по существу, но их выразительный язык наводит на мысль, что авторы «объяснений» пребывают в неведении относительно причин непостижимой эффективности математики.

Сколь бы удовлетворительным или неудовлетворительным ни было любое объяснение эффективности математики, важно отчетливо сознавать, что природа и математическое описание природы не одно и то же, причем различие обусловлено не только тем, что математика представляет собой идеализацию (ср. [4][121] или [134][122]). Математический треугольник, несомненно, отличается от физического треугольника. Но математика отходит от природы еще дальше. В V в. до н.э. Зенон Элейский сформулировал несколько апорий, или парадоксов. Каковы бы ни были его мотивы, первая же из апорий Зенона великолепно иллюстрирует различие между математической концептуализацией и опытом. Первая апория Зенона утверждает, что бегун никогда не сможет добежать до конца дистанции, так как для этого ему необходимо сначала преодолеть 1/2 дистанции, затем 1/2 оставшейся половины, затем 1/2 половины оставшейся половины и т.д. Следовательно, всего бегуну необходимо преодолеть

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

дистанции. Но чтобы преодолеть бесконечно большое число отрезков, бегуну, по мнению Зенона, необходимо затратить бесконечно большое время.

---

[117] Шредингер Э. *Что такое жизнь с точки зрения физики*? – М.: ИЛ, 1947.

[118] Дайсон Ф. *Будущее воли и будущее судьбы*. – Природа, 1982, № 8, с. 60–70.

[119] Wigner E.P. *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics*. Com. Pure and Appl. Math., 1960, 13, 1–14. [Русский перевод: Вигнер Е. *Непостижимая эффективность математики в естественных науках*. – В кн.: Вигнер Е. *Этюды о симметрии*. – М.: Мир, 1971, 182–198; также: УФН, т. 94, вып, 3, 1968, с, 535–546; в кн.: Проблемы современной математики. – М.: Знание, 1971, с. 22–33.]

[120] Вигнер Ю. *Этюды о симметрии*. М.: Мир, 1971.

[121] Манин Ю.И. *Математика и физика*. – М.: Знание, 1979.

[122] Дайсон Ф. *Математика и физика*. – УФН, т. 85, вып. 2, 1965, с. 351–364; *Математика в физических науках*. – В кн. [137], с. 110–127.

Одно из физических решений, причем наиболее очевидное, этого парадокса состоит в том, что бегун преодолеет всю дистанцию за конечное число шагов. Но если принять математический анализ апории, проделанный Зеноном, то окажется, что на преодоление дистанции бегун должен затратить 1/2 мин плюс 1/4 мин плюс 1/8 мин и т.д., а сумма всех этих промежутков времени в точности равна одной минуте. Такой анализ расходится с физическим процессом, но тем не менее приводит к тому же результату.

Возможно, человек ввел ограниченные и даже искусственные понятия и только таким способом сумел навести порядок в природе. Созданная человеком математика не более чем рабочая схема. Сама природа, возможно, отличается несравненно большей сложностью, или структура ее не обладает особой правильностью.[123] Тем не менее математика остается непревзойденным методом исследования и описания природы, позволяющим овладеть ею. В тех областях, где математика эффективна, она представляет собой всё, чем мы владеем; если это и не сама реальность, то самое лучшее приближение к ней, какое только доступно для нас.

Хотя математика – творение чисто человеческое, тот путь, который она открывает нам к различным явлениям природы, приводит к результатам, превосходящим самые смелые ожидания. Как ни парадоксально, но именно абстракции, столь далекие от реальности, позволяют достичь столь многого. Возможно, что искусственное математическое описание не более чем сказка для взрослых, но сказка с моралью: человеческий разум обладает огромной силой, даже если эту силу не так-то легко объяснить,

За успехи математики заплачено определенной ценой, и эта цена – количественный подход к миру: мы рассматриваем его с точки зрения меры, веса, продолжительности и тому подобных понятий. Такое описание может давать о богатом и разнообразном опыте не более полное представление, чем рост человека о человеке. В лучшем случае математика описывает некоторые явления природы, но математические символы передают далеко не всё.

Не следует забывать, что математика рассматривает простейшие понятия и явления физического мира. Она имеет дело не с человеком, а с неодушевленной природой. Явления неодушевленной природы обладают повторяемостью, и математика может описывать их. Но в экономике, политике, психологии, а также в биологии математика пока приносит существенно меньшую пользу. Даже в физике математика имеет дело с упрощениями, лишь касающимися реальности, подобно тому как касательная лишь соприкасается с кривой и приближенно ее передает. Имеет ли орбита Земли, обращающейся вокруг Солнца, форму эллипса? Нет. Земную орбиту можно считать эллиптической только в том случае, если Землю и Солнце считать точками и пренебречь влиянием всех остальных тел во Вселенной. Повторяется ли из года в год продолжительность зимы, весны, лета и осени? Вряд ли. Они повторяются, лишь если их продолжительность оценивать приближенно, т.е. так, как только и может их оценить человек.

Станем ли мы отказываться от математики лишь по той причине, что не понимаем, почему она так эффективна в описании природы? Хевисайд как-то заметил: «Стану ли я отказываться от обеда только потому, что не до конца понимаю процесс пищеварения?» Опыт опровергает сомневающихся. Самоуверенные отвергают рациональные объяснения. При всем нашем почтении к социологии и философии, прекрасно понимая, что математика затрагивает далеко не все аспекты нашей жизни, мы, однако, не можем не признать одной простой истины: успехи математики как источника знания затмевают ее неудачи. И знания, даваемые математикой, основаны не просто на голословных утверждениях о ее правильности – они ежедневно и ежечасно подвергаются проверке в каждом работающем радиоприемнике или атомной электростанции, в предсказании солнечных и лунных затмений, в тысячах других явлений, происходящих в лабораториях или в повседневной жизни.

Математике доступны лишь наиболее простые проблемы физического мира, но именно в ней эти проблемы находят полное решение. Вера в могущество человека отчасти зиждется на той силе, которой наделяет его математика – она помогает человеку покорять природу и тем облегчает его ношу. Одержанными математикой победами человек может по праву гордиться.

---

[123] **Яглом:** См. примечание 17 к гл. X и книгу [69: Mandelbrot B. *The Fractal Geometry of Nature*. – San Francisco: Freeman, 1982.] **[X-17]Яглом:** Не останавливаясь подробно, упомянем лишь о методологических установках яркой и пользующейся известностью книги Б. Мандельброта [69], которые кратко (и не совсем точно) можно охарактеризовать как утверждение о том, что в реальном мире мы чаще всего встречаемся именно с нигде не дифференцируемыми («изломанными») функциями, а «гладкие» функции представляют собой не более чем идеализированное описание негладких.

Вопрос о том, почему математика столь эффективна, представляет не только чисто академический интерес. Если мы используем математику в технике, то в какой степени можно полагаться на нее в расчетах и проектах? Можно ли спроектировать мост с помощью теории, опирающейся на бесконечные множества или аксиому выбора? Не обрушится ли такой мост? К счастью, инженерные проекты обычно основаны на применении теорем, столь надежно подкрепленных накопленным ранее опытом, что их использование не вызывает сомнений. Многие инженерные проекты умышленно предусматривают большой запас прочности. Например, при строительстве мостов используются такие материалы, как сталь, хотя прочность материалов нам не известна досконально. Чтобы компенсировать возможные неточности, инженеры вводят «коэффициент незнания» – используют более прочные кабели и балки, чем того требует теория. Но в тех случаях, когда речь идет о проекте сооружения, не возводившегося никогда ранее, необходимо учитывать и надежность применяемой математики.[124] В таких случаях разумная осторожность подсказывает не приступать к строительству сооружения прежде, чем все расчеты не будут проверены на модели, выполненной в уменьшенном масштабе.

В этой главе мы поставили перед собой задачу попытаться наметить какой-то выход из того затруднительного положения, в котором оказались математика и ее «жрецы». Единой, общепринятой математики не существует, поэтому мы не стали бы рекомендовать в качестве возможного выхода перебор множества различных путей, отстаиваемых теми или иными группами: избрать такой «лобовой» подход к решению проблемы означало бы воспрепятствовать достижению главной цели математики – способствовать прогрессу науки. Именно этой высокой целью мы и рекомендовали бы воспользоваться как эталоном. Здесь мы достаточно подробно обсудили связанные с этим проблемы и спорные вопросы.

Но хотя акцент на приложениях к естественным наукам представляется наиболее разумным курсом дальнейшего развития математики, эта программа отнюдь не исключает и другие заслуживающие внимания и вполне разумные цели в рамках самой математики. Мы отмечали (гл. XIII), что развитие прикладной математики требует основательной и разнообразной поддержки: абстракции, обобщения, строгого обоснования и усовершенствования существующих методов. Кроме того, вполне оправдана деятельность в области оснований математики, не дающая прямого выхода в математику, но доказавшая свою полезность в процессе естественнонаучных исследований. Конструктивистская программа интуиционистов, хотя те исходили из намерения заменить лишенные смысла чистые теоремы существования, приводит к методам вычисления величин, о которых чистые теоремы существования сообщают нам лишь то, что эти теоремы существуют. Приведем один старый пример. Евклид доказал, что отношение площади круга к квадрату его радиуса одинаково для всех кругов (это отношение обычно обозначается греческой буквой π). Тем самым Евклид доказал чистую теорему существования. Но если мы хотим вычислить площадь какого-нибудь круга, то для этого нам необходимо знать, чему равно π. К счастью, приближенный метод вычисления π, предложенный Архимедом, и некоторые разложения в ряды, полученные впоследствии, позволили найти π задолго до того, как интуиционисты бросили вызов чистым теоремам существования. Разумеется, возможность вычисления числа π необычайно важна. Аналогично возникает необходимость и в вычислении других величин, относительно которых пока доказано лишь то, что они существуют. Следовательно, конструктивистская программа вполне заслуживает внимания.

