Дневник

Quod sentimus loquamur,
quod loquimur sentiamus!

VEcordia

Извлечение R-OAKL-1

В лесу родилась ёлочка...

Открыто: 2012.06.15 12:11
Закрыто: Не закрыто
Версия: 2013.06.02 14:38

ISBN 9984-9395-5-3
Дневник «VECORDIA»

ISBN 5-9900342-4-5
Олег Акимов. «Конструктивная математика»

Олег Акимов

КОНСТРУКТИВНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть I
С комментариями Валдиса Эгле

Impositum

Grīziņkalns 2013

Talis hominis fuit oratio,
qualis vita

Аннотация

http://sceptic-ratio.narod.ru/ma/km.htm#KM00
УДК 681.5.01:512
ББК 22
А 39

Рецензенты:

заведующий кафедрой Высшей математики Московского энергетического института, доктор физико-математических наук, профессор И.М. Петрушко;

директор Института электротехники, заведующий кафедрой Физики электротехнических материалов и компонентов автоматизации электротехнологических комплексов, доктор технических наук, профессор В.А. Филиков.

Акимов О.Е. Конструктивная математика. – М.: Издатель АКИМОВА, 2005. – 294 с.: илл.

ISBN 5-9900342-4-5

Данное учебное пособие является расширенным продолжением курса «Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы». В отличие от систематического курса здесь демонстрируются базовые принципы обоснования математического знания и приемы конструирования новых математических объектов. Читатель больше узнает о природе отдельно взятого числа и целой числовой последовательности, научится строить числовую ось с заданными свойствами. В книге приводятся примеры приложения конструктивной математики к решению конкретных физических задач. В частности, рассчитываются атомные модели кристаллического вещества и фуллерена, рассматривается строение солнечной системы с точки зрения аттракторов.

Эта книга адресована в первую очередь студентам и преподавателям университетов. Но она будет полезна и более широкому кругу читателей, интересующихся фундаментальными проблемами математики, физики и, вообще, точной науки. Поэтому ее с увлечением прочтут психологи, занимающиеся проблемами познания, а также философы, которым не чужды задачи передовой науки.

Конструктивная математика

Акимов О.Е.
http://sceptic-ratio.narod.ru/ma/km1.htm

1. Психологический аспект познания

Общая схема восприятия и познания окружающего мира примерно такова. В результате *восприятия* объектов внешнего мира сначала образуются смутные *идеи* – конгломерат из звуков и образов. Далее в процессе *образного мышления* из этого конгломерата вычленяются отчетливые *представления* и *образы*, а *языковое мышление* формирует *понятия* и *дефиниции*. За образное и языковое мышление, согласно современным нейрохирургическим исследованиям, ответственны различные полушария коры головного мозга: *формально-лингвистические центры* находятся в левом полушарии, а *механико-геометрические* – в правом. Правополушарное мышление, ответственное за *пространственную организацию*, называется *интуитивным*; его *интегральный, макрооперационный* ход трудно проследить самому, тем более передать или рассказать о нем другим. Образное мышление обрабатывает в основном *объективные* данные, поступающие из *внешнего* мира *конструктивными методами*, т.е. через *представления*. Левое полушарие оперирует преимущественно *субъективными* и *качественными* категориями; оно имеет дело с *речью, логикой* и *счетом в уме*[1] (арифметические действия производятся помимо каких-либо пространственных моделей). Языковое мышление называют еще *вербальным*; в противоположность образному мышлению, его можно назвать *дифференциальным* или *микрооперационным*.

Биполярность психической деятельности имеет *доминантный* и *рецессивный* полюса, в зависимости от того, какое из полушарий – левое или правое – является ведущим, а какое – ведомым. Слева находятся «мистические» центры, справа – «эмоциональные», отсюда левополушарные люди менее эмоциональны, но более религиозны, и наоборот. Говоря о биполярности человеческой психики, мы будем иметь в виду те ее сектора, которые в основном ответственны за эпистемологию, но так как всякий индивид не только познает мир, но и эмоционально реагирует на него, то, естественно, по определенному проявлению его психической деятельности можно судить и об его эпистемологии.

Левополушарные индивидуумы преимущественно как думают, так говорят и пишут: грамотно и точно; способны к быстрому заучиванию стихов, к овладению иностранными языками. Если правое полушарие каким-то образом повреждено, то человек сохраняет способность правильно строить предложения, но они отличаются своей крайней бессодержательностью. У близких, хорошо знавших его, людей создается впечатление, что человека подменили, так как он превращается в роботоподобное существо. И, напротив, повреждение левого полушария может привести к утрате речи или серьезным ее нарушениям, однако способность рационально и связно думать человек сохраняет, вместе с этой способностью сохраняется и существо его личности, т.е. адекватная реакция на поступки других людей. Близкие и родные чувствуют, что имеют дело с тем же человеком, что и до повреждения мозга. Замечены также половые и возрастные отличия: у женщин и лиц пожилого возраста больше развито символьное, формально-феноменологическое мышление, у мужчин и детей – образное, механико-геометрическое. Люди с более активным левым полушарием скорее становятся поэтами, бухгалтерами, юристами, экономистами, психологами, социологами, деятелями других гуманитарных профессий; люди, загружающие преимущественно правое полушарие, это – художники, архитекторы-строители, инженеры-конструкторы, т.е. занятые в технических или эмпирических сферах знания об объективном мире. Таким образом, деление людей на *конструктивистов* и *формалистов* имеет под собой некоторые особенности морфологии мозга.

Предположим, что в данный момент вы разглядываете книгу, лежащую на вашем столе. В связи с ней нервные импульсы возбуждают в вашем мозгу образ синего глянцевого параллелепипеда, покоящегося на темно-коричневой отполированной поверхности. За возникновение данной картины ответственна низшая нервная система человека и мышление, как таковое, отсутствует. Представленный же образ или просто *представление* является уже продуктом высшей психической деятельности, которая может протекать вне всякого реального объекта. Этот образ, как правило, лишен каких-то неактуальных признаков (для книги это может быть фактура бумаги), но сохраняются существенные атрибуты (ее прямоугольная форма). Образы, ощущения и представления существуют не просто в пространстве, а в пространственно-временном континууме, что воспринимается нами как движущиеся образы. На динамику ощущений мы не в силах повлиять, но над представлениями можно производить операции: удалять, приближать, выворачивать наизнанку. Так, мысленно мы можем раскрыть книгу на запомнившейся нам странице и отыскать там интересующий нас рисунок. Манипулировать можно и с теми представлениями, которые ранее никогда не были даны нам в ощущениях, например, можно представить себе вращение Земли, движение Земли вокруг Солнца, перемещение солнечной системы вокруг центра нашей галактики. Подобная мыслительная операция возможна в силу способности нашего мозга к моделированию с помощью знакомых нам с детства предметов, например, вращение Земли проецируется на вращение юлы.

Иметь *понятие* значит полностью абстрагироваться от визуально-пространственных характеристик предмета и удерживать его в своей памяти посредством специальных символов (в

---

[1] **В.Э.:** Ср. с §9.3 в книге {PENRO5}.

примере с книгой, – фамилия автора и название книги). Понятия связаны с интеллектуальной процедурой *описания* предмета, который к тому же может иметь несколько различных словесных обозначений; и наоборот, один и тот же термин допускает несколько толкований. Определение, данное через второстепенные свойства объекта, влечет за собой поверхностное описание (например, человек – двуногое существо без перьев; под это определение попадает общипанный петух), акцентирование же на основных характеристиках объекта говорит о его более глубоком понимании (например, человек – единственное млекопитающее, имеющее разум).

Сборником определений слов разговорного языка и специализированных терминов служит толковый словарь. Именно в нем приводятся названия вещей и соответствующая им смысловая интерпретация. В толковом словаре, как правило, нет каких-либо геометрических образов, чертежей, фотографий и других картинок (этим он, в частности, отличается от энциклопедического словаря), хотя определяемые понятия могут включать и зрительные образы. Представление, как элемент психической деятельности, тяготеет к пространственной и структурной организации, понятие – к временной и функциональной.

Источниками представлений являются органы зрения и осязания. Осматривая и ощупывая предмет, мы получаем информацию о его форме, размерах и местоположении. Чувство, улавливающее течение времени, позволяет нам проследить за динамикой развития пространственных характеристик: за изменением формы предмета или за перемещением его в пространстве. Однако представление – это не только зрительный образ, но и слуховой, вкусовой, тактильный, а понимание (осмысление) предмета часто включает в себя и представление о нем.

Например, при произнесении слова *водопад* мы воображаем шум падающей воды, одновременно наш нос как бы вновь чувствует влажность воздуха, а кожа «вспоминает» ощущение прохлады от бесчисленного количества выпавших на нее капелек влаги. Со словом *полынь* перед глазами встает другое представление, образ бледно-зеленой травы с узкими листьями; нос вдруг начинает ощущать терпкий запах, во рту появляется горьковатый вкус, а руки ощущают мягкость листвы, которая совсем не похожа, скажем, на жесткость листьев подорожника или колючесть листьев репейника. Образы водопада или полыни всегда очень конкретны: в принципе, мы можем указать место и время их восприятия. Представлениями, по-видимому, оперируют животные: собака помнит образ и запах своего хозяина, боль, которую она испытала от битья палкой, и неприятные ощущения от ошейника.

Старое изречение – *мысль без слова, что душа без тела* – не совсем точно. Если представление – это объект мышления, то оно легко может обойтись и без слов. Представления пришли и к человеку, и к собаке от реальных явлений; они – из внешнего мира; это – почти наполовину чувства. Понятие же, напротив, более тесно связано с нашим внутренним миром, языком. Оно всегда абстрактно; им не владеют животные, а если и владеют, то в самой зачаточной форме. Язык не обязательно совпадает с мышлением: за сказанным словом может и не стоять никакой мысли, и наоборот, мысль не обязательно воплощается в слове; высказанная идея – это скорее даже искаженная мысль. Образное мышление человека намного старше понятийного; оно в большей степени служит адаптации человека к окружающей среде: защита от естественных врагов, поиск пищи или партнера для продолжения рода осуществляется посредством образного мышления.

Если представление есть, прежде всего, конкретный элемент бытия, то понятие выражает отношение между элементами. Как представление не есть только пространственный образ, точно так же и понятие не сводится к чисто временной характеристике. Больше того, оно связано скорее не столько со временем, сколько с логикой и историческим развитием языковой формы, в которой время присутствует опосредованно, как сказал бы Гегель, в «снятом» виде. Кажется, что понятие существует для тех, кто не способен видеть, слышать и вообще ощущать. Можно обойтись без слов: достаточно непосредственно указать на предмет, чтобы человек понял, о чем идет речь. Недаром этимология древнерусского слова *ведать* связана со словом *видеть*; в английском языке выражение «*I see*» с прямым переводом «я вижу» означает также «я понимаю».

Представления даны нам в основном через зрительные образы, понятия – через словесные определения. Понятия и представления тесно взаимосвязаны: вслед за названным словом в памяти всплывает зрительный образ. Если каналы поступления чувственной информации от внешнего мира полностью блокированы, то представления могут быть столь отчетливы, что, кажется, идут извне, а не изнутри. Так, субъективные события, имеющие место при галлюцинациях или во сне, принимаются за объективные. Идея Бога, как внутреннее переживание определенного комплекса чувств, для религиозных людей превращается в образ реально живущего существа, обитающего где-то за пределами непосредственно видимого мира. Поскольку этот комплекс чувств крайне субъективен и произволен, то и воплощение Высшего Существа у разных людей будет различным. Об этом хорошо написал Вильям Джемс в своей книге «Многообразие религиозного опыта».

Возьмем другой пример. Половое созревание людей связано с переживанием комплекса сексуальных чувств, которые ищут в окружающей среде для себя соответствующий выход. Люди с повышенной половой потенцией отличаются и особой влюбчивостью. Конкретную материализацию получают также различные подозрения (например, чувство ревности), фобии (например, страх смерти оформляется через образ старухи с клюкой).

Однако вещи, данные в представлениях, могут сильно отличаться от вещей, данных непосредственно в ощущениях. Это касается как субъективных переживаний любви, ревности, страха, так и познавательных процессов. Например, орбиту Земли вокруг Солнца изображают в форме видимой эллиптической кривой, хотя в действительности траектория не имеет никакого видимого следа; то же самое можно сказать о земной оси.

Не всё, что описано или дано в определениях, можно представить образно. Классический пример: вообразить себе прямоугольный треугольник можно, но треугольник вообще – нельзя, хотя его определение существует.

В процессе познания вещи часть знаний приходится на понятия (эти функциональные элементы нуждаются в описании), а часть – на представления (структурные элементы требуют понимания). Но соотношение между ними неодинаковое: можно сказать, что понятие – это конечный продукт представления, т.е. надводная часть айсберга, поэтому именно образные представления и модели двигают науку вперед.

Понятийно-словесная оболочка мысли возникла и развилась благодаря *коммуникационным* потребностям человека; она является непосредственной реакцией психолингвистической деятельности человека, живущего в *коллективе* людей. Осознание же мира – это *индивидуальный* продукт психики; оно приходит не в результате *словесного описания* вещей, а путем их *пространственного представления*, *моделирования* и *создания вещественных конструкций*. Истину можно только самому увидеть, ее невозможно *услышать* от других и *передать* другим. Все понятия и определения держатся на авторитете их автора, представления же – истинны или ложны – сами по себе. В словесных баталиях истина скорее уничтожается, чем рождается. Прав тот, кто смог *вообразить* себе сущность явления, а таких, чаще всего, немного, они в меньшинстве, так как большинство ловится на удочку краснобаев, умеющих цветисто говорить, но плохо представляющих суть дела.

Понятия и представления выражаются через определенные системы символов. Для символов представлений важны пространственные характеристики (форма, размеры, композиционные соотношения) – только в этом случае геометрия форм образует адекватную модель. Например, важно, чтобы электроны обозначались шарами (а не эллипсоидами или кубами), однородное магнитное поле – параллельными силовыми линиями определенной плотности, орбиты планет – правильными эллипсами, зонные структуры полупроводников должны иметь конкретную ширину и очередность. Символы, отражающие понятия, должны быть компактны, легко узнаваемы и без труда воспроизводимы. Так, символами служат слова обыкновенного языка общения, специальные научные термины, многочисленные математические символы, обозначения химических элементов. Неразвитая символика сдерживает научно-познавательный процесс. Из истории естествознания хорошо известно, что введение специальной символики позволило Лагранжу и Гильберту сильно продвинуть вперед чисто геометрическую механику, какой она была во времена Ньютона.

Символ в науке не должен существовать совершенно обособленно от соответствующей пространственно-временной формы. Манипуляция иностранными (например, латинскими и английскими) или специальными словами, а также использование просто псевдонаучных терминов, за которыми нет никакого образного представления, как и употребление в древние времена магических заклинаний и знаков, приводит только к путанице. Хорошо изученные объекты имеют отчетливые функциональные и структурные формы. Таковыми являются гелиоцентрическая модель солнечной системы, оболочечная структура атома, капельная модель экситонной жидкости, сферический кристалл фуллерена, периодическая таблица Менделеева, клетка органической материи, структура молекулы ДНК.

В картине мира формалиста часто преобладают элементы: конвенциальные, условные, надуманные, обманчивые, специально вводящие в заблуждения, нарочито утрированные или даже безобразно извращенные, шокирующие, неимоверно раздутые, художественно приукрашенные, адаптированные к требования текущего момента, искусственно приспособленные к выживанию в конкурентной среде, спонтанно сфантазированные, мифологизированные, сказочные, мистифицированные, обожествленные, рассчитанные на какой-то иной, возможно, скрытый или плохо осознаваемый самим индивидуумом эффект. Так что под формально-феноменологическим подходом подразумевается то, что в нем могут присутствовать все перечисленные моменты либо в гипертрофированном, либо в ослабленной форме. Термин формальный при множестве оттенков имеет один неизменный смысл – ненастоящий, а термин феноменологический означает взятый с поверхности или рассчитанный на внешний эффект.

Более адекватная картина мира конструктивиста наполнена элементами противоположного свойства. Их главными признаками являются: разумность, открытость, наглядность, искренность, непритворность, согласованность, неподдельность, уместность, своевременность. Мы говорим, что конструктивисты являются обладателями *рационально-конструктивного* мировоззрения, ясность и определенность которого противостоит спекулятивности и расплывчатости мировоззрения формально-феноменологического. Термин *рациональный* указывает на отсутствие религиозно-мистических мотивов, а *конструктивный* часто означает *модельный* или *алгоритмический*. Модели, как правило, бывают *пространственно-механические*, алгоритмические процедуры можно задавать не только каким-то *списком правил*, но и *таблицей*, например, так называемыми *арифметическими таблицами*, и т.д.

Эпистемологическое деление на конструктивистов и формалистов является следствием *принципа двойственности*. Понятие двойственности распространяется на огромное число физических, биологических, психологических и даже социально-культурных явлений. Примеры двойственности, взятые из проективной геометрии, теории графов, логики, электротехники и линейного программирования, приводились в наших курсах лекций «Дискретная математика» и «Естествознание». Следует, однако, иметь в виду, что в эпистемологии конструктивизм и формализм никогда не выступают в чистом виде: их носителями были люди, которые, наряду с конструктивным подходом, использовали какие-то формально-феноменологические и даже религиозно-мистические приемы.

2. Эпистемологический срез: атом – элемент

Проведем еще один эпистемологический срез по линии *атом–элемент*, который самым тесным образом связан с линией *понятие–представление*. Вспомним, виднейшие *конструктивисты* от Демокрита до Больцмана придерживались *атомарной, корпускулярной*, т.е. *дискретной и количественной* картины мира. Им противостояли *физики-элементники*, оперирующие *качественными* характеристиками. Первоначально это были: *теплота* и *холод, сухость* и *влажность*, которыми обладали четыре стихии: *огонь, воздух, вода и земля*. Эти стихии можно представлять либо *количественно* в виде *атомов* определенной *геометрической конфигурации*, которые можно мысленно *представить*, либо *качественно*, в виде *химико-биологических элементов*, которые даны чувственно, в различных *ощущениях*, т.е. через *опыт*. Отсюда корпускулярное мировосприятие, в общем, способствует созреванию *рациональных* и *конструктивных* теорий, хотя сами корпускулы могут иметь различную природу. У Демокрита это были материальные образования, которые помимо геометрических размеров и конфигурации имели физический вес; он говорил о легкости и тяжести атомов. У закоренелого противника Демокрита, Платона, корпускулы представляли собой сборно-разборные конструкции из идеальных треугольников. Аристотель выступал в пику им обоим против всяких пространственно-механических представлений и пользовался только качественными понятиями в форме элементов.

Атом и элемент *двойственны* друг другу. Двойственность – это один из самых распространенных видов зеркальной симметрии. Конкретно для атомов и элементов двойственность проявляется в следующем. *Атом* есть предел механического деления вещества, *элемент* – предел химической чистоты некоего аморфного субстрата. Изменчивость в атомарной системе мира достигается за счет геометрических комбинаций и механического перемещения, а в элементной системе мира она получается за счет химического смешения или биологических превращений. Атом – неизменный структурно-пространственный объект, элемент же – изменяющийся функционально-временной. Двойственность приводит к тому, что атомисты склонны к *теоретизированию*, а элементники – к *экспериментированию*.

Древнеримский врач и философ Гален сообщает, что Гиппократ первый ввел в медицину четыре элемента и не делал акцента на том, что считать первичным – элементы или их качества. Основой живых организмов были: *кровь, слизь, желтая и черная желчь*; на их основе гиппократики развили свою психологическую теорию четырех темпераментов: *сангвиник*, *флегматик*, *холерик* и *меланхолик*. Не станем касаться этой теории (она изложена в курсе «Естествознание», лекция 14), а заметим лишь, что концепции физиков-элементников вообще тяготели больше к живой материи, а концепции физиков-атомистов – к неживой. Во всяком случае, для медицины и психологии качественные учения древних, основанные на элементах, выглядели более правдоподобно, можно сказать, *конструктивно*, а количественные учения, основанные на механике атомов, напротив, были менее адекватными, какими-то неуклюжими и, можно сказать, *формальными*.

Таким образом, эпистемология физиков-элементников зиждется на *анимализме* и *витализме*, что часто имеет своим пределом *мистицизм* и *спиритуализм*. Под действием невидимой живительной силы, управляемой зачастую высшим разумом, происходят превращения и простых элементов, и сложных биологических организмов. Для реализации этой эпистемологии разные авторы выбирали различное текстовое оформление, но суть их теорий приблизительно одна – *формально-феноменологическая*. Без потусторонней духовной энергии или душевных сил, без материального субстрата, в форме ли качеств или элементов, формализм-феноменализм выступает как логика, которая имеет в качестве одного предела процедуру классификации и систематизации терминов, а в качестве другого – спекулятивную диалектику, смыкающуюся с медитацией (когда дело доходит до мистики).

Над эпистемологией физиков-атомистов довлеет *механика*, природа которой такова, что характер движения материального субстрата всецело детерминирован самой структурой этого субстрата, т.е. *формой*, *размерами* и *композицией* атомов. Атомист не испытывает сильной потребности в источнике движения, в какой-то спиритической потусторонней силе. Всё его внимание приковано к *геометрии* и *динамике* частиц, а в воображении то и дело возникают быстрые или медленные потоки и вихри корпускул, которые могут быть либо сравнительно больших размеров, поэтому корпускулы различимы, и видимы отдельно, либо настолько мелкими и неразличимыми, что невидимые частицы представляют собой сплошную массу, образующую жидкую или газовую фазу. Превращение и трансформация качеств здесь проявляется в меньшей степени, в большей – *разряжение* и *сгущение* отдельных частиц или сплошной массы. Изменение качеств происходит в основном за счет комбинирования атомов. Современные атомисты часто имеют дело с кристаллографией, различными видами симметрии, а также с динамическими процессами или статическими структурами, которые сейчас называют *фракталами*.

Атомарное строение материи требует также от исследователя навыков в геометрии, т.е. умения к механико-геометрическому моделированию. Если для элементника мир – это череда непрерывных превращений во времени какого-то непонятного *аморфного субстрата* (*духа* ли, *воздуха*, *огненного* или *жидкого эфира*), то основным интеллектуальным полем для атомиста является пустое пространство, где происходят вполне наглядные взаимодействия между отдельными, ясно очерченными деталями единой механической структуры. За счет геометрии и механики, которые легко поддаются математизации, из-за отсутствия анимистических и мистических моментов, атомарная картина вселенной представляется и более рациональной. Хотя, наверное, излишне говорить, что существуют и такие механистические мироощущения, которые имеют в своем составе заметные элементы спиритуализма. Смешение различных типов эпистемологии, в силу существования гибридной психологии, проявлялось в древние времена так же часто, как и в новые.

Таким образом, количественные представления об атомах определенно коррелируют с рационально-конструктивной эпистемологией, а качественные понятия об элементах связаны с формально-феноменологической эпистемологией. Деление всех теорий на учения об элементах и учения об атомах находит подтверждение в науке Древней Греции или, точнее, в *протонауке*, т.е. в философской рефлексии, которая касалась прежде всего окружающей природы. На этой первой стадии науки эпистемология уже четко дифференцируется на атомарную и элементную, хотя существует масса эклектических философских систем. В мифологической фазе естествознания, воспетой в поэмах Гомера, Гесиода и Орфея, почти отсутствует указанная выше дифференциация. Там существовала эпистемологическая двойственность, которая вылилась в проекцию стихийных образов земли и неба, света и тьмы, океана и суши, хаоса и гармонии, молнии и ветра на бинарные отношения между *мужчиной* и *женщиной*, *отцом* и *матерью*, *отцом* и *сыном*, *матерью* и *сыном*, а также в проведении параллелей с человеческими переживаниями *любви* и *ненависти*, *дружбы* и *вражды*, *доброты* и *злости*, *силы* и *слабости*, *простоты* и *коварства*, где одна сторона проявляет какую-то *активность*, *духовность* и *возвышенность*, другая – *пассивность*, *материальность* и *низменность*. Однако, в мифах слишком слабо ощущается дифференциация на рационально-конструктивные и формально-феноменологические аспекты, так как они создавались коллективным сознанием на протяжении длительного времени, поэтому все различия в психологии и эпистемологии людей полностью стерлись, и перед нами предстает гранитный монолит, сплавленный из бесконечного числа индивидуальных предпочтений.

3. Логика и математика как два метода познания

Термин *логика* произошел от греческого λογοζ, что переводится как *речь*, *произнесенное слово*; данный термин связан с глаголом *говорить*. У пифагорейцев обратное действие – *слышать* (ακουω) – *порождало услышанное слово*, что отражалось термином *акусма* (ακουσμα). Если истинность услышанного слова гарантируется авторитетом говорящего, то истинность произнесенного слова должна быть обеспечена *формально-логическим выводом*. Однако в рассуждениях *акусматиков* присутствуют элементы формально-логического вывода, а вывод логиков всегда опирается на авторитет *посылок*. Произнесенное слово и услышанное находились в оппозиции к третьему термину – *математика*. Весь комплекс знаний, связанный со словом μαθηματικη, восходит к *конструктивному познанию*.

Греческое слово μαθανω переводится как *изучаю* или *понимаю*, μαθησιζ – *изучение* или *познание*, а слово *математика* (μαθηματικη) раньше означало *науку* вообще и глубокое *познание* всякого предмета. Здесь также уместно напомнить, что греческое слово *гипотеза* (υποθεσιζ) первоначально означало *кинематическую модель* и *геометрическую схему*.[2] В этом значении данным термином пользовался Птолемей. Схоласты, недолюбливавшие конструктивные методы античных математиков, сообщили слову *гипотеза* коннотацию *сомнения* и *предположения*, отсутствовавшие в первоначальном значении слова. Рядом с исходным словом *гипотеза* можно было поставить и боговдохновенное слово *теория* или близкое ему слово *теорема*; они образованы от греческого глагола θεωρειν – *созерцать*. Таким образом, три основных математических термина – *гипотеза*, *теорема и теория* – апеллируют, прежде всего, к *воображению*, на что всегда опирался и будет опираться конструктивный поиск.

Математика – это нечто *зримое*, логика – нечто *высказанное*, а акусматика – нечто *услышанное*. Математики все знания получали преимущественно через *представления*; логики – через *понятия*, а акусматики – через *заклинания*. В этом троичном делении схвачено, пожалуй, основное и самое первое различие между *рационально-конструктивным*, *формально-феноменологическим* и *религиозно-мистическим*.

Логики и акусматики все свои знания выражали в словесно-символической форме, часто в очень претенциозной, поэтической и религиозной; математики же должны сами конструировать свои представления, т.е. заниматься более рациональным и прозаическим трудом. Понятийный спектр имеет две крайности в виде простого символа и философского принципа. Чистыми символами оперируют обыкновенно мистики. Так, *пифагорейцы* в качестве символов избрали для себя числа, *сторонники каббалы* – буквы, но перед первыми лежит всё же реальный мир, а перед вторыми – «священные тексты», поэтому пифагорейцы по степени идеализации мира приближаются к *платоникам*, а каббалисты занимают исключительно иррациональную позицию, смыкающуюся с позицией *богословов*.

Формализм-феноменализм Аристотеля, Фомы Аквинского или Гегеля местами апеллирует к идее Бога, однако сама логика совершенно безразлична к теологии, поэтому формально-логическая эпистемология часто является рационалистической. Пифагорейско-платоновская эпистемология, которой внутренне присуща мистика и признание потустороннего мира или каких-то трансцендентных вещей, при всей этой теологической направленности совместима с

[2] **В.Э.:** Сомневаюсь, что это так. Птолемей ведь очень поздний для греков автор, так что на то, как он употреблял это слово, не стоит смотреть в поисках первоначального значения. В принципе, «гипо-тез-» означает «ПОДтезис», т.е. нечто менее важное или менее достоверное, чем «тезис». От слова «под» понятно также и птолемеевское употребление: «модель, схема, которая лежит ПОД тезисом, в его основе».

конструктивистскими элементами. Логики-перипатетики и акусматики-пифагорейцы отличаются от конструктивных математиков тем, что первые тяготеют к схоластической манере поучать, вторые – к мистической манере внимать; как те, так и другие – формалисты-феноменалисты, оперирующие логическими дефинициями, философскими принципами, политическими декларациями, юридическими нормами, церковными заповедями, священными заветами.

С помощью конструктивной математики познается объективный мир; с помощью формальной логики упорядочиваются мысли и феномены, данные нам в ощущениях; с помощью заклинаний вдалбливаются ложные понятия и представления, имеющие преимущественно иррациональный, эмоционально-чувственный статус, блокирующий волю индивидуума и определяющий его механическое неосознаваемое поведение. Последний тип эпистемологии носит откровенно религиозные и мистические формы, имеет мало общего с рациональной наукой, поэтому мы не рассматриваем его самостоятельно, но только как продолжение формально-феноменологической эпистемологии, как ее крайнюю форму.

Логика и математика в известном смысле противостоят друг другу. Предметом логики является *мышление субъекта*, которое разворачивается во времени, линейно и последовательно; предметом математики является независимая от мышления *структура объекта*, которая существует как некая пространственная данность вся целиком. В таком цельном виде математическая структура не может проникнуть в наше сознание и должна быть последовательно деструктурирована. Эта миссия лежит на логике; можно сказать, что *через логику субъекта становится доступна математика объекта*. Поэтому было бы правильно всю математику, как науку о количественных отношениях и пространственных формах,[3] разграничить на два отдела, где по отдельности излагались бы *конструктивная* или *поисковая математика* и *доказательная* или *образовательная* математика; последняя и будет связана с *логикой*. Конструктивная математика обращена на *объект*, формальная – на *субъект*.

Ошибка конструктивиста-математика – это недопустимое расхождение между объектом и его моделью; ошибка формалиста-логика – это противоречие внутри формальной системы, которое никакого отношения к объективной реальности не имеет, так как он оперирует только символами действительного мира. Двигаясь итерационно шаг за шагом, конструктивный математик приближается к своему идеалу совсем не так, как математик-формалист или логик. Опираясь на *представления* о реальности, он стремится *воссоздать, сконструировать* соответствующую этой реальности *конкретную модель*. Эта его частная модель всегда будет более восприимчива к модернизации, ее наглядные детали обладают высокой мобильностью и легко поддаются коррекции. Психика конструктивиста как нельзя лучше приспособлена для подобного рода занятий. Так, Архимед за свою долгую жизнь инженера и теоретика успел построить и проанализировать множество механических и геометрических моделей. Или взять Максвелла, который за свою короткую творческую жизнь поменял три совершенно различных модели электромагнитного взаимодействия.

Логические системы всегда оказываются консервативными и невосприимчивыми к совершенствованию. Осторожные, постоянно оглядывающиеся назад, формалисты склонны строить гигантские системы, состоящие наполовину из примечаний и дополнений (полюбуйтесь на панлогические системы, созданные Аристотелем, Гегелем или Дж.Ст. Миллем). Непрерывно замазывая щели и законопачивая дыры, формалисты неустанно шлифуют и лакируют несущие опоры здания своего неизменного догмата, ни за что не соглашаясь на их демонтаж. Даже сам формальный аппарат логики за два с половиной тысячелетия своей истории претерпел крайне незначительные изменения, причем поверхностного характера. Между тем аппарат конструктивной математики в течение сравнительно короткого времени испытал быстрые и радикальные изменения.

Итак, математика тяготеет к конструктивной *теории*, а логика – к поверхностной *феноменологии, эксперименту* или *эмпирическим данным*. Любой формалист склонен к недооценке модельных построений и переоценке фактов; конструктивист же, напротив, чрезвычайно увлекается пространственной механикой и считает всякие опытные данные бесполезными, пока они не приобрели какую-нибудь, пусть самую предварительную теоретическую платформу. В результате расстановки этих приоритетов, у формалиста опыт всегда превалирует над теорией; у конструктивиста, наоборот, опыт, а значит, практика и прагмати-

---

[3] **В.Э.:** Так Акимов определяет математику.

ческие цели уходят на второй план, главным для него становятся знания ради самих знаний, истина во имя самой истины.

Конструктивист уверен в ценности теории самой по себе, без всяких меркантильных, утилитарных и прагматических намерений. Он говорит себе: объективный мир устроен так-то и так-то, вот адекватная модель, отображающая реальные процессы. Формалист критикует конструктивиста за идеализм, оторванность от жизни и бесполезность его теоретических построений. Путем эмпирической и формальной подгонки, он снабжает потребителей интеллектуального продукта неким «описанием» природы или «инструкцией» к ее использованию. Дескриптивной эпистемологией устанавливаются необходимые каузальные связи между причиной и следствием или функциональные зависимости между воздействием и откликом. Формалисты уверены, будто логика (т.е. техника составления правильных цепей рассуждений, сюда же можно включить силлогистику Аристотеля, диалектику Гегеля, а также античную и средневековую диалектику как искусство ведения софистических и схоластических споров) помогает открывать новые истины, что, конечно же, не так. Формально-феноменологические уравнения, таблицы и графики имеют весьма косвенное отношение к физической действительности, хотя они и позволяют сделать быстрый расчет или предсказать наперед ту или иную опытную ситуацию.

Формалисты говорят: «Математика – это символьный язык, служащий для формального описания объекта познания». Конструктивист возразит ему: «Нет, математика – это не столько язык познания, сколько сам объект познания». Граф или группа, конечно, могут отображать некие объекты, существующие в реальности, однако эти математические сущности могут обойтись и без физических представителей. Поэтому правильнее говорить о параллелизме между математическим и физическим мирами, когда вправе утверждать о представлении математических структур физическими моделями.[4] Чтобы почувствовать разницу между формальным и конструктивным подходом, нужно отчетливо видеть разницу между математическим и логическим выражением.

Математика предоставляет некоторые количественные отношения, выраженные уравнением или тождеством, т.е. определенной формой эквивалентности. При переходе от левой части уравнения к правой не происходит приращения принципиально нового знания: та информация, которая содержится в его левой части, будет содержаться и в правой. Однако прежде чем вложить информацию в левую часть уравнения, ее нужно увидеть, т.е. она добывается органами зрения, а не речи или слуха. Настоящее доказательство связано только с непосредственным видением, но никак не с декларированием слов. Математика всегда есть больше чем совокупность специальных символов и терминов; она выходит далеко за рамки некоего условного языка. Важно, что математика с помощью символов способна представлять и моделировать действительность – в этом ее основное предназначение. Существование математического факта можно считать установленным, если получена соответствующая ему конструкция, часто в виде формул, таблиц и рисунков. Сложная, труднодоступная истина устанавливается на основе простой, открытой истины, некой визуальной данности. Прежде чем реальность будет представлена в виде математических формул и геометрических чертежей, она должна быть описана с помощью наглядной пространственно-механической модели; именно на основе конкретного образа производятся все необходимые вычисления. Модель тоже может быть неадекватна реальности, только природа математических ошибок существенно иная, чем логических.

Логический вывод подчиняется отношению порядка, который выражается словосочетаниями: «если A, то B», «A влечет B», «B, потому что A». Вместо букв A и B мы можем подставить C и D или любые другие буквы, т.е. логика изначально и принципиально имеет дело только с символами реальности, но не с самой объективной реальностью. Она упорядочивает мысли субъекта, но не внешние объекты, и правильность дедуктивного вывода еще не гарантирует истинности знаний о реальном мире, поскольку в буквенной идентификации реальных предметов может быть допущена ошибка.

Логика – это наука о доказательствах. Под доказательством понимают логически обоснованный формализм и, таким образом, теория доказательства становится разделом логики, изучающей различного рода суждения или умозаключения. При доказательстве той или иной истины мы всегда имеем в виду кого-то другого; для нас самих доказываемое всегда представляется чем-то *очевидным*. Таким образом, логика есть убедительное средство передачи

[4] **В.Э.:** Ну, перевернул!

информации от человека к человеку, следовательно, логика есть особая языковая форма. В очень малой степени она апеллирует к зрительному образу и реальному предмету: только символы объектов и только действия над этими символами относятся к предмету логики; реальный мир оказывается вне поля зрения этой науки. Кого не возмущали исключительно формальные выводы логиков-юристов или логиков-ученых, которые эквилибристикой слов доказывали нечто такое, что абсолютно не соответствовало действительности.

Логика очень ревниво относится к формированию понятий, можно сказать, что она только этим и занята. Она может давать себе высокопарные определения: «наука о доказательствах» или «наука о правильных умозаключениях», но большая часть ее всегда приходилась на долгие и нудные суждения об именах, значениях, определениях и классификациях огромного количества слов, почерпнутых из жизни или различных отраслей знаний, вроде религии, морали и права. Логика со времен Зенона Элейского стремилась включить в качестве частностей арифметические и геометрические объекты, но последние этой близости настойчиво сопротивлялись. По апории Зенона «Ахилл и черепаха» противостояние между математикой и логикой особенно заметно. Еще большие претензии логика распространяла на естествознание. Завладев биологической классификацией и описанием животных и растительных форм, она возомнила, что это и есть настоящая наука. Но конструктивные представления не совместимы с составлением классификаций детерминированных сознанием форм; систематизация знаний – это самая первая форма естествознания, которая больше сковывает, чем способствует его развитию. Классификация предполагает описание по родам и видам, но посмотрите, например, на астрономию: какая здесь может быть подчиненность? Ее нет, по крайней мере, в той форме, в какой подчиненность существует в логике.

Логика не является строгой наукой в том смысле, что ее применение к анализу реальных ситуаций не может быть однозначным. Она призвана классифицировать и ранжировать наши высказывания о реальности, пытается сделать понятным наш язык для окружающих. Логика упорядочивает поток понятий, которые никогда не были – ни в древние времена, ни в нынешние – первичным продуктом мышления, т.е. тем передовым фронтом интеллектуальной деятельности, который осваивает неведомый мир. В понятиях добытые индивидуальным сознанием представления распространяются внутри общества и, как это обычно бывает при кодировании, трансляции и декодировании, исходная образная информация существенно искажается. Желательно спекулятивные рассуждения логического характера заменить строгими математическими вычислениями конструктивного характера. Тем самым ловятся сразу два зайца: новые знания получают обоснование и при этом, как правило, закладывается фундамент для возведения новых конструктивных моделей.

4. Характерные признаки логического и математического

Точная терминология нужна для однозначного взаимопонимания в среде ученых, однако эта задача должна быть отделена от задачи познания. Во враждебном окружении формалистов конструктивист должен уделять много внимания разработке своего понятийного языка, но в среде единомышленников ему нужно потратить гораздо меньше усилий на решение коммуникативной задачи; за счет этого высвобождаются его интеллектуальные ресурсы на решение задач познания. Таким образом, при обдумывании той или иной теории он может позволить себе перераспределить соотношения между понятиями и представлениями в пользу вторых, что будет способствовать решению познавательных задач.

Опираясь на совокупность основополагающих *понятий* и *определений*, логика закладывает прежде всего собственный фундамент. Сформировав из них обойму основополагающих принципов, т.е. создав некий скелет, далее логика начинает детализировать то, что ранее она выбрала, как нечто *общее* и *универсальное*. Таким образом, логик сразу отсекает для себя возможность возврата назад. Чтобы изменить созданную ей систему, она должна радикальным образом поменять исходные принципы. Поэтому все формально-логические системы склонны к консерватизму – в этом их основной порок. Математическая модель не имеет пирамидальной архитектуры, там нет «основания» или «начала», любая деталь может быть из нее выдернута и заменена другой.