Однако исследования в области оснований математики ценны и тем, что открывают потенциальную возможность прийти к какому-нибудь противоречию. Непротиворечивость математики не доказана, и открытие противоречия или заведомо абсурдной теоремы позволило бы по крайней мере раз и навсегда разрешить эту проблему, которая поглощает сегодня немало времени и энергии некоторых математиков.

Наш обзор современного состояния математики вряд ли может пробудить чувство успокоенности. Математика лишилась своей истинности. Ныне она уже не является независимой, абсолютно надежной и прочно обоснованной областью знаний. Большинство математиков заявили о своей преданности естествознанию – акт похвальный в любой период истории, но особенно в тот момент, когда естественнонаучные приложения могут сыграть роль путеводной

[124] **Яглом:** Разумеется, ненадежность здесь может быть связана, скажем, с неполным знанием начальных условий фигурирующего в решении задачи дифференциального уравнения или в неопределенности коэффициентов уравнения (связанных с физическими характеристиками сооружения), но никак не с теми относящимися к основам математики полуфилософскими трудностями, которым посвящены гл. IX–XII.

нити в поиске разумного направления в развитии математики. Замечательная точность и эффективность математики в описании реального мира по-прежнему ждут своего объяснения.

Несмотря на все свои недостатки и ограниченные возможности, математике есть чем гордиться. Она была и остается высшим интеллектуальным достижением и наиболее оригинальным творением человеческого духа. Музыка может возвышать или умиротворять душу, живопись – радовать глаз, поэзия – пробуждать чувства, философия – удовлетворять потребности разума, инженерное дело – совершенствовать материальную сторону жизни людей. Но математика способна достичь всех этих целей. Если же говорить о возможностях человеческого разума, то математики немало потрудились, чтобы доказать, сколь высокую надежность результатов способен обеспечить человеческий разум. Не случайно математическая точность вошла в поговорку. Математика по-прежнему остается эталоном самого надежного и точного знания, которого мы только в состоянии достичь.

Все свершения математики – это свершения человеческого разума. Показав, на что способен человек, математика вселила в людей смелость и уверенность, позволившие им вплотную взяться за разгадку ранее, казалось бы, неприступных тайн космоса, лечение страшных болезней, количественный анализ проблем, относящихся к экономике и устройству человеческого общества, что позволяет надеяться на дальнейший прогресс человечества. В решении этих проблем математика может оказаться более эффективной или менее, но с ней мы связываем определение надежды на успех.

Математика таит в себе ценности не меньшие, чем любое другое творение человеческого духа. Ценности эти нелегко воспринимаются, им не всегда воздают должное, но, к счастью, ими пользуются. Познать их труднее, чем, скажем, ценности музыки, однако того, кто сумеет преодолеть нелегкий путь познания, ждет богатое вознаграждение; в этих ценностях сосредоточено всё, что отличает лучшие творения человеческого духа. Ценности, воплощенные в математике, поистине неисчерпаемы; единственный вопрос, который может здесь возникнуть, – это вопрос о степени их важности. На этот вопрос каждый сам должен найти ответ, так как многое зависит от индивидуальных суждений, мнений и вкусов.

Математика – это высокий образец достоверного знания, идеал определенности, к которому мы будем стремиться и впредь, даже если он и недостижим. Достоверность вполне может оказаться не более чем призраком, манящим и всё время ускользающим. Но идеалы, даже недостижимые, обладают притягательной силой и ценностью. Справедливость, равноправие или бог – идеалы. Правда, во имя бога люди убивали себе подобных, а справедливость далеко не всегда торжествует. И всё же эти идеалы представляют собой главный итог многовекового развития цивилизации. Так обстоит дело и с математикой, даже если она всего лишь остается идеалом. Возможно, созерцание идеала позволяет нам с большей уверенностью выбирать направление, которым необходимо следовать для достижения истины.

Человек – песчинка в мироздании. Мы странники в бескрайних просторах Вселенной, беспомощные перед разгулом природных стихий, зависящие от них и в получении пищи, и в удовлетворении других потребностей. Человек взирает на загадочную, быстро меняющуюся, бесконечную Вселенную смущенный, озадаченный и даже испуганный собственной незначительностью. Как сказал Паскаль[125],

> ...ибо что такое человек во Вселенной? Небытие в сравнении с бесконечностью, всё сущее в сравнении с небытием, среднее между всем и ничем. Он не в силах далее приблизиться к пониманию этих крайностей – конца мироздания и его начала, неприступных, скрытых от людского взора непроницаемой тайной, и равно не может постичь небытие, из которого возник, и бесконечность, в которой растворяется. ([119][126], с. 123.)

---

[125] **Яглом:** Паскаль писал эти слова в XVII в. В настоящее время физика смело излагает свюи позиции в вопросе о поведении Вселенной в ближайшей окрестности (во времени превышающей всего лишь величину порядка 10^{-33} с) так называемого Большого взрыва, от которого астрофизики датируют существование Вселенной с привычным нам «пространством-временем» (ср., например, книги [135: Вайнберг С. *Первые три минуты*. – М.: Энергоиздат, 1981; Силк Дж. *Большой взрыв*. – М.: Мир, 1982; *Фундаментальная структура материи* (под ред. Дж. Малви). – М.: Мир, 1984.] или статью [136: Долгов А.Д., Зельдович Я.Б. *Вещество и антивещество во Вселенной*. – Природа, 1982, № 8, с. 33–45]); будущее Вселенной астрофизики также прогнозируют в очень больших пределах времени – почти до ее (гипотетического) «конца».

[126] Ларошфуко Ф. де. *Максимы*. Паскаль Б. *Мысли*, Лабрюйер Ж. де. *Характеры*. – М.: Художественная литература, 1974.

Монтень и Гоббс, по существу, утверждали то же, только иными словами. Человек одинок и слаб, а век его короток. Он жертва непредвиденного стечения обстоятельств.

Наделенный органами чувств, возможности которых весьма ограниченны, и рассудком, позволяющим анализировать воспринимаемую органами чувств информацию, человек начал проникать в окружающие его тайны природы. Используя данные непосредственного наблюдения или результаты специально поставленных экспериментов, он сформулировал определенные аксиомы и воспользовался своей способностью мыслить. Он стремился во всем найти порядок. Целью человека было построить систему знаний, способную противостоять мимолетной смене ощущений и послужить основой для познания – и покорения – окружающего мира. Один из значительных итогов его деятельности, продукт его разума – математика. Наша наука не идеальный алмаз – возможно, даже постоянная полировка не позволит ей избавиться от всех изъянов. Тем не менее математика была и остается самой надежной нашей связью с миром чувственного восприятия, и, хотя мы знаем, что она лишена прочных оснований (что не может не вселять в нас тревогу), она тем не менее по-прежнему является драгоценнейшим украшением нашей интеллектуальной жизни, которое следует беречь. Математика по праву занимает свое высокое место в сокровищнице человеческого разума и, несомненно, останется там, даже если более детальные исследования обнаружат в ней новые изъяны.[127] Алфред Норт Уайтхед некогда сказал: «Нельзя не признать, что занятие математикой – ниспосланное богами безумие человеческого духа». Безумие? Вполне возможно – но, несомненно, ниспосланное богами.

---

[127] **Яглом:** Ср. с принадлежащей Г. Вейлю (в статье «Место Феликса Клейна в математической современности», 1930) характеризацией той роли, какую играет математика в человеческой культуре ([124: Яглом И.М. *Герман Вейль*. – М.: Знание, 1967], с. 11). [Названная статья намечена к публикации в подготавливаемом издательством «Наука» сборнике научных статей Вейля и в сборнике его научно-популярных статей.]

Литература

Избранная литература[128]

1. Barker S.F. Philosophy of Mathematics. – Engelwood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.

2. Baum R.J. Philosophy and Mathematics from Plato to the Present. – San Francisco: Freeman, Cooper & Co., 1973.

3. Bell E.T. The Place of Rigor in Mathematics. – Amer. Math. Month., 1934, 41, p. 599–607.

4. Benacerraf P., Putnam H. Philosophy of Mathematics, Selected Readings. – Engelwood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.

5. Beth E.W. The Foundations of Mathematics. – New York: North-Holland Publishing Co., 1959; New York: Harper and Row, 1966.

6. Beth E.W. Mathematical Thought: An Introduction to the Philosophy of Mathematics. – Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1965; New York: Gordon and Breach, 1965.

7. Bishop E. et al. The Crisis in Contemporary Mathematics. – Hictoria Mathematica, 1975, 2, p. 505–533.

8. Black M. The Nature of Mathematics. – New York: Harcourt, Brace, Jovanovich, 1935; London: Routledge & Kegan Paul, 1933.

9. Blumenthal L.M. A Paradox, A Paradox, A Most Ingenious Paradox. – Amer. Math. Month., 1940, 47, p. 346–353.

10. Bochenski I.M. A History of Formal Logic. – New York: Chelsea переиздание, 1970.

11. Bourbaki N. The Architecture of Mathematics. – Amer. Math. Month., 1950, 57, p. 221–232; также в [54], т. I, p. 23–26. [Русский перевод: Бурбаки Н. Архитектура математики. – В кн. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963, с. 245–259; в кн.: Математическое просвещение (новая серия), вып. 5. – М.: Физматгиз, 1960, с. 99–112; в кн. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972, с. 4–18.]

12. Brouwer L.E.J. Intuitionism and Formalism. – Amer. Math. Soc. Bulletin, 1913–1914, 20, p. 81–96.

13. Burington A.S. On the Nature of Applied Mathematics. – Amer. Math. Month., 1949, 56, p. 221–241.

14. Calder A. Constructive Mathematics. – Scientific American, Oct, 1979, p. 146–171.

15. Cantor G. Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. – New York: Dover Inc., 1955. [Немецкий оригинал: в кн.: Cantor G. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. – Heidelberg Springer, 1980; русский перевод (неполный): Кантор Г. Теория ансамблей. – Спб.: Образование, 1914 («Новые идеи в математике», вып. 6).]

16. Cohen M.R. A Preface to Logic. – New York: Holt, Rinehart and Winston. 1944; New York: Dover Inc., 1977.

17. Cohen P.J., Reuben Hersh. Non-Cantorian Set Theory. – Scientific American, Dec. 1967, p. 104–116. [Русский перевод: Коэн П., Херш Р. Неканторовская теория множеств. – Природа, 1969, № 4, с. 43–51; в кн,: Математика в современном мире. – М.: Знание, 1969, с. 20–32.]

18. Courant R. Mathematics in the Modern World. – Scientific American, Sept. 1964, p. 40–49. [Русский перевод: Курант Р. Математика в современном мире. – В кн. [137], с. 13–27.]

19. Dauben J.W. Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite. – Cambridge: Harvard University Press, 1978.

20. Davis M., Hersh R. Nonstandard Analysis. – Scientific American, June 1972. p. 78–86. [Вошло также в книгу: Davis M., Hersh R. The Mathematical Experience. Boston: Birkhauser, 1981.]

21. Davis P.J. Fidelity in Mathematical Discourse: Is One and One Really Two? Amer. Math. Month., 1972, 79, p. 252–263.

22. De Long H. A Profile of Mathematical Logic. – Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1970.

[128] Список автора, но ссылки на нее и русские переводы – Яглома.

23. De Long H. Unsolved Problems in Arithmetic. – Scientific American, March 1971, p. 50–60.

24. Desua F. Consistency and Completeness – A Résumé. – Amer. Math. Month., 1956, 63, p. 293–305.

25. Dieudonné J. Modern Axiomatic Methods and the Foundations of Mathematics. [Французский оригинал статьи – в оригинальном издании собрания математических статей, составленного Ле Лионне – см. [54]. vol. 1, p. 251–266.]

26. Dieudonné J. The Work of Nicolas Bourbaki. – Amer. Math. Month., 1970, 77, p. 134–145. [Русский перевод: Дьедонне Ж. О деятельности Бурбаки. – Успехи математических наук, т.28, вып. 3(171), 1973, с. 205–216; Дело Никола Бурбаки. В кн.: Очерки о математике. М.: Знание, 1973, с. 44–56.]

27. Dre den A. Brouwer's Contributions to the Foundations of Mathematics. – Amer. Math. Soc. Bulletin, 1924, 30, p. 31–40.

28. Dresden A. Some Philosophical Aspects of Mathematics. – Amer. Math. Soc. Bulletin, 1928, 34, p. 438–452.

29. Eves H., Carroll V.N. An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics, rev. ed.. – New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.

30. Fraenkel A.A. On the Crisis of the Principle of the Excluded Middle. – Scripta Mathematica, 1951, 17, p. 5–16.

31. Fraenkel A.A. The Recent Controversies about the Foundations of Mathematics. – Scripta Mathematica, 1947, 13, p. 17–36.

32. Fraenkel A.A., Bar-Hillel Y., Levy A. Foundations of Set Theory, 2nd rev. ed., New York: North-Holland, 1973. [Имеется русский перевод 1-го изд. книги: Френкель А., Бар-Хилел И. Основания теории множеств. – М.: Мир, 1966.]

33. Gödel K. What is Cantor's Continuum Problem? – Amer. Math. Month., 1947, 54, p. 515–525; с дополнением вошло в кн. [4], p. 258–273.

34. Goodman N.D. Mathematics as an Objective Science. – Amer. Math. Month., 1979, 86, p. 540–551.

35. Goodstein R.L. Essays in the Philosophy of Mathematics. – Leicester: The University Press, 1965.

36. Hahn H. The Crisis in Intuition. – В [65], vol. III, p. 1956–1976. [Русский перевод: Хан. Г. Кризис интуиции. – В кн.: Математики о математике. – М.: Знание, 1972, с. 25–42.]

37. Halmos P.R. The Basic Concepts of Algebraic Logic. – Amer. Math. Month., 1956, 63, p. 363–387.

38. Hardy G.H. Mathematical Proof. Mind, 1928, 38, p. 1–25; Collected Papers, vol. VII, 58, p. 1–606.

39. Hardy G.H. A Mathematician's Apology. – Cambridge: University Press, 1981. [Русский перевод отрывков из книги: Харди Г.Г. Исповедь математика. – В кн.: Математики о математике. – М.: Знание, 1967, с. 4–15.]

40. Heijenoort J. van, ed. From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. – Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967.

41. Hempel C.G. Geometry and Empirical Science. – Amer. Math. Month., 1945, 52, p. 7–17.

42. Hempel C.G. On the Nature of Mathematical Truth. – Amer. Math. Month., 1945, 52, p. 543–556; также вошло в кн. [4].

43. Hersh R. Some Proposals For Reviving the Philosophy of Mathematics. – Advances in Mathematics, 1979, 31, p. 31–50.

44. Hilbert D. Über das Unendliche – Mathematische Annalen, 1925, 95, 161–190; англ. переводы On the Infinite в кн. [4], p. 131–151 и в кн. [40], с. 367–392, [Русский перевод сокращенного варианта статьи: Гильберт Д. О бесконечном. В кн.: Гильберт. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948, 338–364.]

45. Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. – New York: Oxford University Press, 1972.

46. Kline M. Mathematics in Western Culture. – New York: Oxford University Press, 1958.

47. Kneale W., Kneale M. The Development of Logic. – New York: Oxford University Press, 1962.

48. Kneeborn G.T. Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics. – New York: D. Van Nostrand, 1963.

49. Körner S. The Philosophy of Mathematics. – London: Hutchinson University Library, 1960.

50. Lakatos I. Mathematics, Science and Epistemology, 2 vols. – New York: Cambridge University Press, 1978.
51. Lakatos I., ed. Problems in the Philosophy of Mathematics, vol. I. – New York: North-Holland, 1972.
52. Lakatos I. Proofs and Refutations. – New York: Cambridge University Press., 1976. [Русский перевод более краткого варианта книги: Лакатос И. Доказательства и опровержения. – М.: Наука, 1967.]
53. Langer S.K. An Introduction to Symbolic Logic, 2nd ed. – New York: Dover, 1953.
54. Le Lionnais F. ed. Great Currents of Mathematical Thoughts, 2 vols. – New York: Dover, 1971. [Французский оригинал: La Lionnais F. Les grands courants de la pensée mathématiques. Cahiers du Sud, 1948.]
55. Lewis C.I. A Survey of Symbolic Logic. – New York: Dover, 1960.
56. Luchins E. and A. Logicism. *Scripta Mathematica*, 1965, 27, p. 223–243.
57. Luxemburg W.A.J. What is Non-Standard Analysis? – Amer. Math. Month., 1973, 80, p. 11, p. 38–67.
58. Mackie G.L., Truth, Probability and Paradox. – New York: Oxford University Press, 1973.
59. Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic. – New York: Van Nostrand, 1979, (2nd ed.) [Русский перевод 1-го изд. книги: Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971.]
60. Monk J.D. On the Foundation of Set Theory. Amer. Math. Month., 1970, 77, p. 703–711.
61. Myhill J. What is a Real Number? Amer. Math. Month., 1972, p. 748–754.
62. Nagel E., Newman J.R. Gödel's Proof. – Scientific American, June 1956, p. 71–86.
63. Nagel E., Newman J.R. Gödel's Proof. – New York: New York University Press, 1958. [Сокращенный русский перевод: Нагель Э., Ньюмен Д. Теорема Геделя. – М.: Знание, 1970.]
64. Neumann J. von. The Mathematician. In: Heiwood R.B. The Works of the Mind. – Chicago: University of Chicago Press, 1947; 180–196; также в кн.: [65], vol, IV, p. 2053–2068; Neumann J. von, Collected Works, vol. I, 1961, p. 1–9. [Русский перевод: Нейман Дж. фон. Математик. – Природа, 1983, № 2, с. 88–95.]
65. Newman J.R. The World of Mathematics, 4 vols. – New Vork: Simon and Schuster, 1956.
66. Pierpont J. Mathematical Rigor Past and Present. – Amer. Math. Soc, Bulletin, 1928, 34, p. 23–52.
67. Poincaré H. The Foundations of Science. – Lancaster, Pa.; The Science Press, 1946.
68. Poincaré H. Last Thoughts. – New York: Dover Publications, 1963. [Неполный русский перевод (с французского) книг [67], [68] – см. книгу [1] в списке Дополнительной литературы на с. 428.]
69. Putman H. Is Logic Empirical? – Boston Studies in Philosophy of Science. 1969, p. 216–241.
70. Putnam H. Mathematics, Matter and Method, Philosophical Papers, vol. 1. – New York: Cambridge University Press, 1975.
71. Quine W.V. The Foundations of Mathematics. – Scientific American, Sept, 1964, p. 112–127.
72. Quine W.V. From a Logical Point of View, 2nd ed. – Cambridge, Mass. Harvard University Press, 1961.
73. Quine W.V. Paradox. – Scientific American, April 1962, p. 84–96.
74. Quine W.V. The Ways of Paradox and Other Essays. – New York: Random House, 1966.
75. Richmond D.E. The Theory of the Cheshire Cat. Amer. Math, Month., 1934, 41, p. 361–368.
76. Robison A, Non-Standard Analysis, 2nd ed. – New York: North-Holland, 1974.
77. Rotman B., Kneebone G.T. The Theory of Sets and Transfinite Numbers. – London: Oldbourne, 1966.
78. Russell B. The Autobiography of Bertrand Russell: 1872 to World War I. – New York: Bantam Books, 1965.
79. Russell B. Introduction to Mathematical Philosophy. – London: George Allen & Unwin, 1919.
80. Russell B. Mysticism and Logic. – London: Longmans, Green, 1925.
81. Russell B. The Principles of Mathematics, 2nd ed. London: George Allen & Unwin, 1937.
82. Schrödinger E. Nature and the Greeks. – New York: Cambridge University Press, 1954.
83. Sentilles D. A Bridge to Advanced Mathematics. – Baltimore: Williams & Wilkins, 1975.
84. Snapper E. What is Mathematics? – Amer. Math. Month., 1979, 86, p. 551–557.
85. Stone M. The Revolution in Mathematics. – Amer. Math. Month., 1961, 68, p. 715–734.