Правда, логика дает в руки исследователям эффективные фигуры вывода из заранее определенных посылок, придающих некоторому содержанию общезначимую и унифицированную форму. При своем правильном использовании, в отсутствии психологического фактора, логика исключает возникновение противоречий. Поскольку описание объективного мира осуществляется, прежде всего, посредством обыкновенного языка общения, и лишь потом, с помощью формализованных методов, логика как таковая выступает в виде *логики высказываний*. Именно эта наука исторически возникла первой в виде *силлогистики Аристотеля*, которая без заметных изменений благополучно просуществовала вплоть до XX в. В различные периоды истории науки роль логики менялась. Были периоды, когда в ней видели основное средство познания мира. В связи с этим можно вспомнить схоластиков, Гегеля, а из недавнего прошлого, – позитивистов и марксистов, которые слишком мало обращали внимание на онтологическую картину мира и целиком посвятили себя исследованию исключительно логических и гносеологических проблем. Априорно, только из глубин своего ума они думали черпать новые знания.

В математике всё не так, как в любимом детище Аристотеля и схоластов: *истина* и *ложь, абстрактное* и *конкретное, общее* и *частное* – все эти категории скорее логические, чем математические. Нужно отчетливо понимать, что *логическая общность* принципиально отличается от *математической общности*. Логическая общность лишена частностей, т.е. в рамках логики из общего нельзя вывести частное, поскольку всё специфическое теряет общее безвозвратно. Из понятия о животном нельзя логическим путем вывести понятие млекопитающего, из понятия млекопитающего нельзя получить понятие собаки, а определение собаки не проливает свет на внешний вид и повадки шотландской овчарки (колли). Совершенно иной характер общности мы имеем в математике. Уравнение кривой второго порядка за счет свободного параметра содержит в себе уравнения гиперболы, параболы, эллипса; круг является частным случаем эллипса, а прямая есть круг бесконечно большого диаметра. Прямая, круг, эллипс, парабола и гипербола – все линии в рамках аналитической геометрии выводятся из общего для них уравнения. Раз это так, то, по крайней мере, в астрономии – этой образцовой для всего естествознания науке – мы имеем ситуацию больше приближенную к математике, чем к логике, так как небесные тела, движущиеся по гиперболе, параболе, эллипсу, кругу и прямой могут быть представлены одним общим для них уравнением, имеющим различные параметры.

Эта ситуация наблюдается почти во всех областях математической физики: одного уравнения теплопроводности достаточно, чтобы рассчитать тепловые процессы в бесконечном числе частных случаев; достаточно знать уравнения Максвелла, чтобы математическим путем рассчитать сколь угодно сложную электромагнитную машину и т.д. *Общему* неоткуда больше взяться, кроме как, с одной стороны, из *эмпирии*, т.е. *опыта*, с другой, – из *теоретических моделей*. С помощью моделирования мы выходим за пределы опыта и попадаем в ту *трансцендентную область* реальности, в которую Кант уже и не надеялся попасть. Поиск всеобщего закона, который предлагается позитивистами, состоит в одном: в исключении из большого исходного набора данных каких-то второстепенных качеств и выделении существенных. Существенность и второстепенность каждый исследователь оценивает субъективно, отсюда возникают бесконечные дискуссии на тему, чей закон является более общим. У конструктивистов тоже возникают дискуссии, но они носят иную окраску. Речь идет не о *всеобщности* той или иной модели, которую каждый понимает по-своему, а об ее *соответствии* экспериментальным данным. Таким образом, дискуссии конструктивистов носят объективный и конечный характер, дискуссионные же вопросы позитивистов, как правило, имеют субъективный оттенок и длятся нескончаемо.

Позитивисты (Милль, например) числовую характеристику предметов относят к «наблюдаемым» свойствам предметов; конструктивисты же говорят, что это не так: на три елки или пять грибов можно смотреть вечно, при этом так и не узнав, что количество елок равно трем, а грибов – пяти. Число идет изнутри человека, когда он однажды решается на конструктивную операцию счета, которая является одной из простейших, типа сравнений больше–меньше, дальше–ближе. Внешне счет и сравнение выглядят аналитическими процедурами, однако по своей природе их следует причислить к синтетическим или модельным.

В первом импульсе к выполнению сравнения или счета содержится главная синтетическая идея, потом идут реализации идеи, уточнение результатов и их проверка. У Кеплера сначала возник образ эллипса, затем началось конструирование конкретной модели орбиты Марса, сопоставление ее параметров с экспериментальными данными. Древние астрономы, зная всё об эллипсе, не смогли его увидеть в движении планет, так как указание Платона – представлять все движения светил через круговое вращение – оказалось сильнее опыта. Таким образом, априорный образ эллипса оказался для Кеплера той мощной синтетической идеей, благодаря которой стал возможен дальнейший прогресс всего естествознания.

Аналогичную ситуацию мы имеем с елками и грибами. Желание сосчитать елки возникает вместе с возникновением идеи числа. Когда их немного, кажется, что число, как цвет и запах, идет от объекта, однако, когда мы смотрим на огромный лес, мы понимаем, что идея числа деревьев, т.е. желание сосчитать все деревья, вовсе не исходит от леса, это желание идет от нас, а то, что верно для 1000 единиц, будет справедливо и для трех. Хотя инициатива счета проистекает от человека, само число елок является объективной характеристикой реальности. Числа 3, 5 или 1000, а также эллиптическая орбита Марса, формула всемирного тяготения, модель атома – всё это является «синтетическими истинами», «ноуменами» или «вещами в себе» по терминологии Канта, т.е. скрытой от феноменалистов объективной реальностью.

В математике нет *истины* и *лжи* в том смысле, в каком они существуют в логике: там всегда господствует истина; могут возникнуть ошибки, типа 2 + 2 = 5, но это не *математическая ложь*, а ошибка человека, которая никакого отношения к математике не имеет; математика всегда дает правильное равенство 2 + 2 = 4. В логике выражения 2 + 2 = 5 имеют одинаковую силу с выражениями 2 + 2 = 4, так как в ней ложь (ноль) имеет те же права, что и истина (единица).

Некоторые философы не умеют отделить истину логическую от математической или естественнонаучной, отсюда возникают бесконечные споры об *абсолютности* и *относительности* истины. Геометрия, например, имеет дело со сферой, которая определяется как геометрическое место точек, равноудаленных от точки, называемой центром. Если отдельная группа точек оказалась расположенной чуть ближе к центру, значит, сфера по какой-либо причине получила вмятину, но сама геометрия никогда не приводит к «вмятинам». Как только в математике появилась ложь, ищите недобросовестный ум человека, так как всё ложное может возникнуть лишь в его голове, но не в математике как таковой.

То же самое нужно сказать об *абстрактном* и *конкретном*, которые также появились благодаря человеческому фактору: все числа одинаково абстрактны и одинаково конкретны; прямоугольник не является более абстрактной фигурой, чем квадрат, а круг более конкретным, чем многоугольник. Абстрактное получается в результате отвлечения от второстепенных деталей, а в числе или геометрической фигуре нет второстепенных деталей.

В головах многих философов произошел «оптический обман», когда они число и геометрическую фигуру приняли за объекты сознания, за плод нашего воображения, т.е. за нечто такое, что получилось в результате последовательного абстрагирования, путем отбрасывания второстепенных деталей, и чего нет в природе. Представление о сфере, по их мнению, формировалось примерно так же, как скульптор создает гранитный шар, постепенно отсекая от каменной глыбы неправильной формы все лишнее. Но при таком изготовлении шара его геометрическая идея, говорил Платон, должна была уже существовать в голове у скульптора. Проблема того, как она там оказалась, не является проблемой геометрии, т.е. не важно, каким образом этим *естеством* завладел субъект, важно другое: сфера есть предельно *объективная* вещь, она одинакова и для Евклида, и для аборигена Австралии, и даже для жука-скарабея, который тоже умеет вылепливать шарики из навоза.

Точнее даже так: сфере нет никакого дела до математика, аборигена и жука, она существует сама по себе, вне философских дискуссий о субъективности и объективности возникновения идей, и все ошибки в материализации ее идеи лежат вне науки математики. Сфера или число три – это очень простые математические конструкции, которые возникли в доисторические времена. Но возьмите такие представления, как матрица, группа, тензор, граф, возникшие сравнительно недавно, и историю которых можно легко проследить. По своей внутренней природе они ничем принципиальным не отличаются от представлений о числе и сфере. Однако во всех этих случаях – знаем мы историю возникновения представления или нет – математика имеет дело только с уже готовыми идеями.

Говорят, Земля – не шар, и вообще идеального шара в природе нет, а значит, в ней нет места для математике. На это нужно ответить: Земля была бы идеальным шаром, если бы в природе действовал только центрально-симметричный закон притяжения. Но так как наша планета участвует еще и во вращательном движении, возникшем благодаря особым, как говорят математики, «начальным условиям», то возникла «возмущающая» центробежная сила, вытолкнувшая часть массы к экватору; поэтому сейчас Земля представляет собой эллипсоид. Вращение этой геометрической фигуры повлекло к явлению, которое в механике получило название прецессия. Если бы Земля была идеальным шаром, то ее ось не испытывала бы медленного поворота в пространстве с периодом в 26˙000 лет, в результате чего точки весеннего и осеннего равноденствия, а также летнего и зимнего солнцестояния движутся по эклиптике навстречу годичному движению Солнца, проходя 50,24" в год. Следовательно, со времен написания Птолемеем своего знаменитого «Альмагеста», т.е. с 150 г., точки сдвинулись почти на 26 градусов, что составило 26 календарных дней. Эта постоянно меняющаяся величина заставляет нас корректировать календари. Таким образом, отход формы Земли от идеального шара привел к многочисленным последствиям, включающим в себя движение полюса мира, изменение координат звезд и прочее.

«Идеальных», «математически точных» законов или объектов не видно потому, что в природе одновременно действуют сразу все, какие только могут существовать в математике, закономерности, за счет этого совместного действия наблюдаются отклонения от одних идеальных закономерностей в пользу других. Шар формирует объективный закон притяжения; в природе он существовал задолго до появления его в качестве идеи в голове человека. Человек мог прийти к идеи шара, конуса, цилиндра, куба независимо от того, видел он их прототипы в природе или нет, однако это вовсе не означает, что их подобия появились в природе благодаря некой умственной деятельности человека.

> «Я верю, – писал Шарль Эрмит, – что числа и функции анализа не являются произвольным созданием нашего разума. Я думаю, что они существуют вне нас в силу той же необходимости, как и объекты реального мира, и мы их встречаем или их открываем и изучаем точно так, как это делают физики, химики или зоологи».

Математические объекты – числа, функции, геометрические формы и пр. – существуют в природе подобно тому, как существуют физические объекты – масса, сила, энергия, электромагнитное поле, атом и пр. Степень идеальности и абстрактности математических объектов просто выше, чем физических; ощущаемые же объекты слишком обременены материей. Но человек не есть то, что он ест, он представляет нечто большее, чем капуста, масло, рыба. Этим мы хотим подчеркнуть, что мозг человека в состоянии вырабатывать больше, чем доставляют ему его ощущения. Животные видят, слышат и осязают почти всё то же, что видит, слышит и осязает человек, но человек, в отличие от животного, может еще и «ощущать» математические сущности.

Математика против *логики*, *синтез* против *анализа*, *модель* против *дефиниции*, *представление* против *понятия*, *число* против *слова* – эти противостояния сидят глубоко в сознании человека. Логика с математикой сосуществуют в естествознании, как живут в одном доме кошка с собакой. Появившись одновременно, они постоянно доказывают хозяину-естествоиспытателю свою исключительную преданность. Логика содержит в своем составе абсолютно математические компоненты, которые называются *формальной логикой*. Эта часть логики не претендует на поиск какой-то истины, лежащей вне ее компетенции, и дает людям вполне полезный аппарат преобразования одних логических высказываний в другие, в том числе, она позволяет упрощать запутанные речевые тексты. Аналогичным образом математика не свободна от логических компонентов. С древних времен она включала в себя доказательные средства, в частности, так называемый *аксиоматический подход* весь пронизан логическими понятиями.

Есть математики, которые только и занимаются обоснованием науки математики, но есть и логики, которые конструктивными средствами, например, диаграммами Эйлера–Венна и таблицами истинности, разрабатывали прекрасный математический аппарат для своей науки. Ввиду такого перекрестного эффекта в науке идут нескончаемые споры о назначении математики и логики. Бессчетное число раз говорилось, что логика упорядочивает мысли и речь человека, а математика описывает движение рычагов и зубчатых колес, атомов и небесных тел, – всё напрасно; как претендовала логика на владычество над естествознанием, так по сей день она и метит на место царицы наук.

Математики XX века выстроили империю – нечто напоминающее огромную пирамиду, стоящую на «математических основаниях», куда включили обширнейшие разделы абстрактной алгебры и логики, не имеющие, однако, никакого отношения к решению каких бы то ни было прикладных задач. Но математика, как и любая другая наука, не имеет никаких оснований, и лишь самонадеянные формалисты, в силу своего неуемного стремления к обобщениям, пытаются полученные ими ограниченные знания облечь в универсальные формы, пригодные якобы на все случаи жизни. Эти утописты вырыли глубокий ров, отделяющий их предмет от реальных потребностей прикладной науки. Когда современный математик встречается с чем-то, что не подходит к его определению числа, группы, линейного пространства и т.п., он отказывается это исследовать. Придумав для себя удобную систему аксиом, он не хочет выйти за ее пределы, да он, собственно, и не знает, с какого конца подступиться к новому объекту. Таким образом, наш «универсалист» на поверку оказывается узким ремесленником, подготовленным для манипуляции пустыми, искусственно придуманными им же самим символами.

Обычно формалист держится подальше от насущных задач физики, которая без математической подпитки сегодня окончательно зачахла. Так получилось, что сегодня дискретная математика полностью обслуживает информационно-компьютерную область, а когда-то, в начале и середине XX века, теория групп питала кристаллографию, квантовую механику и физику элементарных частиц, т.е. самый передовой фронт естествознания. Но затем дискретная математика в этих сферах быстро выдохлась, поскольку аксиоматический формализм, который она восприняла, заведомо лишен большого творческого потенциала. Ведь логико-алгебраический подход не опирается на представления. И физики, по существу, вслепую манипулировали формулами, которые не были обеспечены конкретными образами, т.е. исследователи не имели перед глазами отчетливой модельной картины реальной действительности.

Сегодня в область физики ринулись мистики всех оттенков, неся с собой эзотерическую символику, взятую из древнеиндийских или древнекитайских текстов типа даосского знака Тай Цзи, иероглифов Ян и Инь, восьми триграмм из «Книги перемен», примеряя их к барионному октету и прочим кварковым моделям элементарных частиц. К счастью, в последние годы Российская академия наук и Министерство образования взялись, наконец, за решительное искоренение мистических и оккультных «наук» из сферы образования и подготовки будущих специалистов.

5. Недостатки логических высказываний

Сейчас мы продемонстрируем довольно неприятный семантико-лингвистический эффект, который демонстрирует водораздел между формой и содержанием грамматического предложения. С чисто формальной точки зрения, между любыми простыми высказываниями A и B существует 16 различных отношений, что соответствует числу операций в логике Буля или числу возможных таблиц истинности или, наконец, числу диаграмм Эйлера–Венна. Это, вообще говоря, избыточное число операций. В логике высказываний это многообразие логических отношений сводят к пяти: отрицанию, дизъюнкции, конъюнкции, импликации и эквивалентности. Однако, строго с формальной точки зрения, достаточно обойтись двумя (например, отрицанием и дизъюнкцией) или даже одной (например, стрелкой Пирса) базисной операцией, а все остальные операции могут быть выражены через исходные. Существует специальная методика для нахождения той или иной группы базисных операций, изложенная нами в «Дискретной математике».

Джон Стюарт Милль (1806–1873) не первый и не последний мыслитель, который задумывался о роли логики для математики (в частности, евклидовой геометрии) и физики. Это очень обширная тема, которую нам здесь сейчас целиком не охватить. Заметим лишь, что Милль использовал свой индуктивный метод так, что вся математика и физика у него вытекала из опыта, подымаясь от частных эмпирических данных к самым широким теоретическим обобщениям. Он является типичным сторонником формально-феноменологического подхода к науке. По Миллю, числа, точки, линии и прочие геометрические элементы, не говоря уже о массе, силе, энергии и других физических величинах, являются прежде всего объектами опыта, затем они получают статус абстрактных конструктов, с помощью которых, однако, он не спешил моделировать. Далее для развития научных знаний он продолжал использовать индуктивную логику, которая у него имела дело не только с формой знания, но и с его содержанием. Выше мы уже говорили, что число является не только и не столько продуктом опыта, сколько актом элементарного моделирования.[5] Милль, как и многие другие исследователи, стремился внести в логику семантическую составляющую, что является ошибкой. Мы не сможем сейчас рассмотреть всю проблематику, связанную с его индуктивной логикой, проанализируем только один, но

[5] **В.Э.:** Акимов описывает сущность числа.

достаточно важный вопрос. Покажем, что одно и то же содержание можно передать различными логическими формами, следовательно, одной и той же форме отвечает несколько смыслов. Продемонстрируем эту семантическую неоднозначность предложением, которое привел сам Милль в своем монументальном труде «Система логики».

В частности, он взял предложение: «Благородный человек достоин уважения» и стал уверять читателя, что оно относится к логическому сосуществованию двух признаков: A = *благородство* и B = *уважение*. Но на самом деле в данном предложении заключен смысл, который может быть передан различными формальными средствами. Например, импликативная форма представления будет выглядеть следующим образом: «Если человек благороден, то он достоин уважения». Здесь мы имеем причинную связь, типа «если A, то B»; аналогичный пример: «если сверкнет молния, то грянет гром». Однако причинная связь, как отмечал и сам Милль, однозначно определяет временную последовательность, т.е. порядок во времени, что близко также к отношению сосуществования: «Когда человек проявил благородство, после этого он достоин уважения»; отметим, что с точки зрения содержания здесь ничего не изменилось. Где есть сосуществование, там очень недалеко до простого существования: «из благородства вытекает существование уважения». Слово «достоин» можно трактовать как одну из форм эквивалентности; тогда уже будем иметь конструкцию сходства: «A эквивалентно B» или «Благородный человек одного достоинства с уважаемым человеком». Это же предложение можно «вытянуть» и на пространственную совместимость (в одном индивидууме) или пространственную упорядоченность двух человеческих качеств: «Где благородство, там и уважение». Таким образом, об упомянутых Миллем пяти видах содержания вряд ли приходится говорить: семантических видов либо вообще не существует, либо их столько, сколько существует грамматических форм для выражения одной и той же семантики.

Предложение о благородстве и уважении демонстрирует высокий градус спекулятивного потенциала, содержащийся вообще в обыденном языке и логике. Неизвестно, что подумалось Миллю во время написания им данного предложения, как перевел его предложение переводчик, о чем подумал читатель, услышав это предложение с чужого голоса, но факт остается фактом: семантика, заложенная в предложении *благородный человек достоин уважения*, представима через все существующие логические формы: благородный человек одного достоинства с уважаемым человеком (A ~ B); если человек благороден, то он достоин уважения (A > B); если человек достоин уважения, то он благороден (B > A); человек благороден или он достоин уважения (A or B); человек благороден и он достоин уважения (A & B). Если одна и та же смысловая фраза может быть выражена несколькими логическими высказываниями, то при их подстановке в дедуктивную цепочку можно получить и несколько отличающихся друг от друга логических выводов. И наоборот, некое формально строгое высказывание, например, *если человек благороден, то он достоин уважения* (A > B), вообще говоря, допускает вполне неопределенную смысловую интерпретацию: благородный человек достоин уважения, которая при переводе снова в строгое логическое высказывание может получить форму: если человек достоин уважения, то он благороден (B > A).