86. Tarski A. Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences, 2nd ed. – New York: Oxford University Press, 1946. [Русский перевод 1-го изд.: Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук, – М.: ИЛ, 1948.]

87. Tarski A. Truth and Proof. – Scientific American, June 1969, p. 63–77.

88. Waisman F. Introduction to Mathematical Thinking. – New York: Harper & Row, 1959.

89. Wavre R, Is There a Crisis in Mathematics? – Amer. Math. Month., 1934, 41, p. 488–499.

90. Weil A. The Future of Mathematics. – Amer. Math. Month., 1950, 57, p. 295– 306.

91. Weyl H. A Half-Century of Mathematics. Amer. Math. Month., 1951, 58, 523–553. [Русский перевод: Вейль Г. Полвека математики. – М.: Знание, 1969.]

92. Weyl H. Mathematics and Logic. – Amer. Math. Month., 1946, 53, ρ. 2–13.

93. Weyl H. Philosophy of Mathematics and Natural Sciences. – Princeton: University Press, 1949. [Немецкий оригинал: Weyl H. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften. – München: Oldenberg, 1922; русский перевод (частичный): Вейль Г. О философии математики. – М.: Гостехиздат, 1934, с. 34–91; 2-е изд. доп. и перераб. München: Leibniz Verlag, 1950; русский перевод отрывков – в кн.: Прикладная математика (под ред. Э. Беккенбах.) – М.: Мир, 1968, с. 309–361.]

94. White L.A., The Locus of Mathematical Reality: An Anthropological Footnote. – Philosophy of Science, 1947, 14, p. 289–303; vol. IV, p. 2348–2364.

95. Whitehead A.N., Russell B. Principia Mathematica, 3 vols. – New York: Cambridge University Press., Ist ed., 1910–1913; 2nd ed., 1925–1927.

96. Wigner E.P. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics. Com. Pure and Appl. Math., 1960, 13, 1–14. [Русский перевод: Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках. – В кн.: Вигнер Е. Этюды о симметрии. – М.: Мир, 1971, 182–198; также: УФН, т. 94, вып, 3, 1968, с, 535–546; в кн.: Проблемы современной математики. – М.: Знание, 1971, с. 22–33.]

97. Wilder R.L. Introduction to the Foundations of Mathematics, 2nd ed. – New York: John Wiley, 1965.

98. Wilder R.L. The Nature of Mathematical Proof. – Amer. Math. Month., 1944, 51, p. 309–323.

99. Wilder R.L. The role of Axiomatic Method. – Amer. Math. Month., 1967, 74, p. 115–127.

100. Wilder R.L. The Role of Intuition. – Science, 1967, 156, p. 605–610.

Дополнительная литература[129]

1. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983.

2. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965.

3. Лейбниц Г.В. Переписка с Кларком. – В кн.: Сочинения, т.1. – М.: Мысль, 1982, с. 430–528.

4. Манин Ю.И. Математика и физика. – М.: Знание, 1979.

5. Ван дер Варден Б.Л. Пифагорейское учение о гармонии. – В кн.: Пробуждающаяся наука. – М.: Физматгиз, 1959.

6. Аристотель. Сочинения в 4-х томах. – М.: Мысль, 1976 (т.1), 1981 (т. 3).

7. Платон. Сочинения в 3-х томах. Т.3, ч.1. – М.: Мысль, 1971.

8. Аристотель. Аналитики первая и вторая. – М.: Госполитиздат, 1952.

9. Юшкевич А.П. История математики в средние века. – М.: Физматгиз, 1961.

10. Баткин Л.М. Итальянские гуманисты: стиль жизни, стиль мышления. – М.: Наука, 1978.

11. Коперник Н. О вращениях небесных сфер. Серия «Классики науки». – М.: Наука, 1964.

12. Данилов Ю.А., Смородинский Я.А. Иоганн Кеплер: от «Мистерии» до «Гармонии». – УФН, 109, 1973, вып; 1, 175–209.

13. Паскаль Б. Письма к провинциалу, или Письма Людовика Монтальта к другу в провинцию и отцам иезуитам о морали и политике иезуитов. – Спб., 1898.

14. Декарт Р. Рассуждение о методе с приложениями. Серия «Классики науки». – М.: Наука, 1953.

15. Декарт Р. Правила для руководства ума. – М.–Л.: Соцэкгиз, 1936.

16. Декарт Р. Избранные произведения. – М.: Госполитиздат, 1950.

[129] Список Яглома.

17. Галилей Г. Избранные труды в 2-х томах. Т. 2. – М.: Наука, 1964.

18. Кант И. Сочинения в 6-ти томах. – М.: Мысль, 1964 (т.3), 1965 (т.4), 1966 (т.6).

19. Гюйгенс X. Трактат о свете. – М.–Л.: ОГИЗ, 1935.

20. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т.7. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

21. Беркли Дж. Сочинения. – М.: Мысль, 1978.

22. Ньютон И. Оптика, или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света. – М.: Гостехиздат, 1954.

23. Бэкон Ф. Сочинения в 2-х томах. – М.: Мысль, 1977 (т.1); 1978 (т.2).

24. Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. – М.–Л.: Гостехиздат, 1956.

25. Начала Евклида. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948 (книги I–VI), 1949 (книги VII–X).

26. Бонола Р. Неевклидова геометрия. – Спб.: Общественная польза, 1910.

27. Каган В.Ф. Лобачевский. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948.

28. Каган В.Ф. Лобачевский и его геометрия. – М.: Гостехиздат, 1956, с. 193–194.

29. Больяи (Бойаи) Я. Appendix. Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида, что a priori никогда решено быть не может, с прибавлением, к случаю ложности, геометрической квадратуры круга. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950, 235 с.

30. Рашевский П.К. О догмате натурального ряда. – Успехи математических наук, 28, вып. 4 (172), 1973, с, 243–246.

31. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т.2. – М.; Наука, 1966.

32. Фейнберг Е.Л. Кибернетика, логика, искусство. – М.: Радио и связь, 1981.

33. Архимед. Сочинения. – М.: Физматгиз, 1962.

34. Диофант Александрийский. Арифметика и Книга о многоугольных числах. – М.: Наука, 1974; Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972; Башмакова И.Г., Славутин И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. – М.: Наука, 1984.

35. Бируни Абу Рейхан. Избранные произведения. Т.2. – Ташкент: Фан, 1963.

36. Аль-Хорезми. Математические трактаты. – Ташкент: Фан, 1983.

37. Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми. – М.: Наука, 1983.

38. Кавальери Б. Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного, с приложением «опыта IV» о применении неделимых к алгебраическим степеням. – М.–Л.: Гостехиздат, 1940.

39. Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму, и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1935.

40. Eleckenstein S.O. Der Prioritätsstreit zwischen Leibnitz und Newton. – Basel: Birkhäuser, 1976.

41. Boyer C.B. The History of the Calculus and Its Conceptual Development. – N.Y.: Dover, 1959.

42. Baron M.E. The Origins of the Infinitesimal Calculus. – Oxford: Pergamon, 1969.

43. Priestley W.M. Calculus: An Historical Approach. – N.Y.: Springer, 1979.

44. Edwards C.H. The Historical Development of the Calculus. – N.Y.: Springer, 1979.

45. Карно Л. Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. – М.–Л.: Гостехиздат, 1933.

46. Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа. – Одесса: Матезис, 1923.

47. Дедекинд Р. Что такое числа и для чего они служат. – Казань: Изд-во Императорского университета, 1905.

48. Делоне Б.Н. Элементарное доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. – М.: Гостехиздат, 1956.

49. Яглом И.М. Аксиоматические обоснования евклидовой геометрии. В кн.: Новое в школьной математике. – М.: Знание, 1972, с. 40–63.

50. Гильберт Д. Основания геометрии. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

51. Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969.

52. Маркушевич А.И. Очерки по истории теории аналитических функций. – М.–Л.: Гостехиздат, 1951.

53. Даубен Д.-У. Георг Кантор и рождение теории трансфинитных множеств. – В мире науки, 1983, № 8, с. 76–78.
54. Хаусдорф Ф. Теория множеств. – М.– Л.; Гостехиздат, 1937.
55. Alexandroff P.S., Hopf H. Topologie. – Berlin: Springer, 1935.
56. Медведев Ф.А. Ранняя история аксиомы выбора. – М.: Наука, 1982.
57. Уайтхед А.Н. Введение в математику. – Пгд.: Физика, 1916.
58. Калбертсон Дж.Т. Математика и логика цифровых устройств. – М.: Просвещение, 1965 (гл. V).
59. Лукасевич А. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. – М.: ИЛ, 1959.
60. Янг Ч. Эйнштейны и физика второй половины XX века. – Успехи физических наук, 132, вып. 1, 1980, с. 169–175.
61. Гейзенберг В. Смысл и значение красоты в точных науках. – Вопросы философии, 1979, № 12, с. 49–60.
62. Асмус В.Ф. Проблема интуиции в философии и математике. – М.: Мысль, 1965.
63. Новые идеи в математике. Сб. 10. – Пгд.: Образование, 1915.
64. Вейль Г. О философии математики. – М.–Л.: Гостехиздат, 1934.
65. Марков А.А. О логике конструктивной математики. – М.: Знание, 1974.
66. Тростников В.Н. Конструктивные процессы в математике. – М.: Наука, 1975.
67. Гейтинг А. Интуиционизм (введение). – М.: Мир, 1965.
68. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963.
69. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. – San Francisco: Freeman, 1982.
70. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. – М.: Советское радио, 1970.
71. Драгалин А.Г. Математический интуиционизм (введение в теорию доказательств). – М.: Наука, 1979.
72. Генкин Л. О математической индукции. – М.: Физматгиз, 1962.
73. Клини С.К. Введение в математику. – М.: ИЛ, 1957.
74. Расева В., Сикорский Р. Математика метаматематики. – М.: Наука, 1972.
75. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т.I. Логические исчисления и формализация арифметики; т. II. Теория доказательств. – М.: Наука, 1979, 1982.
76. Halmos P.R. Naive Set Theory. – N.Y.: Springer, 1977.
77. Ньютон И. Замечания на книгу пророка Даниила и апокалипсис св. Иоанна. – Пгр.: изд. Суворина, 1915.
78. Fraenkel A., Bernays P. Axiomatic set theory. – Amsterdam: North-Holland, 1958.
79. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. – М.: Мир, 1970.
80. Mostowski A. Constructible Sets with Applications. – Amsterdam: North-Holland, Warszawa: PWN, 1969.
81. Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. – М.: Советское радио, 1979; Вычислимое и невычислимое. – М.: Советское радио, 1980.
82. Манин Ю.И. Теорема Гёделя. – Природа, 1975, № 12, с. 80–87.
83. Успенский В.А. Теорема Гёделя о неполноте. – М,: Наука, 1981.
84. Линдон Р. Заметки по логике. – М.: Мир, 1968.
85. Успенский В.А. Нестандартный, или неархимедов, анализ. – М.: Знание, 1983.
86. Девис М. Прикладной нестандартный анализ. – М.: Мир, 1980.
87. Lutz R., Goze M. Nonstandard Analysis: A Practucal Guide with Applications. – N.Y.: Springer, 1981.
88. Варпаховский Ф.Л., Колмогоров А.Н. О решении десятой проблемы Гильберта. – Квант, 1970, № 7, с. 38–44.
89. Mathematical Development Arising from Hilbert. Problems. – Providence (R.I.): American Mathematical Society, 1976.
90. Коэн П.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. – М.: Мир, 1969.
91. Манин Ю.И. Проблема континуума. – В кн.: Современные проблемы математики, т.5. – М.: ВИНИТИ, с. 5–72.
92. Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия. – М.: Наука, 1972.
93. Фесрерман С. Числовые системы. – М.: Наука, 1971.
94. Берс Л. Математический анализ, т. I. – М.: Высшая школа, 1975.

95. Keister H.J. Elementary Calculus. – Boston: Weber and Schmidt (Prindle), 1976.

96. Sullivan K. The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis Approach. – American Mathematical Monthly, 1976, vol. 83, № 5, с. 370–375.

97. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – Киев: Наукова думка, 1976; Механика и прикладная математика (логика и особенности приложений математики). – М.: Наука, 1983.

98. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX в. – М.–Л.: Гостехиздат. 1937.

99. Хинчин А.Я. Великая теорема Ферма. – М.–Л.: Гостехиздат, 1932; Постников М.М. Теорема Ферма. – М..: Наука, 1978; Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. – М.: Мир, 1980.

100. Полна Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа, т.1. – М.: Гостехиздат, 1956.

101. Thom R. Stabilité structurelle et morphogenèse. – N.Y.: Benjamin, 1972; Thorn R. Die Katastrophen Theorie: Gegenwätiger Standard Aussichten. – In: Mathematiker über Mathematik (heransgegeben von M. Otte). – Heidelberg: Springer, 1974, S. 124–134; Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: изд-во МГУ, 1983; Постои Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее применение. – М.: Мир, 1980; Гилмер Р. Прикладная теория катастроф, тт. 1., 2. – М.: Мир, 1984.

102. Том Р. Топология и лингвистика. – Успехи мат. наук, т. 30, 1975, № l (181), с. 199–221; Thom R. Topological models in biology. – Topology, № 8, 1969, p. 313–335.

103. Яглом И.М. Математические структуры и математическое моделирование. – М.: Советское радио, 1980.

104. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т.1. – М.–Л.: Гостехиздат, 1933.

105. Нейман фон Дж. Математик. – Природа, 1983, № 2, 88–95.

106. Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании математики. В кн.: Сочинения. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948, с. 279–293; 500–526 или в кн.: Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956, с. 309–341.

107. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических учений (Эрлангенская программа). – В кн.: Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956, с. 399–434.

108. Яглом И.М. Геометрические преобразования I–II. – М.: Гостехиздат, 1955–1956; Введения к чч. 1, 2 и 3; Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. – М.: Наука, 1969, §1.

109. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.

110. Харди Г.Х. Курс чистой математики. – М.: ИЛ, 1949.

111. Ли Ч. Введение в популящюнную генетику. – М.: Мир, 1978.

112. Бэрликэмп Э. Алгебраическая теория кодирования. – М.: Мир, 1971; Касами Т. и др. Теория кодирования. – М.: Мир, 1978; Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. – М.: Мир, 1976; Мак Вильямс Ф., Слоэн Н. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки. – М.: Связь, 1979.

113. Livinson N. Coding theory: a counter-example to G.H. Hardy's conception of applied mathematics. – American Math. Monthly, v. 77, 1970, № 3, p. 249–258.

114. Минеев В.П. Топологические объекты в нематических жидких кристаллах. Приложение к кн.: Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. – М.: Наука, 1982, с. 148–158; Воловик Г.Е., Минеев В.П. Физика и топология. – М.: Знание, 1980.

115. Дьедонне Ж. Современное развитие математики. – Сб. переводов «Математика», 1966, т.10, № 3, с, 3–11.

116. Дайсон Ф.Дж. Упущенные возможности. – Успехи математических наук, 1980, т.35, № 1 (211), с. 171–183 (и комментарии переводчика: с. 183–191).

117. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I, – М.–Л.: ОНТИ, 1935.

118. Курант Р., Ррбинсон Г. Что такое математика? – М.: Просвещение, 1967.

119. Ларошфуко Ф. де. Максимы. Паскаль Б. Мысли, Лабрюйер Ж. де. Характеры. – М.: Художественная литература, 1974.

120. Popper K.R. The Logic of Scientific Discovery. – London, 1959. (Неполный русский перевод в кн.: Попер К. Логика и рост научного знания. – М.: Прогресс, 1983, с. 33–235.

121. Weyl H. Gruppentheorie und Quantenmechanik. – Leipzig: Leubner, 1928. (Существуют более поздние издания и переводы на другие языки.)

122. Weyl H. Raut, Zeit, Materie. – Berlin: Springer, 1918. (Существуют более поздние издания и переводы на другие языки.)

123. Бергман П. Единые теории поля. – УФН, т. 132, вып. I, 1980, с. 177–190.

124. Яглом И.М. Герман Вейль. – М.: Знание, 1967.
125. Карри Х.Б. Основания математической логики. – М.: Мир, 1969.
126. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1965 (т.1), 1966 (т.2), 1967 (т.4).
127. Борн М. Эйнштейновская теория относительности. – М.: Мир, 1964.
128. Эйнштейн А. Основы общей теории относительности. – В кн.: [126], т.1, с. 452–504. [См. также: Лоренц Г. и др. Принцип относительности. – М.–Л.: ОНТИ, 1935, с. 231–305.]
129. Дайсон Ф. Будущее воли и будущее судьбы. – Природа, 1982, № 8, с. 60–70.
130. Майстров Л.Е. Развитие понятия вероятности. – М.: Наука, 1980.
131. Тутубалин В.Н. Границы применимости (вероятностно-статистические методы и их возможности). – М.: Знание, 1977.
132. Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики? – М.: ИЛ, 1947.
133. Вигнер Ю. Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971.
134. Дайсон Ф. Математика и физика. – УФН, т. 85, вып. 2, 1965, с. 351–364; Математика в физических науках. – В кн. [137], с. 110–127.
135. Вайнберг С. Первые три минуты. – М.: Энергоиздат, 1981; Силк Дж. Большой взрыв. – М.: Мир, 1982; Фундаментальная структура материи (под ред. Дж. Малви). – М.: Мир, 1984.
136. Долгов А.Д., Зельдович Я.Б. Вещество и антивещество во Вселенной. – Природа, 1982, № 8, с. 33–45.
137. Математика в современном мире. – М.: Мир, 1967.
138. Клайн М. Логика против педагогики. – В кн.: Математика (проблемы преподавания математики в вузах), вып. .3. – М.: Высшая школа, 1973.
139. Ньютон И. Всеобщая арифметика. – М.–Л.: Ростехиздат, 1948.
140. Ньютон И. Математические работы. – М.–Л.: ОНТИ, 1934.
141. Лейбниц Г.В. Избранные отрывки из математических сочинений. – УФН. 1948, т.3, вып. 1(23), с. 165–204.

Именной указатель

Абель 197, 201, 203, 340, 341, 343[130]
Авогадро 110
Адамар 244, 245, 282, 368, 372
Адамс 77
Аккерман 289
Ампер 187
Анаксагор 20
Анаксимандр 20
Анаксимен 20
Аполлоний 32–35, 38, 125, 129, 338, 339
Арган 106, 182
Аристотель 23, 26, 27, 29–32, 36, 57, 60, 61, 64, 68, 120, 123, 192, 211, 212, 215, 221, 228, 231, 237, 248, 256, 257, 274, 277, 287, 319, 359, 373, 397
Арно 136
Архимед 32, 33, 36–39, 125–127, 129, 157, 158, 193, 318, 320, 355, 404
Архит 26
Банах 314
Барроу 65, 122, 135, 152, 101, 202
Бейль 163
Белл 298
Бельтрами 102, 208, 209
Бентли 69, 73
Беркли 69, 70, 89, 170–173, 185
Бернайс 281, 289, 290, 296, 297, 307, 308
Бернулли Даниил 75, 78, 167
Бернулли Иоганн 75, 139, 141, 142, 161, 167

[130] **В.Э.:** В именном и предметном указателях перечислены страницы по <u>БУМАЖНОМУ</u> изданию книги 1984 года.