Таким образом, содержание и форма не столь тесно сцеплены, как это может показаться с первого взгляда. Одно и то же предложение, в зависимости от желаний и предпочтений субъекта, может сообщить самые различные логические формы. А это в свою очередь означает, что формально-феноменологический подход к науке неотъемлемо содержит внутри себя элементы спекуляции, которые обнаруживаются при внимательном анализе истории науки. Логик, составляя те или иные предложения, зачастую не отдает себе отчета, насколько они произвольны. Он мало задумывается над тем, какое именно высказывание соответствует реальному положению вещей. Гордясь строгостью дедуктивного вывода, он забывает о произвольности посылок. Конструктивный подход моделирования действительности лишен этих спекулятивных моментов; математические модели и алгоритмы интерпретируются, как правило, однозначно.

Милль давал как будто бы семантическую классификацию, но всё вылилось у него в форму, что и следовало ожидать, поскольку все логические процедуры формальны. Идеальное соответствие содержания и формы можно достичь в физике на основе математики. Благородство и уважение – это моральные качества, к которым математику не применишь. Следовательно, этика, как философия и другие гуманитарные науки, находясь во власти логики, обречена на бесконечные спекуляции.

В логике идет непрекращающаяся война между номиналистами, которые под понятием вещи мыслят случайный знак, и реалистами, которые понятие отождествляют с вещью. Сознание отдельно взятого логика периодически и непроизвольно дрейфует от позиции номиналиста к позиции реалиста. Можно всю свою жизнь потратить на определения, что такое логика и философия, реалист и номиналист, имя и предложение, отношение и элемент, но в конце концов ни один человек в мире не будет доволен вашими субъективными дефинициями. Роды и виды, общее и единичное, абстрактное и конкретное – всего этого нет в математике. Физик, конечно, тоже может просидеть всю жизнь над созданием модели, над выводом по ней формулы и уйти из жизни, так ничего и не открыв. Но если счастье ему улыбнется – а это всё же бывает время от времени, – то выведенную им объективную математическую формулу впишут золотыми буквами в историю науки.

Суждения вроде: «А влечет В, следовательно, чтобы предотвратить В, необходимо не допустить А» ориентировано на исследователя, оно, как и математическое доказательство, есть продукт логики мышления, но мало отражает объективные отношения. Верное средство избавиться от наблюдателя, а значит и субъективности теории, это исключить в рассуждениях причинно-следственные цепи: где появляется субъект, там господствует причинность.

Возьмите любое причинное предложение, например: «Нарастание анархии в обществе приводит к падению авторитета власти», «Безработица снижается с ростом инфляции» и поработайте с ним, как мы с миллевским предложением «Благородный человек достоин уважения», тогда вы увидите всю эфемерность причинных предложений.

Но дело даже не в формальном анализе, а в содержательном: существование класса обездоленных людей находится в причинном отношении к социальным конфликтам, и безработица связана с инфляцией как причина и следствие, только в сознании человека. В действительности, предложения не теряют своего реального содержания, когда ключевые слова упорядочиваешь в обратном порядке:

если человек благороден, то он достоин уважения,
если человек достоин уважения, то он благороден;

если в обществе нарастает анархия,
то это приводит к падению авторитета власти,

если падает авторитет власти,
то это приводит к нарастанию анархии в обществе;

если снижается безработица, то существует инфляция,
если существует инфляция, то снижается безработица.

Каузальное отношение – это априорная схема упорядочения событий в голове субъекта теории: никакого отношения к реальности она не имеет. В концептуальном плане причина и следствие взаимообусловлены, авторы же различных концепций нередко только и занимаются тем, что поправляют друг у друга, заменяя одни причинные высказывания на прямо противоположные.

У психолога Вильяма Джемса наглядно показана условность психофизических реакций, в частности: «У меня текут слезы по щекам не потому, что мне грустно, мне грустно, так как я плачу». У социалиста Роберта Оуэна читаем: «*Человек не формирует свой характер, характер формируется социальными условиями, в которых он живет*». У экономиста Карла Маркса имеются такие каузальные рассуждения: «*Цены стоят на высоком уровне не потому, что в обращении много или мало денег, а наоборот, в обращении находится много или мало денег потому, что цены стоят на высоком или низком уровне*»; «*не скорость обращения денег зависит от их количества, а количество обращающихся средств зависит от скорости их обращения*». У философа Морица Шлика находим следующее высказывание: «*Нет никакой разницы между утверждениями: прошлое определяет будущее и будущее определяет прошлое*». Любой желающий может инвертировать чужие каузальные высказывания, создавая, таким образом, свой взгляд на мир; вопрос только в том, насколько он будет действительно оригинален.

Скорость, ускорение, масса, сила, импульс, энергия – всё это результат сложного процесса моделирования реальности и вычленение из созданных моделей наиважнейших понятий, которые затем образуют различные функциональные зависимости, выраженные уравнениями, например: $F = ma$. Данное равенство можно трактовать каузальным образом двумя способами:

«Если увеличить ускорение (a), то сила (F) возрастет» или «если увеличить силу (F), то ускорение (a) возрастет». Эта двойственность возможна благодаря тому, что все законы физики, с точки зрения логики, выражаются логической эквивалентностью, которая тождественна конъюнкции двух импликаций:

$$A \sim B = (A > B) \& (B > A).$$

Таким образом, малая эффективность принципа причинности в объяснении реальных процессов вытекает из того, что *любая развитая физическая теория представляется в виде совокупности математических уравнений*.

Феноменалисты утверждают, что всякое углубление в причинную связь вскрывает функциональную зависимость, где причиной выступает аргумент (A), а следствием – функция (B). Закон детализирует каузальную связь, указывая, например, на прямую пропорциональную зависимость между причиной и следствием $A = kB$ или обратную – $A = k/B$. В частности, ток (I) растет с ростом напряжения (U), следовательно, имеем пропорциональную зависимость: $I = kU$, но ток обратно пропорционален сопротивлению: $I = k/R$. Откуда взялись все эти физические величины – ток, напряжение, сопротивление, – как не из общей модели физического процесса. Они являются элементарными конструктами, модельными узлами и деталями, но они не являются нашими непосредственными ощущениями, как тому учат прямолинейные эмпирики-феноменалисты, вроде Маха, Авенариуса, Петцольда, и они далеки от индуктивной процедуры «отсечения» реальности, которую предложил Милль, т.е. это не просто идеализированные и абстрагированные «тени» явлений физики, отброшенные человеческим разумом на математику. Здесь мы имеем дело с самыми реальными величинами, которые не следует разделять на физические и математические, так как физика и математика в физической теории полностью сливаются.

Выяснение функциональной связи между электропроводностью металла и его температурой предшествовала конструктивная модель механизма электропроводности, которая включала в себя идею о свободных носителях в виде электронов. Более тонкий механизм электропроводности должен включать в себя ионную компоненту, т.е. знание потенциалов ионов, входящих в кристаллическую решетку проводника, и знание структуры решетки. Но до этой атомарной картины электричество мыслилось в виде жидкости; именно из этой модели непрерывной субстанции возникло понятие электрического тока. Модель изменилась, а закон Ома остался прежним. То же самое происходило с законом аберрации света. Астроном Брэдли, который его открыл, пользовался корпускулярной моделью лучей света. Потом выяснилось, что свет имеет волновую природу. Однако математический закон аберрации света после нового модельного представления не изменился. Это обстоятельство дало повод позитивистам заявить: важна не предварительная конструктивная модель, а результирующая формула, которая позволяет вычислить ток, зная сопротивление и напряжение; или угол наклона телескопа в зависимости от скорости перемещения физического тела, на котором он установлен. Однако формула Ома перестает работать, например, на больших частотах, так как проявляется так называемый скин-эффект, при котором ток течет не по всему объему проводника, а лишь по его поверхности. В этом случае знание о взаимодействии электронов с веществом проводника оказывается весьма кстати.

Важно понять, что и элементарная формула Ома была бы не известна, если бы Ом не предложил свою жидкостную модель электричества. Таким образом, функциональная зависимость существенно определяется принятой моделью, куда входят те или иные физические величины. То же самое в электродинамике: Герц и Лоренц заявили, будто квинтэссенция теории Максвелла заключена в его четырех уравнениях, однако они не учитывают, что эти уравнения никогда бы не появились без наглядной модели эфирной среды, предложенной Максвеллом. Его модель мировой среды была очень грубой и далекой от действительного положения дел; в будущем ее, наверняка, заменит новая, более точная. Тем не менее, законы Максвелла, как и закон Ома, вряд ли изменится, поскольку того модельного приближения, который он предложил, оказалось достаточно для вывода правильных законов электродинамики.

6. Различие между конструктивным и формальным

Фрэнсис Бэкон думал, что он нашел логический путь синтеза, когда произнес слово «индукция». Но по его учению, при постепенном обобщении нужно придерживаться определенных правил, которые к логике имеют мало отношения. При обзоре опытных данных, учит он, надо сначала зарегистрировать сходства, затем полное расхождение и, наконец, частичное совпадение, когда интересующее свойство присутствует в предмете более или менее заметно, но недостаточно полно; после такого анализа можно делать обобщение. Всё это напоминает правила перехода улицы для пешехода: сначала посмотрите налево, затем направо и, наконец, убедившись окончательно, что движущегося транспорта на проезжей части нет, переходите улицу. Однако, несмотря на всем известные правила уличного движения, пешеходы гибли, и будут гибнуть под колесами автомобилей. Правила индуктивной логики не помогут в поиске новых истин, хотя их выполнение в какой-то степени дисциплинирует ум. Милль, чьи идеи мы выше рассматривали, на каузальном принципе построил свою индуктивную логику. Всеобщность и необходимость физических и математических законов, а также причинно-следственные отношения он объяснял многократно повторяющимся единообразным воздействием на человека известных впечатлений. Чередование двух хорошо нам знакомых событий: вспышка молнии (причина) и раскаты грома (следствие), сопровождают историю развития не только человека, но и животный организм вообще. Подобные неразрывные ассоциации наследуются биологическим путем как опыт миллионов поколений. Поэтому, утверждает Милль, человек рождается с предрасположенностью к причинно-следственным механизмам освоения реальности, и установление функциональных зависимостей у него становится чуть ли не физиологической потребностью, так что социальные и культурные воздействия только дополняют, обогащают и, быть может, в чем-то изменяют врожденные навыки. Функционально-причинная связь есть частный случай логической или, еще шире, формально-феноменологической закономерности.

Родоначальник позитивизма Огюст Конт был против редукции, сведения физики к математике, химии к физике, биологии к химии, психологии к биологии, социологии к психологии. Он, непонятным для конструктивиста способом, хотел «социологией» подмять биологию, химию, физику и математику. Милль идет тем же путем: он хочет с помощью «высших» или «общих» наук, логикой и психологией (через ощущения), построить «низшие» или «частные» науки, математику и естествознание. До него Шеллинг и Гегель тоже пытались из логического анализа вытянуть естественнонаучные законы. Перечисленные французские, английские и немецкие мыслители, вооружившись одной лишь философией, шли одним формально-логическим путем, который всех их завел в тупик. А всё началось еще с Аристотеля, для которого продолжением грамматики, риторики, диалектики и других языковых наук была логика. Вершиной его логики стала метафизика, отсюда все разговоры о категориях, дефинициях и классификациях. Формалист-феноменалист или позитивист, сочиняя всё новые и новые слова, раскладывая их по видам и родам, надеется связать причины и следствия, которые отсутствуют в природе; это – субъективные понятия.

Совершенно по-другому мыслит ум конструктивный, у которого нет никаких философских предрассудков в отношении познаваемости мира. Из предварительных знаний он ценит только математику, так как именно она дает ему в руки мощные моделирующие средства. Через нее воплощается кантовская мечта априорного и синтетического моделирования, которое, однако, непрерывно сравнивается с фактами наблюдения и эксперимента. Ум, порождая число, геометрическую фигуру, уравнение или модель, наиточнейшим образом вычисляет объективную реальность, далее нужно лишь согласовать их с конкретной областью действительности. Если в естествознании действуют люди, назвавшиеся «позитивистами», не жди ничего позитивного: от их деятельности наука быстро приходит в запустение, всё новое гибнет, задохнувшись ядовитыми парами схоластических рассуждений. Запутавшись в бесконечных цепочках своих логических спекуляций, эти формалисты-феноменалисты сопротивляются выдвижению любых конструктивных идей. Но если в естествознание приходят конструктивисты, наука развивается нормально: в ее недрах идут здоровые процессы неуклонного роста. Конструктивиста не пугает множественность моделей одного и того же физического процесса, он не стремится к универсализму и обобщениям, его не волнуют утилитарные задачи облагодетельствовать человечество новым рецептом материального процветания.

Как показывает драматическая история человечества, все конфликты и войны возникают обычно из-за формы. Один благоверный христианин убьет другого только за то, что первый крестное знамение совершает тремя перстами, второй – двумя. И хотя всякий христианин прекрасно знает, что на земле существуют иудеи и исламисты, которые тоже, как и он, верят в Бога, он скорее голову положит на плаху, чем согласится поменять свои религиозные обряды на обряды верующих других концессий. Формализм – это власть: любое пренебрежение формой для тех, кто ей однажды присягнул, есть тягчайшее преступление. Конструктивист, то и дело перешагивающий вековые устои выработанного не им ритуала, очень быстро зачисляется в преступники. Ко всему новому формалист относится крайне настороженно, и если оно всё же появляется, он постарается влить молодое вино в старые меха. Вся его деятельность обыкновенно направлена на бесконечную перестановку, шлифовку и лакировку старого материала, который зачастую был открыт не одну тысячу лет назад каким-нибудь всеми забытым конструктивистом.

Преимущества конструктивного подхода над формальным иллюстрируется всей историей науки. Но в учебнике, наподобие нашего, экскурс в историю не может быть слишком долгим, поэтому нам важно с самого начала правильно расставить приоритеты. Одной из приоритетных тем в нашей работе является тема раскрытия достоинства конструктивной эпистемологии перед формальной. Общему и универсальному подходу, который как раз и влечет «имперский» формализм в виде аксиом, лемм и теорем – этих рудиментов античной софистики и средневековой схоластики, – мы противопоставляем частные приемы решения конкретных задач.

Приверженец формы обычно склонен пускаться в скучнейшие и малопродуктивные дискуссии по тем или иным терминам. Он никогда не предложит вам какого-то нового, оригинального и эффективного метода решения алгебраического или дифференциального уравнения; он вообще не хочет заниматься решением конкретных задач. Его цель состоит в строгом «обосновании» уже добытого, но, как он считает, сырого материала. Для него наиважнейшей целью является исключение «противоречий» между различными моделями конструктивного знания, «подведение общего знаменателя», что он называет «основанием» математики или ее «фундаментальными принципами». Он может до бесконечности обсуждать список и содержание своих аксиоматических положений, доказывая преимущество именно своего набора отправных принципов. Между тем, взяв курс на символическое обоснование уже добытого знания, он ставит железобетонные заставы в виде строгих дефиниций и аксиом на дорогах живого творчества. Определения и принципы, выдвинутые на первый план, не только сковывают движение по пути развития теории, они еще, нередко, вносят разлад в старые, «классические» концепции, которые без этих обманчивых подпорок сами бы по себе держались на своих ногах.

Копаясь в ворохе не обеспеченных смыслом знаков, не умея воссоздать отчетливую картину области своих исследований, формалисты объявили войну образам и представлениям, уничтожили множество полезных строительных приспособлений, с помощью которых конструктивисты вели поиск принципиально новых знаний. В символическом переосмыслении добытых знаний непосредственные математические и физические представления часто искажались, погружались в пучину метафизики и даже откровенного богословия.

> «Вопрос о том, наглядна ли данная модель как представление физической системы или нет, – пишет один из идеологов формально-феноменологического подхода Марио Бунге, – не имеет отношения к семантике той теории, к которой она, в конечном счете, относится. Наглядность – это благоприятная психологическая случайность, а не научная необходимость».

Да, наглядность – свойство психологическое. Однако, чтобы до конца понять содержание физической системы, которую мы моделируем, необходимо стремиться к максимальной наглядности. Ненаглядная, плохо воспринимаемая модель – это всё равно, что сказать «плохая модель», так как моделирование только и нужно, чтобы лучше представить физическую систему. Познание мира есть процесс его последовательного осмысления, а не просто его описания, как это часто делают формалисты-феноменалисты. Поэтому психологический аспект здесь не может быть случайным.

В психологическом плане конструктивисты и формалисты-феноменалисты представляют собой противоположные характеры, однако, с точки зрения теории познания, полярное отношение необходимо заменить импликацией, так как интеллектуальный потенциал конструктивиста, как правило, включает в себя ограниченные творческие возможности формалиста-феноменалиста. Это происходит оттого, что у конструктивиста львиная доля интеллектуальных усилий тратится на исследовательскую (эвристическую) фазу. Долгое время он «прокручивает» в голове один и тот же пространственный образ, постоянно разбирая и по-новому собирая его. На создание модели природного явления или цельной картины физического процесса у него могут уйти целые годы. Что касается оформительской фазы, то он не хуже формалиста-феноменалиста сможет справиться с ней, для чего найдет и точные термины, и подходящие условные обозначения. Формалисты-феноменалисты приступают к работе сразу со второй фазы, начиная свою творческую деятельность с выбора подходящих формулировок, терминов и даже красивых символов.

Формалисты – это люди, утверждающие, что для понимания природного явления достаточно установления функциональной связи между какими-либо измеряемыми величинами. Эта связь выражается в символьной форме, при помощи математических знаков; причинно-следственная связь также выражается в символьной форме, в роли которых, однако, выступают непосредственно измеряемые величины. Феноменалисты договариваются, что эта буква будет означать исходное воздействие, эта – отклик. Далее они с помощью буквенной формулы устанавливают отношение типа воздействие – отклик. Характеристику этих людей мы пишем в одно слово: «формалисты-феноменалисты», поскольку всякий формалист одновременно является и феноменалистом. Или лучше сказать так: феноменалист – это формалист в физике, а формалист – это феноменалист в математике. Общей чертой для них является то, что они не доходят до сущности вещей, поэтому они не познают внутреннее содержание объекта, а останавливаются на видимой, внешней стороне рассматриваемого предмета. Феноменалисты отрицают сущность вещей, их материальность; для них существуют лишь психические ощущения; всё остальное ставится ими под сомнение. Изучение предмета они начинают с его словесного или символьного описания, минуя эвристическую или исследовательскую фазу, т.е. они не работают с конкретными вещами или их моделями; они также часто игнорируют геометрические образы.

Многие историки науки думают, что, например, древние китайцы потому не проявляли большого интереса к точным и опытным наукам, что вовремя не соединили их с логикой. Тем самым они выказывают непонимание того, что логика есть не что иное, как только доминирование субъективного над объективным, формы над содержанием, символа над образом, понятия над представлением, анализа над синтезом. Следовательно, логика может лишь сдерживать развитие объективной науки и синтетического знания. Какими бы наивными методами ни пользовались в древних странах Востока при решении арифметических и геометрических задач, это были всё же истинные знания, помогавшие человеку в его реальной жизни. Греция же Античного периода осчастливила человечество знаниями совершенного иного рода, ценность которых, несмотря на всю их обширность, сложность и своеобразие, вызывает у конструктивно мыслящего человека определенное разочарование, поскольку он прекрасно видит в «Началах» Евклида начало схоластики.

После выхода «Начал» Ньютона все точные науки возрожденной Европы стали испытывать колоссальное давление со стороны формалистов, которые в то время выступали в союзе с богословами. Нечто аналогичное происходило и после выхода «Начал» Евклида и «Физики» Аристотеля. Как в Античное, так и в Новое время, конструктивисты еще длительный период более или менее мирно сосуществовали с формалистами, пока, наконец, последние не взяли всю полноту власти в свои руки. Сегодня в науке хозяйничают формалисты-феноменалисты, сомкнувшиеся со сторонниками религиозно-мистических и оккультно-эзотерических учений. При этом враги конструктивизма усиленно заверяли обывателя, будто только благодаря им наука получила истинное право на существование, будто до них и не было никакой науки, только их формально-логическое обоснование превратило стихию беспорядочных гипотез в строгую систему знаний, а религиозно-мистический опыт позволил достичь таких трансцендентных глубин, которые и не снились рационалистам. В действительности же, под спудом мистических заклинаний, искусственных принципов и строгих определений точная и опытная наука задыхается и гибнет.

Математика древних греков берет свое начало в Египте и Вавилоне, где прекрасно умели решать сложнейшие математические задачи. Но если кто-то думает, что точная наука была развита только в этих двух центрах цивилизации, он сильно заблуждается. Древние китайцы не хуже египтян, шумеров или халдеев умели решать математические задачи прикладного характера. Причем цивилизация долины Нила и цивилизация долины Тигра и Евфрата не были абсолютно автономными: на протяжении примерно трех тысячелетий до Р.Х. происходило взаимное проникновение двух культур. Между тем, цивилизация долины Янцзы на протяжении почти пяти тысяч лет по причине своей удаленности находилась в полной изоляции от двух вышеназванных цивилизаций. Как известно, греки дали миру аксиоматический метод и вообще ввели логику обоснования математических положений. Римляне перенесли эту культуру ума на социальную почву – так возникло Римское право. Аксиоматическая форма представления знаний консервативна и даже догматична в принципе. Она предполагает незыблемость определенной совокупности положений, на которой выстроена статичная концепция. Древнейшая же математика Египта, Вавилона и Китая не претендовала на универсализм и всеобщность методов и носила исключительно прикладной характер. Причем бинарный счет древних египтян удивительным образом совпадал с процедурой, осуществляемой современными компьютерами, которые ничего не доказывают, а просто вычисляют по заданным алгоритмам. Почему египтяне, а также вавилоняне и китайцы, пошли по пути конструктивизма, а греки формализма? Какая из стратегий более продуктивна? На эти и другие вопросы мы отвечаем в следующем подразделе.

После распада Империи Александра Македонского и возвышения Римской империи математика Евдокса, Аполлония и Архимеда пришла в упадок. Римляне не дали точной науке ничего. Более того, проникновение логики в сферу естествознания, которое осуществил Аристотель, породило схоластику, затормозившую нормальное развитие науки более чем на полторы тысячи лет. Господство исключительно феноменологического и символического подходов к естествознанию знаменуется бурным расцветом алхимии и астрологии. Возрождение наук в Европе началось благодаря усилиям конструктивистов – Коперника, Кеплера, Декарта, Гюйгенса, Гука, Лейбница Якоба, Иоганна и Даниила Бернулли, упорно боровшихся с формализмом, который насаждался в университетской среде. В XX в. стараниями мистиков и формалистов факел конструктивной эпистемологии потух во второй раз. Мы живем в эпоху Нового Средневековья, когда для доказательства физических концепций снова апеллируют к тибетской «Книге мертвых» или к китайской «Книге перемен». Сегодня с университетской кафедры вновь можно услышать, будто между наукой и религией нет никаких противоречий.

Добавление, датируемое июлем 2008 года

Конструктивный подход состоит в том, чтобы полностью очистить наше мышление от всего формального, не иметь никакой предварительной эпистемологии, т.е. инструкции, как правильно познавать мир. Человеческий мозг от природы приспособлен решать любые конкретные задачи по разгадке непознанного и не нуждается в инструкциях философов, сколь мудры бы они ни были. Если задача не разрешима сегодня, значит, ее время еще не пришло. Общие, универсальные, философские или просто упреждающие темы конструктивист не должен затрагивать. Как только он начинает философствовать, он тут же превращается в формалиста или, во всяком случае, не конструктивно думающего человека.

Можно, конечно, всё вышесказанное назвать некой «философией» или «конструктивной эпистемологией», но я – только дворник, который убирает повсюду разбросанный интеллектуальный мусор, засоряющий мозги и мешающий нам решать частные задачи. Если я подымаюсь до каких-то общих вопросов, то это только потому, что к этому меня вынуждают сами философы. Кант и Декарт тоже поднимались на вершину схоластики, чтобы потом с этой высоты разоблачать спекуляции средневековых догматиков. Однако оба упомянутых мыслителя думали преимущественно конструктивно.

Конструктивизмом я пользуюсь интуитивно, формализм же отрицаю где-то на физиологическом уровне и не всегда могу рационально обосновать его неприятие. Я также уверен, что люди на генетическом уровне делятся на формалистов и конструктивистов, так что ярко выраженного формалиста, по-моему, невозможно научить конструктивно думать. В данном случае я имею в виду не только себя, но и любого живого, творчески мыслящего человека, занимающегося наукой. Ну, а как быть с искусственным интеллектом? Это несколько меняет ракурс, но не намного. Дело в том, что по границе, отделяющей формальное от конструктивного, как раз проходит граница, отделяющая машину от человека.

Гуманитарии любят поговорить относительно природы творчества вообще; для них, наверное, игра в шахматы и взятие дифференциала от неэлементарной функции – вполне творческий процесс. Но я уверен: всё, что делает машина, так или иначе формализуется, следовательно, такой вид интеллектуальной деятельности настоящим творчеством уже не назовешь. Сегодня машина переиграла в шахматы Каспарова. Однако это не означает, что она научилась творчески думать, как думает чемпион мира. Нас ведь не удивляет, что машина быстрее, чем человек, считает. Между тем быстрая и эффективная игра в шахматы интеллектуальный (искусственный или ест естественный) процесс примерного одного порядка с умением компьютера быстро считать.

Возможно, размышляя над ответом, сколько будет 7 + 8, у первоклассника задействованы те же мозговые центры, что и у Архимеда, когда он впервые вычислял объем шара. Можно надеяться, что и первоклассник, и Архимед участвуют в конструктивном процессе творчества. Сегодняшняя машина в состоянии решить не только 7 + 8 и архимедову задачу, но и более сложные математические действия. Однако, например, задача по нахождению объема сколь угодно сложной геометрической конфигурации целиком относится уже к формальной, а не к творческой задаче, поскольку существует ее алгоритм решения. Конструктивизм начинается там, где никакого формализма еще нет и в помине. Он возникает на самом острие познавательного процесса, когда не существует никакой модели или алгоритма.

Я убежден, что в конструктивном смысле искусственный интеллект создать невозможно, поскольку естественный мозг – динамическая система, способная в режиме *online* перестраивать нейронную сеть в процессе соприкосновения с чем-то принципиально неведомым. Наш мозг мыслит образами и представлениями, что не укладывается в компьютерные алгоритмы. В «Дискретной математике» я затрагиваю серьезную языковую проблему, связанную с машинным переводом с одного языка на другой.[6] Таким образом, в лингвистике я тоже вижу абсолютно не поддающийся компьютеризации компонент, а не только в задачах пространственно-механического характера.

С общим прогрессом знаний компьютер освоит какие-то задачи, которые сегодня не подаются моделированию и алгоритмизации. Но как бы там ни было, конструктивизм всегда идет впереди формализма, а человек – впереди машины. Наоборот, ситуация будет выглядеть совершенно парадоксально, когда принципиально не формализуемый процесс каким-то образом удастся реализовать в «железе», в машине, т.е. компьютеризировать. Таким образом, искусственного интеллекта с конструктивным образом мысли существовать не может.[7]

Да, человеческий мозг нередко будет уступать машине по быстродействию и объему вычислений. Но естественные мозги всё-таки способны составлять конструктивные модели для любых, сколь угодно сложных задач – пусть медленно, через бездну итерационных шагов, длинную серию приближенных и даже ошибочных моделей, но это возможно принципиально. Работай наши мозги как компьютер, мы бы до сих пор жили в Птолемеевой системе представлений, в которую постоянно бы вносили уточнения, удовлетворяющие самым точным астрономическим наблюдениям.

Заставить машину сделать качественно новый скачок в знаниях, какой сделал Коперник, оттолкнувшись от модели Птолемея, – невозможно.[8] Коперник, Архимед, Максвелл – конструктивисты, которые вносили не формальные, логически обоснованные новшества, а такие новшества, которые совершенно не выводятся из предыдущих знаний. Эйнштейн же, Гильберт и прочие формалисты-универсалисты верили в утопию и всячески стремились формализовать, унифицировать, алгоритмизировать процесс мышления и творчества. Они хотели построить супертеорию, которая бы накрывала все будущие системы знаний. Таким образом, они оказались тормозом в процессе познания мира, стали препятствовать поиску принципиально новых знаний.

7а. Конструктивное мышление древних

Египтяне удивительно талантливый народ. Демокрит хвастался: «В построении линий с доказательствами я никем не был превзойден, даже египетскими гарпедонаптами». *Гарпедонапты* – это землемеры, единственным прибором которых была веревка с узлами. Чтобы построить прямой угол, они отмеряли 3, 4 и 5 узлов, что давала прямоугольный треугольник. Но точно такими же веревками пользовались индийские землемеры. Из глубины веков к нам дошла книга о «Правилах веревки» («Сульва-сутра»), куда вошли задачи, которые решались людьми за полторы–две тысячи лет до Р.Х. Древнеиндийские математики с помощью веревки строили прямоугольные треугольники со сторонами: 3 : 4 : 5, 5 : 12 : 13, 8 : 15 : 17, 7 : 24 : 25 и т.д.

В отношении постройки священного жертвенника действовали строгие предписания, в том числе, и в отношении соблюдения точных пропорций между сторонами. На рис. 1*а* показана разметка трапецеидального основания алтаря, стороны которого ориентировались строго по четырем сторонам света. Установлено, что эта разметка производилась с помощью верки с

---

[6] **В.Э.:** Придет время, разберем.

[7] **В.Э.:** Ну, ну... (Если бы это было верно, то и человека не существовало бы).

[8] **В.Э.:** Олег! И откуда Вы знаете, что так-таки невозможно? Вы имеете настолько высокую программистскую квалификацию? Вот я, например, элементарно вижу решение этой задачки – запросто запрограммирую.

мерными узлами путем построения прямоугольных треугольников со сторонами, равными 12 : 16 : 20 и 15 : 20 : 25 мерам.

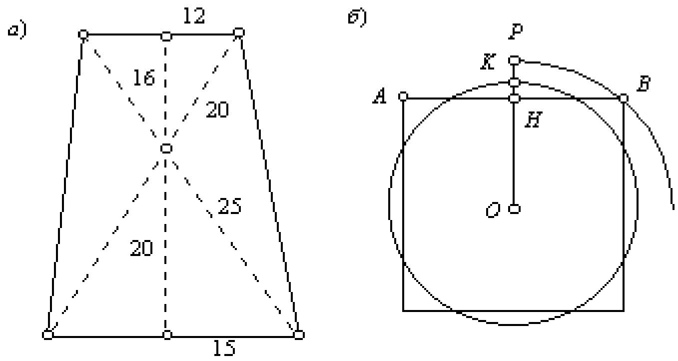


Рис. 1

Индийцы, как и греки, ставили задачу по вычерчиванию круга, площадь которого была бы равна площади заданного квадрата. В «Правилах веревки» приводился соответствующий алгоритм, который на современный язык можно было бы перевести следующим образом:

> «Из центра квадрата *O* перпендикулярно к стороне *AB* провести отрезок *OP*, равный половине диагонали, и на *HP* отложить отрезок *HK* = *HP*/3. Тогда получишь искомый радиус окружности, который будет равен отрезку *OK*» [31,[9] с. 116–117].

Согласно такому построению, изображенному на рис.1*б*, число π будет равно 3,088.

Далее речь пойдет о кромлехах, при построении которых древними британцами тоже использовалась веревка с мерными узлами. Кромлех – это концентрические ряды столбов-менгиров, соединенных между собой каменными блоками-балками. Самым известным кромлехом является Стоунхендж, расположенный в графстве Уилтшир, вблизи города Солсбери. По прошествии многих тысяч лет его камни смотрятся непривлекательно, но когда-то они имели достаточно торжественный вид, все глыбы были тщательно обработаны. Достаточно сказать, что громадным и тяжелым горизонтальным блокам была придана округлая, изогнутая форма, в точности повторяющая круг, эллипс или яйцевидную фигуру, лежащую в основании конструкции. Крепеж вертикальных блоков с горизонтальными выполнялся так же, как если бы блоки были сделаны из дерева, т.е. в верхних горизонтальных блоках вырезались пазы, которые надевались на шипы, выточенные на вертикальных столбах.

Общее число кромлехов, найденных на территории Англии, Уэльса и Шотландии, равно приблизительно тысяче. Начало строительства самого известного и загадочного кромлеха – Стоунхенджа – относится к 2800 г. до Р.Х. Затем он многократно перестраивался, так что последнее новшество в его конструкции отнесено к 1600 г. до Р.Х. Второй по значимости кромлех – Вудхендж – строился и реконструировался на протяжении 2300–2000 гг. до Р.Х. Самые древние Хенджи так называемого первого класса начали сооружаться с 3500 г. до Р.Х.

Большой знаток древних сооружений, Джон Вуд в этой связи рассказывает об удивительно продвинутой мегалитической геометрии древних британцев:

> «Независимо от периода постройки большинство каменных колец имело форму правильного круга. Примерное соотношение разных типов фигур следующее: 2/3 составляют правильные круги, 1/6 – приплюснутые круги, 1/9 – эллипсы и 1/18 – яйцевидные фигуры. Наиболее ранние кольца были правильными кругами, как и следовало ожидать, поскольку такие круги легче всего размечать. Некоторые приплюснутые круги могли быть построены в позднем неолите, но другие новшества – эллипсы и яйцеобразные фигуры – относятся к раннему бронзовому веку, причем большинство появилось после 2000 г. до Р.Х. С развитием более сложных фигур происходило общее уменьшение размеров каменных колец, и доля больших колец в раннем бронзовом веке заметно меньше, чем в позднем неолите» [67,[10] с. 75].

---

[9] Юшкевич А.П. *История математики в Средние века*. – М.: ГИФМЛ, 1961.
[10] Вуд Дж. *Солнце, Луна и древние камни*. – М.: Мир, 1981.

Чтобы вычертить круг, больших знаний не нужно. Вкопай в землю столб, накинь на него веревочную петлю, к другому концу веревки привяжи острый кол и, натянув туго веревку, прочерти на земле круг. Видимо, таким способом вычерчивалась геометрическая основа Стоунхенджа, который образован системой концентрических колец из камней и лунок. Для вычерчивания эллипса требовалось вкопать два столба, на которые набрасывались петельные концы веревки; длина веревки определялась прямоугольным треугольником $A0F_1$, лежащим внутри эллипса (рис. 2*а*). Так, треугольник с отношением сторон 3 : 4 : 5 является основой одного из эллипсов в Калленише, два эллипса Стентон-Дрю основаны на треугольнике с отношением сторон 5 : 12 : 13, эллипс Давиота близ Инвернеса основан на треугольнике 12 : 35 : 37 и т.д.

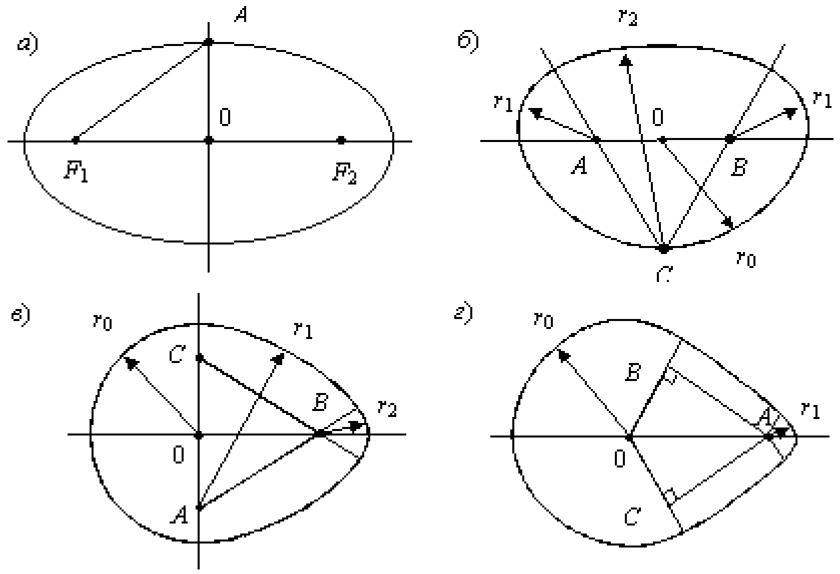


Рис. 2

Сложную геометрию имели приплюснутые круги (рис. 2б). Половина окружности строилась из центра *O* радиусом r_0, две дуги радиуса r_1 проводились из точек *A* и *B*, равноудаленных от центра *O*; наконец, часть дуги радиуса r_2 проводилась из точки *C*. Существовали приплюснутые круги, выполненные и по другой геометрии. Яйцевидные фигуры были двух видов. На рис. 2*в* показана яйцевидная фигура, в основе которой лежат два треугольника с отношением сторон 3 : 4 : 5; замкнутая кривая вычерчивается тремя радиусами из соответствующих центров. На рис. 2*г* изображена другая яйцевидная фигура, в основе которой лежат два треугольника, имеющих общую гипотенузу; при этом замкнутая кривая вычерчивается двумя радиусами, а недостающие куски образованы двумя прямыми.

Более детальные планы Стоунхенджа, Вудхенджа, яйцеобразного кольца Борроустон-Рига, могильника Нью-Грейнджа, схемы огромных полей Ле-Менека и Пти-Менека, заставленных плотными рядами камней, а также привязка сооружений к географической местности и к важнейшим астрономическим направлениям можно найти на нижеследующей вставке.

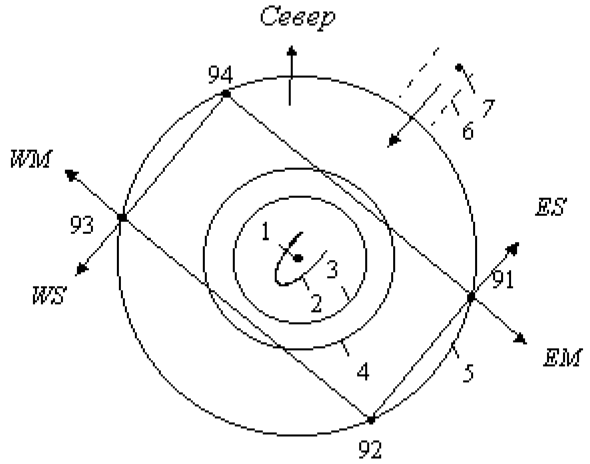
Вставка из 20 иллюстраций.

В основании Вудхенджа лежит шесть колец яйцеобразной формы первого рода, т.е. вычерченных с помощью трех радиусов (рис. 2*в*). Треугольники *A0B* и *B0C* имеют отношение сторон: 12 : 35 : 37; это отношение лежит в основе эллипса Давиота. Самый большой радиус (r_1), начиная от внутреннего кольца, принимал значения 18.61, 21.24, 23.90, 26.54, 31.82 и 34.46 *м*. Таким образом, при переходе от одного кольца к другому длина веревки увеличивалась на одну и ту же величину – 2.64 *м*. Исключение составляет переход от четвертого кольца к пятому, когда это значение удвоилось. Периметры колец соответственно равны 32.9, 51.2, 66.7, 87.0, 115.4 и 134.4 *м*. Если периметр третьего кольца принять за единицу, то все шесть периметров образуют весьма любопытную последовательность: ½, ¾, 1, 1¼, 1¾, 2.