Бернулли Николай 168
Бернулли семейство 75, 166
Бернулли Яков 75, 161, 167
Бернштейн 244
Берри 239
Бертран 187
Бессель 51, 98, 99, 104
Бируни 132
Биркгоф 336, 343, 398
Бойаи Фаркаш 98, 99
Бойаи Янош 98, 99, 102, 103, 105, 191, 210, 211, 317, 340
Бойль 86, 265
Больцано 201, 205, 276, 292
Бомбелли 137–139, 144
Борель 224, 244, 245, 249, 270, 271, 276, 386
Браве 341
Браге 67
Брауэр 271–278, 280–282, 291, 293, 298, 306, 309, 321, 382, 393
Брахмагупта 130
Бриджмен 374
Бувар 77
Буль 182, 213, 214, 220
Бурали-Форти 236, 240, 241, 271
Бурбаки 15, 279, 297, 298, 330, 370, 373
Бхаскара 130, 131
Бэббедж 174
Бэкон Фрэнсис 61, 85, 86, 328, 332, 353, 390
Бэр 244, 249, 270, 271, 386
Валлис 135, 137, 139, 140, 147, 149, 152, 162, 202
Вебер 84, 374
Вейерштрасс 205, 207, 276, 292, 367, 374
Вейль Андре 376
Вейль Герман 16, 242, 260, 263, 264, 273, 275, 277, 278, 280, 281, 283, 285, 292, 293, 304, 331, 368, 369, 374, 375, 379, 384, 386, 399, 400
Веронезе 210
Вессель 106, 182
Вигнер 401
Виет 134, 136, 144–146, 149
Виттгенштейн 374
Вольтер 69, 80, 176, 226
Вольф 167
Вудхаус 180
Галилей 52, 53, 58–62, 64–66, 68, 86, 87, 147, 232
Галле 77
Галлей 66, 76, 149, 170
Галуа 117, 187, 340, 341
Гамильтон 81, 88, 107, 108, ИЗ, 182, 193, 202, 205–207, 213, 272, 329, 352, 371
Ганкель 185, 374
Гарриот 137, 144
Гассенди 64, 65
Гаусс 83–85, 87, 88, 97–99, 101–106, 182, 183, 187, 191, 208, 210, 232, 249, 327, 343, 351, 371
Гейне 276
Гейтинг 282, 322, 374
Гельмгольц 109, 328, 334
Гемпель 263
Гене-Вронский 192
Генцен 308, 309
Гераклит 20
Герон 38, 39, 79, 126, 127, 129
Герц 389
Гершель 76, 77, 174
Гёдель 15, 238, 296, 297, 303–309, 311, 312, 315, 316, 318, 358, 372, 381
Гиббс 332

Гиппазий 123
Гильберт 210, 221, 223, 225–227, 229, 230, 237, 239, 254, 278, 281, 284, 292, 298, 301– 304, 307–309, 335, 336, 358, 373, 375, 379, 384, 396
Гоббс 65, 89, 147
Гольдбах 169, 301, 311, 329
Гординг 347
Гранди 167
Грассман 109, 207, 221
Грегори Джеймс 147, 152, 202, 213
Грегори Дункан 185
Грегори Дэвид 147
Греллинг 239
Гук 62, 66
Гульдин 157
Гюйгенс 62, 64, 65, 68, 79, 152, 326, 383
Дайсон 350, 401
Д'Аламбер 75, 78, 81, 96, 116, 140, 142-144, 166, 175, 186, 188, 193, 202, 203
Дедекинд 207, 219, 233–235, 253, 294, 374, 384
Дезарг 326
Декарт 53–58, 60–62, 64–66, 79, 116, 135, 136, 139, 144, 146, 149, 183, 188, 212, 267, 269, 323, 351, 362
Демокрит 24
Джевонс 214
Джеймс 81, 82, 116, 240, 393
Джине 72, 389, 397, 400
Дидро 81, 88, 151
Диксон 330, 342, 343
Диоклес 38
Диофант 127–129, 131
Дирак 343
Дьедонне 346, 347, 370
Дюбуа-Реймон 150, 319
Дюгем 399
Евдокс 26, 33–36, 124, 140, 157
Евклид 32–34, 36, 37, 40, 91, 93–97, 99, 100, 102, 120, 121, 124, 129, 135, 140, 149, 193, 194, 209, 220, 223, 228, 246, 262, 313, 330, 339, 340, 361, 404
Жергонн 221
Жирар 137, 139
Жордан 341
Зенон Элейский 401, 402
Кавальери 152, 157, 158
Калле 169
Кант 63, 90–93, 103, 104, 212, 268, 269, 272, 293, 369, 392, 393
Кантор 105, 226, 231–237, 240, 243, 245, 247–249, 263, 294–297, 315, 318–320, 325, 372
Кардано 134, 136, 138, 143, 144, 148, 149
Карно Лазар 175, 179, 180, 186, 203
Карри 379
Кассини Жак 80
Кассини Жан Доменик 79, 80
Кельвин (Томсон) 333
Кеплер 41, 46–52, 57, 64, 66–68, 86, 152, 157, 390, 396
Кестнер 97
Клейн 103, 113, 280, 319, 327, 334, 335, 341, 365
Клеро 76, 192
Клюгель 96, 97
Конринг 163
Конт 302
Коперник 46, 47, 50–53, 57, 64, 66, 86, 390, 396
Коши 83–85, 88, 180, 183, 187, 190, 201–205, 232, 318–320, 325, 367
Коэн 312, 313, 315, 318
Кронекер 236, 249, 269–271, 286, 334, 382
Куайн 263, 266, 297, 380
Курант 335, 344, 345
Кутюра 271

Кэли 102, 108, 113, 193, 342, 371
Лагранж 13, 71, 72, 75, 76, 81, 83, 87, 143, 167–169, 173, 174, 176, 177, 186, 205, 326, 340
Лакатос (Лакатош) 365
Лакруа 174, 187, 192
Ламберт 96, 97, 191, 210
Лаплас 75, 76, 81, 87, 204, 352, 385, 400
Лебег 110, 244, 246, 249, 270, 271, 278, 364, 386
Левенгейм 315, 316–318, 358
Леверье 77
Леви Бепо 244
Левкипп 24
Лежандр 187, 333
Лейбниц 54, 74, 75, 86, 87, 121, 136, 139, 141, 142, 148, 152, 158, 160–173, 186, 189, 202, 205, 212, 213, 221, 232, 252, 318, 319, 371, 383, 386
Линдеман 269
Лобачевский 98–103, 105, 191, 210, 317, 340
Локк 89
Люилье 175, 176
Мазер 141
Максвелл 84, 343, 380, 387, 389
Мариотт 265
Матиясевич 310
Менелай 33
Мерсенн 55
Милль Джон Стюарт 378, 383
Миттаг-Леффлер 318
Монж 189, 190
Мопертюи 79–81
Морган Огастес де 141, 179–182, 185, 213, 215
Мостовский 379
Мур 367
Нейгебауэр 338
Нейман Джон фон 289, 296, 317, 337, 346, 380, 384
Нельсон 239
Непер 134
Ньютон 13, 34, 37, 54, 57, 63–75, 77–79, 86, 87, 122, 125, 139, 147, 148, 152, 154, 158–161, 164–166, 169–171, 173, 174, 186, 202, 205, 265, 350, 351, 362,386, 397
Нювентидт 162
Ольберс 84, 104, 327
Паскаль 58, 64, 121, 135, 136, 152, 158, 161, 221, 267–269. 326, 354, 362, 368,374,406
Пачоли 134
Паш 210, 221–223, 226, 280
Пеано 207, 219–222, 226, 229, 244, 249, 253, 254, 280, 320, 383 435
Пембертон 147
Персон (Роберваль) 152
Пиацци 84
Пиери 210
Пикар 205, 224, 386
Пикок 174, 184–186, 213
Пирс 215, 216, 220, 255, 401
Пифагор 21, 124
Планк 105
Платон 25, 26, 29–31, 34, 74, 106, 119, 124, 237, 249, 371, 373
Плейфер 95, 96
Плутарх 25, 26
Понселе 188–191
Поппер 365, 369
Принсхейм 230
Птолемей 32, 33, 35, 36, 39, 46, 47, 50, 126, 129, 131, 396
Пуанкаре 12, 199, 211, 218, 225, 236, 240–242, 251, 264, 270, 271, 276, 086, 297, 318, 324, 334, 362, 365, 382, 384, 394–396
Рамсей 240, 260

Рассел 113, 188, 218, 220, 235, 237–241, 245, 253–267, 285, 286, 292, 294, 296, 298, 301, 304, 319,322,359, 364, 374, 380
Реллих 352
Рен 66
Рёмер 47
Риман 101, 102, 105, 191, 208, 210, 317, 339, 340
Ринд 128
Ришар 239, 294
Роберваль (Персон) 152
Робинсон 319
Ролль 192, 202
Руффини 340
Саккери 95–97, 99, 100, 191
Сантаяна 358, 386
Селирье 205
Сенека 117
Сильвестр 193
Синдж 336
Сколем 315, 319, 358
Слэтер 349
Смит 122
Снеллиус 57, 79
Сократ 30–32
Стевин 134, 137
Стильтьес 224, 371
Стоун 343, 344, 346
Тарский 241, 314
Трусделл 349
Тэйт 333
Уайлдер 363, 367
Уайтхед 255–262, 266, 285, 296, 304, 359, 363, 367–369, 380, 407
Унамуно Мигель де 369
Фалес Милетский 20
Ферма 79, 135, 144, 146, 152–155, 157, 188, 307, 326, 327, 343, 362
Филолай 21
Филон 217
Фонтенель 88
Фреге 216–220, 222, 226, 229, 238, 248–250, 253, 254, 259, 267, 298
Френд 179
Френель 78
Френкель 295–297, 304, 311, 312
Фурье 78, 83, 85, 187, 231, 333, 335
Ханстен 197
Харди 224, 342, 343, 363, 372
Хаусдорф 237
Хевисайд 348, 365, 403
Хольмбе 197, 203
Худде 146
Цермело 242–245, 273, 284, 295–297, 304, 311, 312, 315, 383, 384
Черч 266, 310, 315, 373
Шварц Герман Амандус 205
Шварц Лоран 346
Швейкарт 98
Шмидт 244
Шопенгауэр 272, 362
Шредер 215, 220
Шредингер 401
Штифель 134–136
Штольц 319
Шюке 136
Эддингтон 343, 366, 392, 398, 400
Эйлер 75, 77, 78, 80, 84, 140–143, 148, 166, 168, 169, 172, 173, 176, 177, 231, 281, 326, 343
Эйнштейн 115, 340, 343, 375, 388, 392, 396, 398–400

Эйри 77
Эмпедокл 37
Эратосфен 38, 39
Эрмит 224, 371, 372, 397
Юм 89, 90, 93, 103
Юнг 78
Якоби 106, 192, 333

Предметный указатель

Абстрагирование 21, 26, 27
Абстракция 21, 26–29, 329
«Автобиография» Рассела 253
Автрлогическое прилагательное 239
Академия Платоновская 25, 32
Аксиом независимость 223
– непротиворечивость 222
– система фон Неймана 296
– – Цермело 294–295
– – Цермело–Френкеля 295–299
Аксиома бесконечности 261
– выбора 243
– о параллельных Евклида 93
– – Плейфера 95
– редукции 259
– сводимости 259
Аксиоматизация 331
«Аксиоматическое мышление» Гильберта 223
Аксиомы 29
– общие понятия 29
– постулаты 29
Актуальная бесконечность 231
Алгебра абстрактная 346
– логики 213, 214
– операторов 213
«Алгебра» Валлиса 135, 139
«Алгебра» Эйлера 143, 231
«Алгебра как наука о времени» Гамильтона 272
Алгебры основная теорема 182
Алгебраическая топология 346
Алгоритмическая неразрешимость десятой проблемы Гильберта 310
Александрийская библиотека 39, 42
Александрийский музей 39
– период 32
«Алсифрон, или Мелкий филосов» Беркли 69
«Альмагест» Птолемея 33, 35, 36
Анализ диофантов 128
– нестандартный 319, 320
«Аналитик» Беркли 170–172
«Аналитическая механика» Лагранжа 71, 326
«Аналитическая теория вероятностей» Лапласа 400
«Аналитическая теория тепла» Фурье 83, 333
Аналитическое общество 174
Анамнезис 29
Антиномии 237
«Апология математика» Харди 343, 372
Апории Зенона 401, 402
Арабы 130–133
Арифметика «футбольная» 110–112
«Арифметика» Диофанта 128
«Арифметика бесконечно малых» Валлиса 137, 202

«Арифметические исследования» Гаусса 83, 327
Астральная геометрия 98
Астрономия греков 34–36
Атомисты 24
«Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки» Галилея 59
«Беседы о множественности миров» Фонтенеля 88
Бесконечно малая величина 188
Бесконечности аксиома 261
Бесконечность актуальная 231
– потенциальная 231
«Введение в анализ бесконечно малых» Эйлера 148
«Введение в аналитическое искусство» Виета 145
«Введение в математическую философию» Рассела 254, 262
«Великое искусство» Кардано 138, 144
Взаимно-однозначное соответствие 232
«Вокруг теории относительности» Эйнштейна 392
Волновая теория света 77, 78
«Всеобщая арифметика» Ньютона 139, 147
«Вторая аналитика» Аристотеля 29
Вторичные качества 56
Выбора аксиома 243
Вывод дедуктивный 30–32
– силлогистический 30
Высказываний исчисление 214, 215
Вычислимость 310
Гармонические созвучия 22
«Гармония мира» Кеплера 50, 52
Гармония мира по Кеплеру 47–50
География греков 38–39
«География» Птолемея 39
«География» Эратосфена 39
Геометрия антиевклидова 98
– астральная 98
– гиперболическая 103
– неевклидова 98–105
– проективная ИЗ, 114, 188, 189
– риманова 340
– сферическая 209
– удвоенная эллиптическая 102
«Геометрия» Герона 127
«Геометрия» Декарта 57, 135, 139, 146
Гетерологическое прилагательное 239
Гёделевский номер 304
«Гидродинамика» Даниила Бернулли 78
Гипер вещественные числа 319, 320
Гиперкомплексные числа 109
Гиперчисла 109
Гипотеза континуума 247, 285
– обобщенная 247
«Государство» Платона 25, 29
Групп теория 340–342
Группы непрерывные 341
Дедуктивный вывод 30–32
Десять (идеальное число пифагорейцев) 23
Деферент 35
«Диалог о двух главнейших системах мира» Галилея 53, 59
«Диоптрика» Декарта 57
Диофантов анализ 128
Дискретное определение 257
Дифференциал 187, 188
«Дифференциал» Д'Аламбера 202
Доказательства теория 290
Доказательство конструктивное 249

– математическое 359
– существования 249
Дроби 123
Дружественные числа 330
«Евклид, избавленный от всяких пятен» Саккери 96
Евклидовой геометрии непротиворечивость 209
«Естествознание и логика» Гильберта 302
Живая сила 75
«Жизнь Марцелла» Плутарха 26
«Загадочная Вселенная» Джинса 72, 389, 397
Зажигательные зеркала 38
Закон Архимеда 39
– всемирного тяготения 66
– исключенного третьего 30, 211, 214
– отражения света 35
– преломления света 57
– противоречия 30
Законы де Моргана 180
– Кеплера 48–50
– Ньютона 66, 67
«Законы» Платона 124
«Замечания на книгу пророка Даниила и апокалипсис св. Иоанна» Ньютона 73
Идей мир 25, 29
Импликация материальная 217
Индийцы 130–133
Интеграл 161
– определенный 155, 156
Интесиональное определение 255
Интуиционизм 267–283
Интуиционисты 267–283
Ионийцы 18–20
Иррациональные числа 123
«Исследование законов мышления» Буля 182
«Исследование психологии процесса изобретения в области математики» Адамара 282, 372
«Исследования о мнимых корнях уравнений» Эйлера 142
Истина необходимая 252
– случайная 252
Истинные (логические) противоречия 240
Исчерпывания метод 33, 157
Исчисление высказываний 214, 215
– типов 145
– чисел 145
«Исчисление понятий» Фреге 216, 219
Кардинальные числа 235
Картезианская философия 53–58
«Катоптрика» Архимеда 38
«Катоптрика» Герона 38
«Катоптрика» Евклида 37
Качества вторичные 56
– первичные 56
Квадратные числа 21
«Квадратура окружностей и гипербол» Гранди 167
«Квадратура параболы» Архимеда 33
Квадривиум 23
Кванторы 216
Кватернионы 108
Кватернионов некоммутативность умножения 108
Квинта 22
Комета Галлея 76
Коммутативность умножения чисел 107
Комплексные числа 106, 107
Конечность скорости света 77
«Конические сечения» Аполлония 32, 34

Корпускулярная теория света 77
«Космографическая тайна» Кеплера 47, 48
«Критика чистого разума» Канта 90, 212, 293
«Курс алгебраического анализа» Коши 180, 203
«Лекции о развитии математики в XIX в.» Клейна 335
Логика алгебры 213, 214
– отношений 215, 216
– универсальная Лейбница 212
«Логика научного исследования» Поппера 369
«Логика современной физики» Бриджмена 374
Логицизм 252–267
Логицисты 252–267
Логические принципы 359, 360
«Математик» фон Неймана 337, 346, 380
Математики непротиворечивость 301
«Математическая теория волчка» Пуанкаре 334
«Математические начала натуральной философии» Ньютона 68, 69, 71–73, 87, 147, 149, 160
«Математический анализ логики» Буля 213
Математическое доказательство 359
Материальная импликация 217
Матрицы 108
«Между физикой и философией» Джинса 389
Метаматематика 290
Метафизика 177
«Метафизика» Аристотеля 23
«Метафизические начальные основания естествознания» Канта 92
«Метафизические размышления» Декарта 54
Метод (доказательства) от противного 123
– исчерпывания 33, 157
– финитный 290
– форсинга 312
«Методы математической физики» Куранта и Гильберта 335
«Метрика» Герона 126
Механика греков 36, 37
Механистическая картина мира 70
Мир вещей 25
– идей 25, 29
«Мир, каким я вижу его» Эйнштейна 398
Модели 210
«Мое философское развитие» Рассела 188, 265, 267
«Монадология» Лейбница 221
Музыка сфер 23, 50
«Мысли об объяснении природы» Дидро 88
«Мысли» Паскаля 58, 122, 136, 158, 368, 374
Набор логических форм мышления 212
– основных понятий 212
Наименьшая верхняя граница 241
Натурфилософия ионийцев 20
– пифагорейцев 24
«Наука и метод» Пуанкаре 264, 334
«Начала алгебры» Френда 179
«Начала» Евклида 32, 34, 36, 37, 95, 103, 113, 120–122, 124, 125, 140, 149, 228, 361
«Небесная механика» Лапласа 76, 87
Неделимые Кавальери 157, 158
Неевклидова геометрия 98–105
Независимость аксиом 223
Некоммутативность умножения кватернионов 108
Необходимая истина 252
Непрерывная функция 186
– –, но не дифференцируемая 187
Непрерывности принцип 163, 188–191
Непрерывность равномерная 204
Непрерывные группы 341