Следовательно, наиболее важной характеристикой для яйцеобразных колец была длина периметра. При тщательном анализе всевозможных числовых соотношений ученые установили так называемый *мегалитический ярд*, т.е. повсеместно принятую единицу измерения, которая действовала почти на всей обширной территории Древней Британии в течение, по крайней мере, двух тысяч лет – факт сам по себе поразительный. Величина стандарта равнялась 0.829 *м*.

Отсюда длины шести колец Вудхенджа, выраженные в мегалитических ярдах, составляла ряд чисел 40, 60, 80, 100, 140 и 160. Большая ось всех концентрических колец яйцевидной формы сориентирована на точку восхода Солнца в день летнего солнцестояния. На этой оси в вершине прямоугольного треугольника была найдена могила ребенка (очевидно, жертва религиозного ритуала). Количество столбов, вкопанных по периметру шести колец, определяется числами 12, 18, 18, 16, 32 и 60. Столбы исчезли, от них остались только лунки. Величина лунок от 16 столбов четвертого кольца примерно в два раза больше, чем от всех остальных столбов. Какой во всем этом скрыт смысл, пока неясно.

Еще больше загадок скрывает Стоунхендж, хотя многое уже и здесь стало понятным. Общий план Стоунхенджа показан на рис. 3.



1 – Алтарный камень,
2 – Подкова из пяти трилитов,
3 – Сарсеновое кольцо,
4 – Кольцо голубых камней,
5 – Кольцо лунок Обри,
6 – Аллея, являющаяся входом в Стоунхендж,
7 – Пяточный камень.

Важнейшие направления:
ES – Восход Солнца в день летнего солнцестояния,
EM – Восход «высокой» Луны,
WS – Заход Солнца в день зимнего солнцестояния,
WM – Заход «высокой» Луны.

Рис. 3

Граница этого кромлеха очерчена валом, насыпанным по окружности, с диаметром 98 *м*; первоначальная высота вала равнялась примерно 2 *м*. Внутри этой границы шло кольцо из так называемых *лунок Обри*; 56 лунок, имеющих глубину 3/4 *м* и поперечный диаметр 1 *м*, расположены равномерно по окружности с диаметром в 87,8 *м*. Ошибка в расположении центров лунок вдоль окружности составляет менее 0,5 %. Затем по кольцу с диаметром в 40 *м* располагались голубые камни (такой оттенок они приобретали во время дождя); количество камней равнялось 30.

Спустя 1800 лет после создания системы лунок Обри было построено *Сарсеновое кольцо* диаметром 31 *м*. Оно образовано также 30 камнями (сейчас осталось 17); шесть горизонтальных перекладин до сих пор находятся наверху на своих местах. Центр Сарсенового кольца немного не совпадает с центром кольца лунок Обри (разница составляет примерно 0,5 *м*). Десять самых огромных сарсенов, установленных парами внутри кольца, образуют подкову, обнимающую *Алтарный камень*, установленный в самом центре кромлеха. Каждая пара камней сверху накрывалась горизонтальным блоком, таким образом, получался *Трилит* (сегодня стоят три из пяти трилитов).

Самые большие камни подковы имеют высоту 5 *м* и вес 50 *т*. Разрыв подковы обращен к *Аллее*, которая считается вратами Стоунхенджа. Ось подковы, Алтарный камень и середина Аллеи совпадает с направлением, указывающим на восход Солнца в день летнего солнцестояния. На Аллее на расстоянии 30 *м* от вала лежит *Пяточный камень*. Наиболее интересными камнями являются четыре камня, обозначенные на общем плане Стоунхенджа как 91–94. Они установлены на окружности лунок Обри в вершинах прямоугольника, который указывает на важнейшие направления захода и восхода Солнца и «высокой» Луны. Не вызывает никаких сомнений, что Стоунхендж представляет собой древнейшую астрономическую обсерваторию.

Как свидетельствуют многочисленные памятники истории цивилизаций, древний человек всегда принимал движение Солнца, Луны, планет и звезд за причину смены зимы, весны, осени и лета. Если внимательно отслеживать перемещение этих небесных объектов, то, верил он, будешь знать время наступления дождей, засухи, ветров, похолоданий, что, в принципе, является не такой уж и неправдой. Возможно, помимо астрономического наблюдательного средства кромлех выполнял какие-то другие общественные и религиозные функции. Однако нас он будет интересовать только с точки зрения наблюдательной астрономии, как календарь и одновременно своеобразный планетарий. Мы ограничимся рассмотрением назначения одних лишь лунок Обри – предшественниц пирамиды Хеопса. Чтобы понять их назначение, необходимо усвоить хотя бы самые минимальные астрономические сведения.

В частности, читатель должен знать, что период обращения Луны составляет 27,3 суток; плоскость ее орбиты не совпадает с плоскостью небесного экватора, а к плоскости земной орбиты она наклонена под углом $i = 5°$, который нисколько не изменился с времен постройки кромлеха. Поэтому Луна пересекает плоскость эклиптики дважды в месяц. Точки пересечения называются *узлами* ее орбиты и обозначаются как N_1 и N_2, причем узел N_1 называется *восходящим*, N_2 – *нисходящим*. Плоскость лунной орбиты вращается, и узлы совершают полный оборот в течение 18,6 лет. Наклон эклиптики (ε), т.е. угол между небесным экватором и плоскостью орбиты Земли, несколько изменяется. На момент строительства лунок Обри он составлял $\varepsilon = 24°$ (сейчас $\varepsilon = 23{,}5°$) При максимальном лунном склонении углы i и ε складываются, что дает величину 29°. Это положение Луны называется *высоким*; при *низкой* Луне углы i и ε вычитаются, что дает величину 19°. В результате наблюдатель в течение 18,6-летнего периода может видеть следующую картину. В период высокой Луны, который длится примерно 3 года, наблюдатель каждый месяц видит ее либо слишком высоко $(+\, i + \varepsilon)$, либо слишком низко $(-\, i - \varepsilon)$ над горизонтом. Затем, через 9 лет, амплитуда ежемесячных ее колебаний постепенно уменьшается, и во время низкой Луны колебания совершаются между двумя крайними значениями: $(-\, i + \varepsilon)$ и $(+\, i - \varepsilon)$. Всё это не мог не заметить неолитический человек, который в бессонную лунную ночь только и делал, что смотрел на Луну.

Другое небесное событие, которое могло поразить его воображение, это лунные затмения, всегда происходящие в полнолуние. Они наступают тогда, когда Луна находится в узлах N_1 или N_2, т.е. два раза в год с интервалом в 6 месяцев. Поскольку узлы совершают 18,6-летний цикл, время наступления затмения из года в год меняется, но через указанный период времени фазы Луны, а значит, и затмения, повторяются в те же самые дни, хотя есть рассогласование в часах. Три 18,6-летних цикла дают один 56-летний цикл, число лет в котором совпадает с числом лунок Обри.

Ученые предположили, что кольцо с лунками было снабжено четырьмя маркировочными камушками, которые условно назывались *Солнцем* (S), *Луной* (M), *Восходящим узлом* (N_1) и *Нисходящим узлом* (N_2). Чтобы отслеживать лунные затмения, необходимо было маркировочные камушки бросать в соответствующие лунки. При затмении камни S и M должны находиться друг против друга; пусть это будут лунки 10 и 38 (счет лунок начинается от середины Аллеи по часовой стрелке), тогда камни N_1 и N_2, должны находиться в лунках 18 и 46, соответственно. Далее, камень S каждые 13 дней перебрасывался на две лунки против часовой стрелки, совершая полный цикл в течение одного года (точнее, за 364 дня). Камень M каждый день перебрасывался через лунку против часовой стрелки, так что он совершал полный цикл за 28 дней. Камни N_1 и N_2 всегда должны находиться друг против друга на одном диаметре и перемещаться на одну лунку каждые четыре месяца, они совершали полный цикл за 18,6 лет.

Лунки Обри позволяли достаточно точно предсказать дни летнего и зимнего солнцестояния, дни равноденствия, а также дни лунных затмений на протяжении многих лет. Этот прибор не мог работать слишком точно, в частности, затмения нельзя было предсказать с точностью до часа, минуты и секунды, как это делается сегодня, но ночь затмения по нему определить можно. Его достоинством является простота настройки: каждое очередное знаменательное событие на небе позволяло скорректировать прибор для последующего предсказания. Многовековые наблюдения позволяли приобрести необходимый в этом деле опыт. Например, если в день летнего солнцестояния служитель кромлеха занимал положение возле Алтарного камня, то он мог увидеть восход Солнца как раз над Пяточным камнем. Предположим он видел во время зимнего солнцестояния над Пяточным камнем восход полной Луны. Это говорило ему, что она находится в середине 18,6-летнего цикла точно между высокой и низкой Луной. Тогда он ждал лунного затмения в дни зимнего и летнего солнцестояния. Такие события как-то им отмечались и передавались потомкам.

Отчего Стоунхендж просуществовал такое колоссальное количество лет и не был никем разрушен? Вероятно, его не разрушили потому, что он всегда был страшно интересен людям. Представьте себе, тысяча людей в округе узнают от служителей Стоунхенджа, что завтра ночью случится затмение Луны. На следующую ночь никто в этой округе не ложится спать и, в конце концов, все убеждались, что предсказание сбылось. Как эти люди будут относиться к служителям кромлеха? Понятно, как к богам. Почему тогда при столь сложной системе астрономических наблюдений не возникла письменность? Да потому что информация – это власть. Зачем нужна письменность, когда задача стояла прямо противоположная: скрыть информацию, не дать никому что-либо узнать? Наверное, многие служители кромлеха поплатились жизнью за укрытие своих научных тайн.

Как в Египте или Греции (вспомним тайное общество пифагорейцев), в Древней Британии, возможно, существовала закрытая каста жрецов, надежно скрывающая секреты расположения маркировочных камней. Многие, быть может, и видели эти невзрачные камушки, но разве могло кому-нибудь прийти в голову, что с их помощью можно предсказать расположение дневного и ночного светила. Возможно, ситуация была иной: все хорошо знали о назначении маркировочных камней и других ухищрениях, и Стоунхендж представлял собой бурлящий научный центр, где кипели споры, как лучше произвести маркировку лунок, какой проект принять для возведения очередного кромлеха, какими геометрическими свойствами обладают приплюснутые круги и т.д. В любом случае наука в таком обществе занимала исключительно важное место.

Постройка Стоунхенджа и его эксплуатация говорят о развитом конструктивном мышлении неолитической культуры, при которой люди еще ходили в шкурах зверей и не знали колеса. Однако по наукоемкости, британские кромлехи ничуть не уступают современному компьютеру, телевизору или автомобилю. Подобно тому, как сейчас Интернетом и Мерседесом пользуются нынешние высокопоставленные служители религиозного культа, Стоунхендж, наверняка, эксплуатировался во благо тогдашней жреческой касты. Таким образом, кромлехи, не менее загадочные пирамиды, разбросанные по всем частям света, и сменившие их более развитые архитектурные формы, которые можно наблюдать в церквах, мечетях и других культовых сооружениях, всегда были свидетелями блестящего достижения инженерно-конструкторской мысли. В то же самое время и вне всяких сомнений, они служили и еще долго будут служить центрами распространения самых иррациональных и консервативных знаний, глубоких человеческих заблуждений и вредных предрассудков, о которых, однако, рассказывается уже в других разделах нашего веб-сайта.

Многие вопросы неолитической культуры древних британцев остались вне нашего повествования. Мы ничего не рассказывали о странных рядах камней типа Ле-Менека и Пти-Менека, расположенных вблизи Карнака. Общие планы этих рядов камней вместе с картами Великобритании мы дали на **вставке** к этой странице. Там же вы найдете план могильника Нью-Грейнджа, архитектура которого представляет собой удивительное соединение культовых традиций и астрономических знаний древних британцев. Невозможно удержаться, чтобы не сказать несколько слов об этом могильнике.

Он расположен в 50 *км* на северо-запад от Дублина. Время его постройки относится к 3300 г. до Р.Х. Могильник представляет собой насыпь округлой формы размерами 80 *м* в поперечнике и 10 *м* высотой. Внутри насыпи имеется коридор, длиной в 20 *м*, заканчивающийся небольшой комнатой, где когда-то находилось захороненное тело. На каменных стенах комнаты непосредственно около захоронения были нанесены узоры спирального и ромбического вида. Вход в коридор был долгое время завален землей, но когда-то, сразу после постройки, могильник представлял собой величественное зрелище. К входу вела 30-метровая каменная дорожка, аккуратно обложенная с обеих сторон стенами, сложенными из горного хрусталя (кварца). В утренних лучах солнца хрусталь блестел и переливался всеми цветами радуги. При входе на дорожку была установлена огромная каменная глыба, украшенная тонкой резьбой, которая до сих пор считается вершиной неолитического искусства. Коридор и всё сооружение было построено так, чтобы точно в день зимнего солнцестояния лучи восходящего солнца, пройдя внутренние помещения, падали на стену усыпальницы и освещали захороненное тело. Более подробно об этом могильнике и других сооружениях можно прочесть в вышеуказанной книге Дж. Вуда, которая дает достаточно полное представление о ярко выраженных конструктивных наклонностях древних британцев.

7. Математика дробей и пропорций

Первое, к чему пришли древние египтяне, были рациональные дроби; наиболее распространенными среди них были: 1/2, 1/3, 1/4, 1/6, 2/3, 3/4, 4/5. Дробными величинами измерялись длины, площади, объемы, веса, периоды времени, музыкальные интервалы и пр. Дошедший до нас папирус Ринда, датируемый примерно 2000 г. до Р.Х., начинается с так называемой *канонической таблицы* представления дробей вида $2/n$ суммой дробей вида $1/k$ (табл. 1). В ней указаны нечетные знаменатели дроби вида $2/n$, изменяющиеся от 3 до 101, и два, три или четыре знаменателя дроби вида $1/k$. Приведем примеры разложения дробей $2/n$ на сумму дробей $1/k$:

$$2/3 = 1/2 + 1/6,\ 2/5 = 1/3 + 1/15,\ 2/7 = 1/4 + 1/28,\ ...,$$
$$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104,\ 2/15 = 1/10 + 1/30,\ ...,$$
$$2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606.$$

Таблица 1

n	*k*	*n*	*k*	*n*	*k*
3	2,6	37	24,111,296	71	40,568,710
5	3,15	39	26,78	73	60,219,292,365
7	4,28	41	24,246,328	75	50,150
9	6,18	43	42,86,129,301	77	44,308
11	6,66	45	30,90	79	60,237,316,790
13	8,52,104	47	30,141,4779	81	54,162
15	10,30	49	28,196	83	60,332,415,498
17	12,51,68	51	34,102	85	51,255
19	12,76 114	53	30,318,795	87	58,174
21	14,42	55	30,330	89	60,356,534,890
23	12,276	57	38,114	91	70,130
25	15,75	59	36,236,531	93	62,186
27	18,54	61	40,244.488,610	95	60,380,570
29	24,58 174,282	63	42,126	97	56,679,776
31	20,124,155	65	39,195	99	66,198
33	22,66	67	40,335,536	101	101,202,303,606
35	30,42	69	46,138		

Далее в папирусе Ринда приводятся условия и решения свыше 80 различных задач; при решении некоторых из них египтяне использовали данные разложения. Однако почему из бесчисленного множества разложений дроби $2/n$ на сумму дробей вида $1/k$ приведены именно эти, сказать трудно. Например, легко доказать, что любая дробь $2/n$ разлагается на две компоненты вида $1/k$:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{(n+1)/2} + \frac{1}{n(n+1)/2}.$$

В частности, первые три разложения удовлетворяют этой формуле. Но зачем понадобилось менять эту процедуру для других 46 значений n (исключение составляет еще дробь с n = 23), непонятно.

Больше того, каноническое разложение, которым египтяне пользовались на протяжении многих веков, вдруг в какое-то время подвергалось изменениям. Например, существует глиняная табличка, относящаяся примерно к раннему периоду Нового царства (1500 год до Р.Х.), в которой уже вместо двучленного разложения дроби 2/7 использовалось трехчленное: 2/7 = 1/6 + 1/14 + 1/21. Всё это трудно объяснить, хотя недостатка в гипотезах мы сегодня не испытываем. Арабский математик Абуль-Вефа (940–998) в «Книге о том, что нужно знать писцам, дельцам и прочим о науке арифметике» приводит таблицы разложения дробей вида n/60 на сумму двух, трех и более дробных слагаемых, в основе которых лежал канонический алгоритм:

$$\frac{n}{60}=\frac{n-15}{60}+\frac{1}{4},\quad \frac{n}{60}=\frac{n-12}{60}+\frac{1}{5},$$

$$\frac{n}{60}=\frac{n-6}{60}+\frac{1}{10},\quad \frac{n}{60}=\frac{n-4}{60}+\frac{1}{15}.$$

В соответствии с этими формулами, например, дробь 48/60 представлялась не в виде элементарной дроби 4/5, а в виде суммы трех дробей:

$$\frac{48}{60}=\frac{42}{60}+\frac{6}{60}=\frac{30}{60}+\frac{12}{60}+\frac{6}{60}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}.$$

Для следующей дроби, 49/60, давалось такое разложение:

$$\frac{49}{60}=\frac{45}{60}+\frac{4}{60}=\frac{30}{60}+\frac{15}{60}+\frac{4}{60}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}.$$

Причем алгоритм разложения дроби $n/60$ довольно часто отклонялся от канонического. Такая странная процедура над дробями перекликается с формой разложения дробей $2/n$, существовавшей в Древнем Египте.

Если указанные действия с дробно-рациональными числами, которые производили египтяне и арабы, остаются загадкой для современных историков науки, то операции, которые совершали математики Древней Греции с подобными числами, никакой тайны не составляют, и даже, напротив, через них открывается понимание огромного пласта научной культуры эллинов, отразившегося и на развитии научных предпочтений возрождающейся Европы.

Сегодня нам трудно сказать, откуда первый древнегреческий философ, ученый и видный политический деятель Фалес Милетский (625–547 гг. до Р.Х.) узнал о пропорциональности сторон подобных треугольников: открылась ли эта истина ему самому или ее передали ему египетские жрецы во время его торговых и дипломатических миссий в страну древних пирамид. Главное, что он умел находить какую-либо неизвестную величину по трем известным на основе пропорции $a/b = c/d$. Так, измерив длину тени, отбрасываемой предметами, Фалес с помощью этой пропорции нашел высоту египетской пирамиды. Измерение расстояния до корабля, находящегося далеко в море, им производилось тоже на основе этой пропорции. Выбрав на берегу моря базис a и вымерив с крайних его точек углы до корабля, он затем вычерчивал подобный треугольник небольших размеров и измерял у него две стороны, скажем, c и d. После этого ничего не стоило найти неизвестное расстояние до корабля – сторону b. Задачи такого класса и более сложные умели прекрасно решать в Египте (это стало известно из найденных папирусов).

Как бы там ни было, но, судя по дошедшим из глубины веков отзывам античных историков и философов, эллинов просто очаровала эта нехитрая методика, из которой они извлекли всё самое ценное, что только может дать элементарная формула. Вслед за Фалесом Пифагор (580–500 гг. до Р.Х.) со своими единомышленниками, создав закрытое научное общество, установил взаимно однозначное соответствие между высотой тона и длинной струны. Пифагорейцы создали акустическую теорию гармонических интервалов, где получили известные музыкальные отношения: *октава* (1/2), *квинта* (2/3), *кварта* (3/4) и т.д. Пифагор настолько поверил в мощь математической науки, что провозгласил в качестве принципа своей отчасти рациональной, отчасти мистической философии очень верную сентенцию: *мир управляется числом*. Принимать ли единицу, двоицу, триаду, тетраду или декаду (10 = 1 + 2 + 3 + 4) за божественные сущности, зависит от степени восхищения тех, кто с ними имеет дело. Пифагор и его последователи первыми из эллинов столкнулись с числовой гармонией, поэтому вполне естественно для первооткрывателей, что они были очарованы своим открытием. В любом случае, что бы ни говорили нынешние философы, та или иная мера влюбленности в красоту чисел есть вполне понятное чувство для всякого математика.

Обнаружение несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, т.е. отчетливое понимание того, что невозможно выразить отношение $1 : \sqrt{2}$ рациональной дробью, нанесло смертельный удар числовому идеализму пифагорейцев. В самом деле, пусть, рассуждали они, имеет место пропорция: $1 : \sqrt{2} = a : b$. Тогда $b^2 = 2a^2$. Отсюда видно, что число b^2 – четно. Четный квадрат может дать только четное основание, значит, b – четно. Предположим, что $b = 2c$. Из исходной пропорции и четности числа b вытекает нечетность числа a. Но подставим последнее равенство в предыдущее: $4c^2 = 2a^2$ или $a^2 = 2c^2$, т.е. a – четно. Возникло противоречие: целое число a одновременно оказывается и четным и нечетным. Таким образом, диагональ квадрата не может находиться с катетом в *рациональном*, т.е. ранее доступном для понимания отношении двух чисел $a : b$.

Открытие *иррациональных* чисел типа √2, сущность которых не укладывалась в головах античных математиков, посеяло *скептицизм*, а именно, неверие в *теоретическое* или *формально-логическое* обоснование. Природа этого скептицизма была примерно такой же, какой она была по отношению к известной апории Зенона «Ахиллес и черепаха». Согласно формально-логическому рассуждению, получалось, что знаменитый олимпийский бегун никогда бы не смог догнать и обогнать черепаху, что, однако, легко опровергалось практикой. Данная апория сильно мешала осмыслить понятие механической скорости, которое к тому времени еще не было отчетливо выработано. Однако логический скептицизм зажег зеленый свет для *конструктивных методов проб и ошибок*, носивших исключительно практический характер. Ведь числа типа √2 легко получались путем геометрических построений, следовательно, они реально существуют. Тут же явилась мысль, что диаметр (d) и длина окружности (c), подобно катету и гипотенузе, находятся в иррациональном отношении ($d : c = 1 : \pi$). В течение нескольких культурных эпох конструктивисты стремились инструментальными методами, т.е. с помощью циркуля и линейки, построить *квадратуру круга*. Они надеялись, что число π окажется квадратным корнем какого-нибудь неизвестного числа, например 10 (отношением 22 : 7 пользовался Архимед как приближением числа π). В конце концов они убедились, что этого сделать нельзя и что число π не просто *иррационально*, оно еще и *трансцендентно*, другими словами, π находится за пределами не только теоретической, но и *практической* действительности.

После Фалеса и Пифагора Демокрит (470–370 гг. до Р.Х.) проникся верой во всесилие математики и, в частности, в дробно-рациональные отношения. Его научно-философские сочинения до нас не дошли, однако хорошо известно, что он находил объемы пирамид и конусов как треть объема призмы и цилиндра, построенных на основании пирамиды и цилиндра, т.е. по формуле $V = Sh/3$. Эту универсальную формулу он проверял опытным путем для огромного количества прямых и наклонных тел с различной формой основания следующим образом. С помощью крохотных кирпичиков-атомов (ατομοζ – *неделимый*) он строил сначала пирамиду или конус, а затем из тех же самых атомов и на том же основании складывал призму или цилиндр, при этом всякий раз высота последней конструкции достигала лишь одной трети от первой. Пропорция между объемами различных тел действительно выглядела магической, так как всякий раз приводила к неизменному отношению:

$$V_{\text{пирамида}} : V_{\text{призма}} = V_{\text{конус}} : V_{\text{цилиндр}} = 1 : 3$$

Здесь было от чего прийти в религиозный экстаз, в который впадали пифагорейцы.

Евдокс Книдский (410–356 гг. до Р.Х.) был одним из крупнейших математиков античной эпохи. Известно, что его результаты математических исследований составили содержание по крайней мере пятой, шестой, второй части одиннадцатой и двенадцатой книг «Начал» Евклида. Именно ему, говорят историки, принадлежит отчетливая постановка и попытка разрешения задачи о квадратуре круга. Он нашел следующие важнейшие пропорции: площади двух кругов относятся как квадраты диаметров; объемы двух треугольных пирамид с равными высотами относятся как площади оснований; объемы двух равновысоких конусов или цилиндров относятся как кубы диаметров. Эти положения Евдокс доказывал с помощью знаменитого *метода исчерпывания*, который впоследствии использовал Архимед (287–212 гг. до Р.Х.) для нахождения площадей и объемов криволинейных фигур и тел. Метод исчерпывания служил Архимеду окончательным доказательством количественных соотношений, которые он сначала находил эмпирическим путем, взвешивая на весах или погружая в воду тела соответствующей формы. Так, он предварительно узнал о пропорции 2 : 3, которая существовала между объемами шара и описанного вокруг него цилиндра, выразив объем шара следующей формулой: $V = (4/3)\pi R^3$.

В связи с последней пропорцией Плутарх написал:

> «И хотя у него было много прекрасных открытий, он, говорят, просил своих родственников и друзей начертать на его могиле только цилиндр и заключенный в нем шар, указав при чертеже соотношение между объемами этих тел».

Кроме того, Архимед нашел, что площадь поверхности шара относится к площади его большого круга как отношение 4 : 1. Он также определил, что площадь параболического сегмента относится к площади треугольника, имеющего то же основание и высоту, как 4 : 3 (заметим попутно, операция приведения площадей различных фигур к одному и тому же основанию у греков называлась *параболой* – παραβολη).

При предварительном нахождении последнего отношения он использовал эмпирический метод рычага, которым он как бы взвешивал фигуры на весах. По поводу этого своего механического приема он написал своему другу знаменитому географу Эратосфену следующее:

> «... Я счел нужным написать тебе и в этой же самой книге изложить некоторый особый метод, при помощи которого ты получишь возможность при помощи механики находить некоторые математические теоремы. Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем. Действительно, кое-что из того, что ранее было мною усмотрено при помощи механики, позднее было также доказано и геометрически, так как рассмотрение при помощи этого метода еще не является доказательством; однако получить при помощи этого метода некоторое предварительное представление об исследуемом, а затем найти и само доказательство, гораздо удобнее, чем производить изыскания, ничего не зная. Поэтому и относительно тех теорем о конусе и пирамиде, для которых Евдокс первый нашел доказательство, а именно, что всякий конус составляет третью часть цилиндра, а пирамида – третью часть призмы с тем же самым основанием и равной высотой, немалую долю заслуги я уделяю и Демокриту, который первый высказал это положение относительно упомянутых фигур, хотя и без доказательства. И нам довелось найти публикуемые теперь теоремы тем же самым методом, как и предыдущие; поэтому я и решил написать об этом методе и обнародовать его, с одной стороны, для того, чтобы не оставались пустым звуком прежние мои упоминания о нем, а с другой, поскольку я убежден, что он может принести математике немалую пользу; я предполагаю, что некоторые современные нам или будущие математики смогут при помощи указанного метода найти и другие теоремы, которые нам еще не приходили в голову. Первым мы опишем то, что первым и было нами обнаружено при помощи механики, а именно, что всякий сегмент параболы составляет четыре трети треугольника с тем же основанием и равной высотой, а затем и каждую из теорем, полученных нами при помощи этого метода... » [10,[11] с. 299].

Конструктивный метод Архимеда, позволивший ему открыть многие математические отношения, существующие в материальном мире, затем лег в основания научного естествознания. Его влияние сказалось, например, на гидромеханике. Еще Демокрит утверждал, что все тела имеют тяжесть; разностью весовых характеристик можно и нужно пытаться объяснить движение тел в природе. В частности, говорил Демокрит, поскольку огонь имеет самый малый вес, он выталкивается всеми другими телами, включая воздух; поэтому пламя всегда поднимается вверх, подобно пузырькам воздуха в воде. Такой взгляд на вещи сильно отличается от формально-феноменалистской физики Аристотеля, который за огнем, воздухом, водой и землей закрепил постоянные места во вселенной, лишив тем самым физику дальнейшей перспективы научного развития. Согласно аристотелевскому учению, чем дальше от своих «естественных мест» находятся тела, тем сильнее на них действует возвращающая сила. Если камень поднять высоко в небо, а огонь зажечь на земле, то эти тела немедленно устремляются к своим «местам» по особым «геодезическим» линиям, т.е. наикратчайшим путем. Аналогичная крайне немеханическая картина мира была восстановлена в XX веке через понятие кривизны пространства и времени.

Архимед принял атомарную модель Демокрита и продвинул ее далеко вперед с помощью своих строгих *механико-геометрических* построений. Так, в своей работе «О плавающих телах», в которой жидкость моделировалась атомами, он предположил, что на одном и том же уровне менее сдавленные атомы выталкиваются более сдавленными. По причине этого эффекта, писал он,

> «поверхность всякой жидкости, установившейся неподвижно, будет иметь форму шара, центр которого совпадает с центром Земли» [10, 328].

Далее у него шло математическое обоснование этого вывода. Посредством аналогичных модельных представлений он приходит к представлениям, которые затем легли в основания *нормальной* физики. В частности, к известному архимедову закону, гласящему:

---

[11] Архимед. *Сочинения*. – М.: Физматгиз, 1962.

> «Тело, более легкое, чем жидкость, будучи опущено в эту жидкость, погружается настолько, чтобы объем жидкости, соответствующий погруженной части тела, имел вес, равный весу всего тела».

8. Инерция математической формы

Об Архимеде и его конструктивном уме можно говорить долго. Но нам сейчас важно подчеркнуть роль геометрических пропорций для зарождающейся рациональной науки, в связи с чем обратимся к пятой книге «Начал» Евклида, которая, как мы уже сказали, была написана на основе математических изысканий Евдокса. В третьем определении, предваряющим эту книгу, говорится: «Отношение есть некоторая зависимость двух *однородных* величин». Это означает, что в отношении a/b, величины a и b должны быть одного типа, т.е. измеряться в одних и тех же величинах длины, площади или объема, а если бы это касалось физики, то и длительности, веса, степени нагрева и т.д. Это определение не является «мертвым», подобно определениям *точки* и *прямой*, о которых мы будем говорить ниже. Ограничение по «однородности величин», наложенное Евклидом и, быть может, при участии Евдокса, обернулось непреодолимым препятствием для физиков XVI–XVII столетий. Действительно, к этому времени в геометрии уже проводились сложные вычисления площадей и объемов геометрических фигур; зарождалось интегральное и дифференциальное исчисление; существовала вполне развитая алгебра, заимствованная у арабов; Декарт предложил мощный метод пространственных координат в рамках своей аналитической геометрии. Отчего же тогда так тяжело и медленно продвигались дела в области механики и физики вообще?

Оказывается, развитие математического аппарата сдерживалось как раз этим требованием однородности. Очень больших трудов стоило подобрать адекватную формулу для той или иной физической ситуации, где бы однородные величины выражались пропорцией вида $a/b = c/d$. Это невинное, на первый взгляд, евклидово ограничение, было не менее пагубным, чем ограничение Платона, который потребовал от астрономов своей Академии, чтобы те выражали все перемещения планет по ночному небосводу через равномерные движения по окружности. Кеплер освободился от предрассудка Платона, введя в 1610 году эллипс в качестве орбиты Марса. Однако он не смог избавиться от ограничений Евклида. Его законы были сформулированы в соответствии с требованием третьего определения пятой книги.

Так, второй закон Кеплер формулирует в виде пропорции: отношение двух времен τ_1 и τ_2, потребных для прохождения двух различных дуг орбиты планеты, равно отношению заметаемой радиусом орбиты соответствующих площадей σ_1 и σ_2, что отвечало пропорции: $\tau_1/\tau_2 = \sigma_1/\sigma_2$. Третий законы Кеплер выражался аналогичным образом: периоды планет относятся друг к другу точно так же, как полуторные степени радиусов их орбит:

$$T_1 : T_2 = R_1^{3/2} : R_2^{3/2}.$$

Окончательно установленные Галилеем кинематические отношения (над ними бились и средневековые математики) между временами, длинами пути, скоростями и ускорениями движущихся по наклонной плоскости тел, были представлены в форме прямых и обратных пропорциональных зависимостей.

Ученик Галилея Кастелли в 1628 году, изучая законы движения воды по трубам различного диаметра, установил, что отношения скоростей перемещения жидкости обратно пропорционально отношению площадей сечения труб, т.е. он описал свой закон всё той же пропорцией: $v_1/v_2 = S_2/S_1$.

Декарт считал, что отношение синусов угла падения (φ_1) и угла преломления (φ_2) световых лучей обратно пропорционально отношению скорости света в менее плотной среде (c_1) к скорости света в более плотной среде (c_2): $\sin\varphi_1/\sin\varphi_2 = c_1/c_2$. Ферма не согласился с Декартом и считал, что правильной формулой будет противоположная пропорция: $\sin\varphi_1/\sin\varphi_2 = c_2/c_1$. Ньютон согласился с Декартом, а Гюйгенс – с Ферма, однако много позже опыт Фуко показал, что Ферма и Гюйгенс были правы, т.е. скорость в более разряженной среде выше, а самой большой она будет в вакууме.

Гюйгенс много размышлял над вопросами центробежной силы и колебанием маятника. Сегодня формулы для центробежной силы (F), ускорения (a) и периода колебаний (T) выглядят следующим образом:

$$F = mv^2/r,\quad a = v^2/r,\quad T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

где m – масса, v – скорость движения, r – радиус кривизны, l – длина нити маятника, g – ускорение свободного падения. Любую неизвестную величину можно найти по известным, путем несложных манипуляций символами.

Но посмотрите, каким образом Гюйгенс выражает свои мысли. В трактате «О центробежной силе», написанном в 1659 году и опубликованном в 1703, он приводит 13 теорем. Первые четыре касались, фактически, выписанных здесь формул, которые, однако, представлялись им в виде знакомых нам пропорций:

1) если $T_1 = T_2$, то $a_1/a_2 = r_1/r_2$,

2) если $r_1 = r_2$, то $a_1/a_2 = v_1^2/v_2^2$,

3) если $v_1 = v_2$, то $a_1/a_2 = r_1/r_2$,

4) если $a_1 = a_2$, то $T_1/T_2 = \sqrt{r_1}/\sqrt{r_2}$.

Таким образом, с Античных времен до Нового времени включительно евклидовы «Начала» накладывали сильное ограничение на составление формул. Из этого проистекала та страшная беда, из-за которой физики не могли оформить математической формулой такое элементарное понятие, как *скорость*, хотя каждый человек прекрасно представлял, что это такое. Если первое тело двигалось в полтора раза быстрее второго, древние предпочитали говорить: при равных временах $t_1 = t_2$ первое тело пройдет большее расстояние, чем второе в отношении: $S_1/S_2 = 3/2$; или говорили: равные пути $S_1 = S_2$ первое тело пройдет за меньшее время, чем второе; это показывалось другим отношением: $t_1/t_2 = 2/3$. Составить же дробь S/t (*путь*/*время*) им не приходило в голову. При этом дроби 3/2 и 2/3 воспринимались как двухкомпонентные агрегаты, а не вещественные числа 1,5 и 0,66(6) в нашем понимании.

Разумеется, всякое явление имеет как дурную, так и хорошую сторону, и на первых порах пропорции сыграли важную положительную роль в физике, которую тяжело не признать. Так, три газовых закона, а именно:

закон Бойля–Мариотта: $p_1/p_2 = V_2/V_1$, $T = \text{const}$;

закон Шарля: $p_1/p_2 = T_1/T_2$, $V = \text{const}$;

закон Гей-Люссака: $T_1/T_2 = V_1/V_2$, $p = \text{const}$;

где p – *давление,* V – *объем,* T – *температура,* открыли молекулярную физику газовой фазы вещества. А *закон Паскаля*, т.е. способность жидкости передавать равные давления во все стороны, и связанные с этим *законы пресса* положили начало молекулярной физике жидкостной фазы вещества.

Под *прессом* здесь понимается гидравлический усилитель, состоящий из сообщающихся цилиндров различного диаметра, наполненных какой-либо жидкостью (чаще всего маслом или водой), и двух поршней, находящихся каждый в своем цилиндре. Законы пресса гласят: при одном и том же давлении на поршни ($p = const$) отношение сил (F), давящих на поршни, пропорционально отношению площадей (S) поперечного сечения сообщающихся цилиндров, т.е. $F_1/F_2 = S_1/S_2$, однако отношение этих сил обратно пропорционально перемещению (h) соответствующих поршней внутри цилиндра, т.е. $F_1/F_2 = h_2/h_1$.

За последней пропорцией узнается *архимедов закон рычага*: $F_1/F_2 = l_2/l_1$, где под l_1 и l_2 понимается длина плеч рычага. Действие же гидравлического усилителя связано с условием несжимаемости жидкости, т.е. $S_1h_1 = S_2h_2 = V = const$. Эти же законы лежат в основании работы *барометра* и других гидравлических устройств, где используется *трубка Торричелли* U-образной формы. Таким образом, законы прямой и обратной пропорциональности были важны для становления физики, но впоследствии эта математическая форма использовалась крайне редко и оказывала на развитие науки больше тормозящее, чем ускоряющее действие.

За третьим определением в пятой книге Евклида шло такое:

> «4. Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга».

Это означает, что отношение a/b, в котором $a < b$, можно с помощью целого числа n превратить в неравенство $na > b$, а если было $a > b$, то с помощью другого целого числа m изменить на неравенство $a < mb$.

Наиболее конструктивным было пятое определение, играющее важную роль для доказательства множества теорем:

> «5. Говорят, что величины находятся в том же отношении: первая ко второй и третья к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответствующем порядке».

Так, если имеет место равенство двух отношений $a/b = c/d$, причем $ma > nb$, $ma = nb$, $ma < nb$, то будет выполняться и $mc > nd$, $mc = nd$, $mc < nd$. Это положение, фактически, играет роль аксиомы, так как на ее основе затем доказываются немалое число теорем, в частности, теорема 4, которая гласит: если $a/b = c/d$, то $ma/nb = mc/nd$ ($a/b = c/d \Rightarrow ma/nb = mc/nd$).

Сформулируем еще ряд теорем в символьной форме, опирающихся на эту аксиому:

теоремы 7 и 9: $a = b \Leftrightarrow a/c = b/c$;
теорема 8 и 10: $a < b \Leftrightarrow a/c < b/c$; $a > b \Leftrightarrow > b/c$;
теорема 12: $a/b = c/d \Leftrightarrow a/b = c/d = (a + c)/(b + d)$;
теорема 13: $a/b = c/d, c/d > e/f \Rightarrow a/b > e/f$;
теорема 15: $a/b \Rightarrow na/nb$;
теорема 16: $a/b = c/d \Rightarrow a/c = b/d$;
теорема 22: $a/b = c/e, b/c = e/f \Rightarrow a/c = d/f$.

Эти достаточно тривиальные теоремы очень полюбились схоластам. Они увеличили число пропорций и дали им специальные латинские наименования.