Непротиворечивость аксиом 222
– в радикалах общего алгебраического уравнения пятой степени 341
– евклидовой геометрии 209
– математики 301
Неразрешимость алгоритмическая десятой проблемы Гильберта 310
Несоизмеримые отношения 123
Нестандартный анализ 319, 320
«Новая астрономия» Кеплера 48
«Новая стереометрия винных бочек» Кеплера 157
«Новое изобретение в алгебре» Жирара 137, 139
«Новые методы небесной механики» Пуанкаре 324
«Новый органон» Бэкона 85, 86, 353
«О бесконечном» Гильберта 302, 375
«О бесконечности» Гильберта 286
«Об обращениях небесных сфер» Коперника 46, 52
Обобщение 329
«Обоснования математики» Гильберта 278, 302
«Об основаниях математики» Брауэра 271
Общие понятия (аксиомы) 29
«О гипотезах, лежащих в основании геометрии» Римана 102
«О достоинстве и приумножении наук» Бэкона 332
«О зажигательном зеркале» Аполлония 38
«О зажигательных зеркалах» Диоклеса 38
«О коноидах и сфероидах» Архимеда 33
«О логарифмах отрицательных величин» Д'Аламбера 142
«О науке» Пуанкаре 199
«О плавающих телах» Архимеда 39
«О формально неразрешимых утверждениях [оснований математики] и родственных систем» Гёделя 303
«О шаре и цилиндре» Архимеда 33
Октава 22
Определение дискретное 257
– интенсиональное 257
– прямое 257
– экстенсиональное 257
Оптика греков 37, 38
«Оптика» Евклида 37
«Оптика» Ньютона 71, 72, 77
«Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики» Фаркаша Бойаи 99
«Органон» Аристотеля 211, 221
Ординальные числа 235
«Основания арифметики» Фреге 216, 222, 253
«Основания геометрии» Гильберта 221
«Основания математики» Рассела и Уайтхеда 240, 255–266, 359, 380
«Основания математической логики» Карри 379
«Основания теории множеств» Хаусдорфа 237
«Основные законы арифметики» Фреге 216, 219, 238, 253
«Основы дифференциального исчисления» Эйлера 172
Отношений логика 215, 216
Отражение от выпуклого зеркала 37
– параболического зеркала 38
– плоского зеркала 37
Отношения несоизмеримые 123
– соизмеримые 123
«Отрицательное» Д′Аламбера 140
Очерк оснований геометрии» Рассела 113, 254
Парадокс Берри 239
– брадобрея 239
– Греллинга–Нельсона 239
– лжеца 237
– Ришара 239
– слов 240
Параллельные по Лобачевскому 100

Первичные качества 56
Переписка Лейбница с Кларком 86
Период (александрийский) эллинистический 32
«Письма из Деттонвиля» Паскаля 158
«Письма к немецкой принцессе» Эйлера 281
«Письма к провинциалу» Паскаля 53
Пифагорейская музыкальная шкала 22
Пифогорейцы 21–24
Платоники 25, 26
Пленум 69
«Полная арифметика» Штифеля 134
«Полное введение в алгебру» Эйлера 140
Полнота аксиоматической системы 301
Понятие финитное 290, 291
«Портреты по памяти» Рассела 266
Постулаты (аксиомы) 29
Потенциальная бесконечность 231
«Правила для руководства ума» Декарта 54, 56, 267
«Прагматизм» Джеймса 81, 240, 393
«Практические аналитические искусства» Гарриота 137
«Предел» Д'Аламбера 202
«Приложение» Яноша Бойаи 99
Принцип инерции 62
– кратчайшего пути 38
– наименьшего времени 79
– – действия 80
– непрерывности 163, 188–191
– перманентности эквивалентных форм 184
– порочного круга 240
«Принципы математики» Рассела 254, 310
«Принципы философии» Декарта 55, 56
«Пробирных дел мастер» Галилея 58
Проблема разрешимости 309
Проблемы Гильберта 226
«Проблемы обоснования математики» Гильберта 375
«Проблемы философии» Рассела 254
Проективная геометрия 113, 114, 188, 189
Производная 152–154
«Пролегомены ко всякой будущей метафизике, могущей появиться как наука» Канта 90
Принципы логические 359, 360
«Принципы математики» 238, 265
Производная 160, 161, 186
Противоземля 23
Противоречия истинные (логические) 240
– семантические 240
Прямое определение 257
Птолемеева система мира 35, 36
Пятиугольные числа 21
Равномерная непрерывность 204
«Размышления об общей причине ветров» Д'Аламбера 143
«Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых» Карно 179, 180, 186
«Разное» Д'Аламбера 202
«Разум и природа» Вейля 280
«Рассуждение о методе» Декарта 54, 55, 116
«Рассуждение о применении в алгебре знака минус» Мазера 141
«Революция в математике» Стоуна 343
Редукции (сводимости) аксиома 259
Рекурсивность 310
Ряда сумма 168
– сходимость 166
Ряды бесконечные 165
– расходящиеся 203, 230
– сходящиеся 203, 230

– Фурье 85, 231
Семантические противоречия 240
Силлогистический вывод 30
Система аксиом фон Неймана 296
– Цермело 294, 295
– Цермело–Френкеля 295–299
«Скептицизм и слепая вера» Сантаяны 386
Случайная истина 252
«Совместимость аксиом выбора и обобщенной гипотезы континуума с аксиомами теории множеств» Гёделя 311
Специализация 330
Статистический подход к описанию природы 400
Суждения аналитические 253, 268
– синтетические 268
Существование в математике 246, 360
Существования доказательства 249
– – конструктивные 249
– – теорема 360
«Счет и измерение» Гельмгольца 109
«Теодицея» Лейбница 74
Теорема алгебры основная 182
– Банаха–Тарского 314
– Гёделя о неполноте 303–308
– Кэли–Гамильтона 193
– Левенгейма–Сколема 316–318
– Ферма 307, 327
– Черча 310
Теоретико-множественные основания математики 284–299
«Теория аналитических функций» Лагранжа 173
Теория бесконечных множеств 230
– групп 340–342
– доказательства 290
– множеств Кантора 230–237
– Левенгейма–Сколема 315–318
– света волновая 77, 78
– – корпускулярная 77
– сфер Евдокса 34, 35
– типов 257–259
«Теория движения небесных тел» Гаусса 84
«Теория параллельных прямых» Ламберта 97
Тетрактис 23
Типов исчисление 145
– теория 257–259
Топология алгебраическая 346
«Трактат о геометрическом духе» Паскаля 120, 221
«Трактат о подстановках» Жордана 341
«Трактат о принципах человеческого знания» Беркли 171
«Трактат о проективных свойствах фигур» Понселе 188, 189
«Трактат о свете» Гюйгенса 65
«Трактат о человеческой природе» Юма 89
«Трактат по алгебре» Пикока 185
«Трактат по дифференциальному и интегральному исчислению» Лакруа 187, 192
«Трактат по электричеству и магнетизму»-Максвелла 84
Трансфинитная индукция 308
Треугольные числа 21
Тригонометрия 33
Удвоенная эллиптическая геометрия 102
Универсалии 26
Универсальная логика Лейбница 212
Универсальный научный язык 212
Утверждение финитное 290, 291
«Учебник арифметики» Грассмана 207
«Феномены» Евклида 34

Фигурные числа 21
«Физика» Аристотеля 231
«Филеб» Платона 25
Философия Канта 90–93
– картезианская 53–58
«Философия математики и естественных наук» Вейля 263, 374, 379, 399
«Философское значение современной логики» Куайна 380
Финитное понятие 290, 291
– утверждение 290, 291
Финитность 290
Финитный метод 290
Флюксии 159
Флюэнты 159
Формализм 284–299
Формалисты 284, 299
«Формальная логика» де Моргана 215
«Формуляр математики» Пеано 220
Форсинга метод 312
«Фундаментальная теория» Эддингтона 398
Функция вычислимая 310
– пропозициональная 216
– рекурсивная 310
«Хронология древних царств с исправлениями» Ньютона 73
«Цель и структура физической теории» Дюгема 399
«Ценность науки» Пуанкаре 225, 334, 396
Центральный огонь 23
Четверица 23
Чисел исчисление 145
Числа гипервещественные 319, 320
– гиперкомплексные 109
– дружественные 330
– иррациональные 123
– кардинальные 235
– квадратные 21
– комплексные 106, 107
– ординальные 235
Число 21
– у пифагорейцев 23, 24
– – платоников 26
«Что такое числа и для чего они служат» Дедекинда 207
«Шесть геометрических упражнений» Кавальери 157
Эксистенциональное определение 257
«Элементарная математика с точки зрения высшей» Клейна 365
«Элементарное изложение высшего анализа» Люилье 175
«Элементы арифметики» Пеано 207
«Элементы геометрии» Клеро 192
«Элементы математики» Бурбаки 370
Эпицикл 35
Эрлангенская программа 341, 342

МОРИС КЛАЙН

Математика. Утрата определенности

Научный редактор А. Н. Кондрашова
Мл. научный редактор М. В. Суровова
Художники Д. А. Аникеев, Ю. А. Ващенко
Художественный редактор В. Б. Прищепа
Технический редактор Л. П. Бирюкова
Корректор В. И. Постнова

ИБ 3589

Сдано в набор 02.04.84 Подписано к печати 24.08.84. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура литератур. Печать высокая. Объем 14,0 бум. л. Усл. печ. л. 28,0. Усл. кр.-отт. 28,0. Уч.-изд. л. 32,67. Изд. № 12/2649. Тираж 50 000 экз. Заказ № 341. Цена 1 р. 90 к.

Издательство «Мир»
129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2

Отпечатано в Ленинградской типографии № 2 головном предприятии ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29 с матриц ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28

Оглавление

VEcordia 1
Извлечение R-KLINE3 1
Моррис Клайн 1
Утрата Определенности 1
Математика: Утрата определенности. Главы XI–XV 2
XI. Формализм и теоретико-множественные основания математики 2
XII. Бедствия 13
XIII. Математика в изоляции 29
XIV. Куда идет математика? 52
XV. Авторитет природы 68
Литература 89
Избранная литература 89
Дополнительная литература 92
Именной указатель 96
Предметный указатель 101
Оглавление 110