$a/b = c/d$ – *permutando* или *alternando,*
$b/a = d/c$ – *invertendo,*
$(a + b)/b = (c + d)/d$ – *componendo,*
$(a – b)/b = (c – d)/d$ – *dividendo* или *divisim,*
$a/(a + b) = c/(c + d)$ – *convertendo,*
$(a + b)/(a – b) = (c + d)/(c – d)$ – *mixtim* и т.д.

Известный английский математик Джон Валлис (Уоллис) в своей «Алгебре» 1685 года довел число производных пропорций до 52. К этим пропорциям часто прибегал и Ньютон при доказательствах физических теорем в «Математических началах натуральной философии».

Пропорция, как устойчивый стереотип конструктивного мышления, очень долго сохранялась в математике. Достаточно сказать, что понятие квадратного корня из числа a вошло в европейскую математику через определение Декарта, который дал его с помощью пропорции $1 : x = x : a$, отсюда $x = \sqrt{a}$. Аналогичным образом он определял корень n-ой степени из a:

$$1 : x_1 = x_1 : x_2 = x_2 : x_3 = \ldots = x_{n-1} : a;$$

$$\text{отсюда } x_1 = \sqrt{x_2} = \sqrt[3]{x_3} = \ldots = \sqrt[n]{a}.$$

Потом Ньютон, не ссылаясь уже на французского математика, определил извлечение корней точно таким же способом. После него во всей Европе понятие *среднего пропорционального* стали тесно увязывать с радикалами. Напомним, однако, что знаменитую задачу удвоения объема куба Гиппократ Хиосский (V в. до Р.Х.) сводил к построению двух средних пропорциональных: $a : x = x : y = y : b$. Если по условию задачи требовалось выполнить равенство $b = 2a$, то это приводило к извлечению кубического корня из 2, так как $x^3 = 2a^3$ и $x = a\sqrt[3]{2}$.

Огромная масса задач, перешедшая к европейцам от арабов, формулировалась в традициях пропорций, заложенных еще Евдоксом. Эти задачи приводили к уравнениям второй, третьей и четвертой степени, решением которых в основном и были заняты математики-конструктивисты Нового времени.

Например, знаменитый арабский математик аль-Хорезми (787–850) решал задачу, по условию которой требовалось разделить число 10 на два слагаемых x и $10 – x$ так, чтобы выполнялось условие

$$x : (10 – x) = (10 – x) : x = \sqrt{5},$$

что приводило к квадратному уравнению

$$(2 + \sqrt{5})x^2 + 100 = (20 + \sqrt{500})x$$

с корнем, равным $x = 5 - \sqrt{225 - \sqrt{50000}}$.

Европейские же математики (Кардано и его современники) решали задачу, которая формулировалась следующим образом: «Разделить число 10 на три части так, чтобы они составляли геометрическую прогрессию, причем произведение первых двух частей равнялось 6». Это условие задачи приводило к пропорции вида:

$$\frac{6}{x} : x = x : \frac{x^3}{6}$$

или к уравнению четвертой степени:

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x.$$

Но самой популярной пропорцией, пришедшей из Античного времени в Новое, была, конечно, *гармоническая пропорция*, названная Леонардо да Винчи *золотым сечением*. Она возникала путем деления отрезка a (пусть $a = 1$) так, чтобы его большая часть (x) была средней пропорциональной между длиной всего отрезка и его меньшей части, т.е.

$$1 : x = x : (1 - x).$$

Эта пропорция сводится к квадратному уравнению

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

имеющему положительное решение, равное

$$x = 0{,}61803398874...$$

Отношение длины всего отрезка к длине его большей части, равное отношению большей части к меньшей, равно также сумме длин всего отрезка и его большей части:

$$y = 1/x = x/(1 - x) = 1 + x = 1{,}61803398874...,$$

а отношение длины всего отрезка к длине его меньшей части равно удвоенной длине всего отрезка плюс длина его большей части:

$$z = 1/(1 - x) = 1 + (1 + x) = 2{,}61803398874...$$

Гармоническая пропорция означает также, что $x(1 + x) = 1$ или $x = 1/(1 + x)$. Многократная подстановка x в последнее выражение порождает бесконечную цепную дробь следующего вида:

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}};$$

ее приближения $x \approx \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \approx 0{,}619$.

Числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... называются *числами Фибоначчи* (φ_n). Они обладают следующими замечательными свойствами: каждое последующее число в ряду получается как сумма двух предыдущих, т.е.

$$\varphi_{n+1} = \varphi_{n-1} + \varphi_n.$$

Отсюда выводится формула Кассини для квадратов чисел Фибоначчи:

$$\varphi^2_n = \varphi_{n-1} \cdot \varphi_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

Например, при $\varphi_3 = 2$, $\varphi_4 = 3$, $\varphi_5 = 5$ получаем: $9 = 10 - 1$.

В числовом ряду Фибоначчи выявляются и другие красивые закономерности, в частности:

$$\varphi_{2n} = \varphi_n \cdot (\varphi_{n-1} + \varphi_{n+1}),$$
$$\varphi_{3n} = \varphi^3_{n+1} + \varphi^3_n - \varphi^3_{n-1};$$

так, при $\varphi_2 = 1$, $\varphi_3 = 2$, $\varphi_4 = 3$, $\varphi_5 = 5$,

имеем $\varphi_{2 \cdot 4} = \varphi_8 = 21$ и $\varphi_{3 \cdot 3} = \varphi_9 = 34$.

Если воспользоваться обозначением предела:

$$y = \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398874\ldots,$$

то справедливо выражение:

$$y^n = y^{n-1} + y^{n-2}.$$

Например, при $n = 4$ имеем:

$$6{,}8541019662\ldots = 4{,}2360679774\ldots + 2{,}6180339887\ldots$$

при $n = 5$:

11,0901699437… = 6,8541019662… + 4,2360679774…и т.д.

Кроме того, верны две бесконечные цепочки равенств:

$$y = \sqrt{1-y} = \sqrt{1+\sqrt{1+y}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+y}}} \ldots,$$

$$y = 1+\frac{1}{y} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{y}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{y}}} \ldots,$$

а также две формулы Бине:

для четных $n = 2k$: $\frac{y^n - y^{-n}}{\sqrt{5}} = \varphi_n$, и

нечетных $n = 2k + 1$: $\frac{y^n + y^{-n}}{\sqrt{5}} = \varphi_n$.

Другая пара формул задает числа Люка l:

для четных $n = 2k$: $l_+ = y^n + y^{-n}$ и

нечетных $n = 2k + 1$: $l_- = y^n - y^{-n}$,

которые дают следующий ряд Люка:

$l = \{1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \ldots\}$.

Получается, что каждое целое число l можно разложить на пару иррациональных чисел – факт весьма нетривиальный для теории чисел. Можно ставить вопрос в *логической* плоскости: *существует ли разложение целого числа на сумму двух иррациональных*? Далее соответствующими *формальными* средствами искать ответ на него. А можно искать это разложение в *конкретных числах*, в частности, так:

$n = 1$: $l_- = 1$ = 1,6180339887… – 0,6180339887…
$n = 2$: $l_+ = 3$ = 2,6180339887… + 0,3819660112…
$n = 3$: $l_- = 4$ = 4,2360679774… – 0,2360679774…
$n = 4$: $l_+ = 7$ = 6,8541019662… + 0,1458980337…
$n = 5$: $l_- = 11$ = 11,0901699437… – 0,0901699437…
… … … … … … … … … … … … … … … … … …

Этот второй путь скорее всего выберет *конструктивист*: тем самым он решит не только формальную задачу на *существование*, но и даст *алгоритм* нахождения нужного разложения.

Итак, однажды возникшая конструктивная форма, принесшая на первых порах немалую выгоду для науки, затем начинает играть заметно негативную роль и активно мешать нормальному развитию знаний. Отрицательное влияние закона пропорции сказалось на становлении механического понятия скорости материальных тел и на открытии многих доступных законов физики. Пагубность данной математической формы проистекала не из ее самой, а из формального предписания, которое вошло в первый учебник геометрии как обязательная норма. Подобные вредные принципы часто навязываются «началами» школьного всеобуча, которые затем бесцеремонно внедряются в изначально свободную интеллектуальную сферу и регламентируют ее.

9. Математика древних

Важную роль в распространении математических знаний сыграли греческие первоисточники, в частности, «Начала» Евклида, которые переводилась на языки европейских народов, почти вслед за Библией. Именно благодаря этой книге через посредничество арабов возникла современная наука. Правда, существует мнение, что главный центр математических исследований после увядания эллинской культуры переместился не к арабам, а к индийцам, которые имели свою систему счисления, ввели отрицательное число и ноль, внедрили некоторые методические новшества. И только после брожения в течение двух–трех веков математикой заинтересовались арабы.

Естественно, возникает вопрос: могла бы та же рациональная наука возникнуть в Европе без задела греческих математиков? Сейчас, по-видимому, сложно ответить однозначно, распространялись ли знания по типу цепной реакции или же они возникали в основных центрах цивилизации – Китае, Индии, Египте, Вавилоне и Греции.[12] До каких-то истин люди доходили, безусловно, самостоятельно (по аналогии с религией: идеями Бога, рая, ада, нечистой силы и т.д.), а какие-то знания заимствовали у своих соседей (если опять же говорить о религии, это в первую очередь специфические обряды и культы, такие, например, как крестное знамение). То, что первобытные народы способны без посторонней помощи, практически из ничего создать сложные вычислительные алгоритмы, демонстрируют различия в процедурах умножения и деления больших чисел.

Наиболее употребительной операцией было умножение или деление на 2. Именно поэтому, видимо, в Египте установилась бинарная форма арифметического счета, которая сегодня у нас используется в компьютерах. Например, необходимо было умножить 37 на 46. Древнеегипетский математик поступал следующим образом: он составлял ряд степеней двойки и против каждого элемента этого ряда записывал второй сомножитель, предварительно перемножив его на элемент первого ряда. Затем он из первого ряда выбирал те степени числа 2, которые в сумме давали 37, а из второго ряда соответствующие числа давали в сумме искомое произведение (табл. 2)

Таблица 2

1	2	**4**	8	16	**32**
46	92	**184**	368	736	**1472**

$$37 \cdot 46 = 1702,\ 1 + 4 + 32 = 37,\ 46 + 184 + 1472 = 1702.$$

Процедура деления чисел осуществлялась аналогично. Покажем на числах, что нужно было сделать, чтобы разделить 153 на 17 (табл. 3).

Таблица 3

1	2	4	**8**
17	34	68	**136**

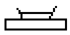
$$153 : 17 = 9,\ 17 + 136 = 153,\ 1 + 8 = 9.$$

Задача 32 папируса Ринда демонстрирует алгоритм возведения в квадрат числа 12. Алгоритм оформлен в виде табл. 4, в левой части которой он представлен на языке древнеегипетских иероглифов, в правой записан современными цифрами. Древнеегипетские иероглифы читаются справа налево, причем символ I означает единицу, ∩ – 10, ς – 100; результат изображался в виде свернутого папируса с печатью наверху. Правая часть таблицы является зеркальным отображением левой с той только разницей, что все числа записаны в современном виде. Первый множитель составлялся из определенного набора степеней 2; в данном случае $12 = 4 + 8 = 2^2 + 2^3$ (цифры 4 и 8 писец отмечал штрихом). Второй столбец чисел начинался со значения второго множителя, который у нас равен тоже 12. Последующие числа получаются путем удвоения предыдущих. Результат находится как сумма чисел второго столбца, взятых из отмеченных штрихом строк: 144 = 48 + 96.

Таблица 4

2000 лет до Р.Х.		**2000 лет после Р.Х.**	
I I ∩	I	1	12
I I I I ∩ ∩	I I	2	24
I I I I ∩ ∩ I I I I ∩ ∩	I I I I '	4'	48

[12] **В.Э.:** Странный, нехронологический порядок перечисления; хронолонический будет таким: Египет, Вавилония, Греция, Индия, Китай (возможно с перестановкой местами: Шумер – Египет, Китай – Индия). Но Греция посередине; греческая цивилизация более древняя, чем индийская и китайская.

I I I ∩ ∩ ∩ ∩ I I I ∩ ∩ ∩ ∩	I I I I ' I I I I	8'	96
		*Результат*	
I I I I ∩ ∩ ∩ ∩ ς		144	

Теперь перенесемся в Китай и посмотрим, как там производилось умножение и деление, для чего ниже мы разберем два примера.

Пусть требуется перемножить число 275 на 34; составлялась табл. 5. Промежуточные и конечный результаты счета заносятся в среднюю строку, расположенную между строками двух сомножителей; умножение начинается с высших порядков: сотен – 2, затем десятков – 7 и, наконец, единиц – 5; использованные порядки отбрасываются; конечный результат (9350) получается на шаге VI; в последней графе приведены действия, которые необходимо было произвести в уме.

Таблица 5

I	II	III	IV	V	VI	Действия в уме
275	75	75	5	5		68 = 34 · 2, 89 = 68 + 3 · 7
68	68	89	918	933	**9350**	918 = 890 + 4 · 7, 933 = 918 + 3 · 5
34	34	34	34	34		9350 = 9330 + 4 · 5

Деление (8892 : 26 = 342) показано в табл. 6.

Таблица 6

I	II	III	IV	V	Действия в уме
3	3	34	342		2892 = 8892 – 2 · 3 · 1000,
8892	2892	**1092**	52	**342**	1092 = 2892 – 6 · 3 · 100,
26	26	26	26		52 = 1092 – 4 · 26 · 10

В других странах с доисторических времен существовали другие алгоритмы, по которым производились арифметические действия. В Индии, например, составлялись и заучивались наизусть специальные числовые таблицы умножения, возведения во вторую и третью степени (соответственно, извлечение квадратных и кубических корней), в которых порядок чисел измерялся сотнями тысяч. Всё это говорит о том, что люди начинали конструктивно думать, не дожидаясь пока их кто-нибудь этому обучит. До нас дошли тысячи глиняных табличек с вавилонской клинописью, где приведены сложнейшие задачи практического содержания, причем с ними работали отнюдь не избранные ученые, а рядовые школьники в самом массовом порядке.

Общим местом стало утверждение, что Древняя Греция является родиной формально-логического подхода к геометрии. Однако бытует мнение, что во второй книге «Начал» Евклида приведен формализованный перечень математических (как арифметических, так и геометрических) правил, которыми «по умолчанию» с давних времен пользовались вавилоняне. Приведем и мы этот перечень из десяти предложений, которые записаны в стилизованном виде [11,[13] с. 131–132]:

1) если $a = a_1 + a_2 + ... + a_n$, то $ab = a_1b + a_2b + ... + a_nb$;
2) если $a = b + c$, то $a^2 = ab + ac$;
3) если $a = b + c$, то $ad = bd + cd$;
4) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$;
5) $(a – b)b + (b – a/2)^2 = a^2/4$;
6) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + (2a + b)b$;
7) если $c = a + b$, то $a^2 = b^2 + c^2 – 2bc$;
8) $(a + 2b)^2 = a^2 + 4(a + b)b$;
9) $[(a + b)^2/2 + (a – b)^2/2] = (a^2 + b^2)/2$;

[13] Евклид. *Начала*. – Киев, 1880.

10) $(a + b)^2 + b^2 = 2(a/2)\ 2 + 2(a/2 + \mathrm{b})^2$.

Первое предложение Евклидом формулируется при помощи площадей прямоугольников: прямоугольник $BH = ab$ равен сумме прямоугольников $BK = a_1b$, $DL = a_2b$, $EH = a_3b$ (рис. 1а). Всякий здравомыслящий человек, в том числе и древний вавилонянин, посчитает бессмысленным тратить время на вычерчивание рисунка и выписывание символов для предложения, которое и без того всем очевидно. Греки же страдали какой-то прямо-таки патологической формой графомании. Всякий, бросивший мельком взгляд на рис. 1б, поймет справедливость предложения 4 (на нашем рисунке малый и большой квадраты, а также прямоугольники мы еще обозначили величинами a^2, b^2, ab и ba, из которых моментально вытекает формула разложения квадрата суммы двух величин).

Но как поступает Евклид? Он пускается в нудное пережевывание самых тривиальных предложений. Чтобы читатель почувствовал всю эту схоластику и скуку, которые потом захлестнули Европу и держали ее полторы тысячи лет в дремоте, мы приведем целиком евклидово доказательство предложения 4:

> «Если прямую *AB* в точке *C* разделить на какие-нибудь две части *AC* и *CB*, то квадрат, построенный на *AB*, равен сумме квадратов, построенных на отрезках *AC* и *CB* с удвоенным прямоугольником, заключенным между отрезками *AC* и *CB* [рис. 1б]. Так как *CF* параллельно *BE*, то угол *AGC* равен *AEB* (I.29). Но *AB* равно *BE* (I.5), следовательно, углы *AEB, EAB* и *AGC* равны между собой, откуда (I.6) *AC* равно *CG*. Кроме того, *AC* и *CG* равны противоположным сторонам *GH* и *AH* (I.34), следовательно, *CH* есть равносторонний четырехугольник. Так как *CF* параллельно *HA*, то (I.29) сумма углов *HAC* и *GCA* равна 2d. Но угол *HAC* – прямой, следовательно, и угол *GCA* тоже прямой, оба эти угла равны противоположным углам *HGC* и *AHG* (I.34). Из этого видно, что *CH* есть равносторонний прямоугольник, следовательно, он является квадратом. Точно так же легко показать, что *FK* есть квадрат, сторона которого *KG* равна *BC*. Прямоугольник *BG* равен произведению сторон *BC* на *CG* или *AC* на *BC*, точно так же прямоугольник *GD* равен произведению *AC* на *BC*, но прямоугольник *BG* равен прямоугольнику *GD* (I.43), следовательно, сумма прямоугольника *BG* и прямоугольника *GD* равна удвоенному произведению *AC* на *BC*. Откуда прямоугольник *ABED* равен квадрату *AB*, а он равен сумме квадрата *AC*, квадрата *BC* и удвоенного квадрата *AC* на *BC*» [11, с. 128].

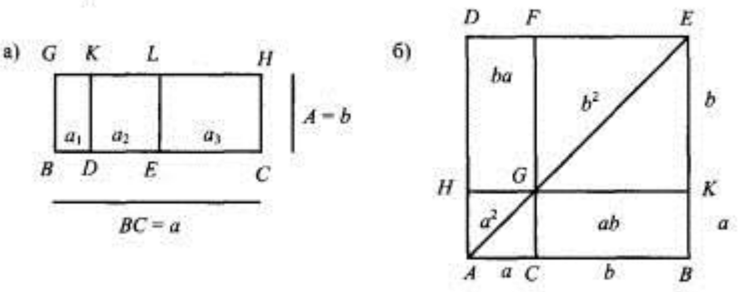


Рис. 1

Широко распространенное мнение о том, что аристотелевская (а до него элейская) логика способствовали возникновению и развитию естествознания, на наш взгляд, является глубоко ошибочным. Логика может только сдерживать математические и естественные науки, основывающиеся на представлениях. Она создает ложное впечатления строгой науки, в действительности же в ее многословии легко утонуть, что, собственно, и произошло спустя два–три столетия после Аристотеля. Взгляните на рис. 2а; древнеиндийский математик Бхаскара вычерчивал данный чертеж и говорил своим ученикам единственное слово: «Смотрите!» Кто не смог увидеть в нем формулы $c^2 = a^2 + b^2$, тот должен был заняться разведением кур или строительством домов, но только не математикой – туда для него путь был закрыт навсегда. Древнекитайский математик также рисовал рис. 2б (он есть в «Трактате о чжоу-би» Чжан Цзюньциня, II или III век) и, быть может, лишь из педагогических соображений, для нерадивых учеников выписывал формулу: $c^2 = 4(ab/2) + (a - b)^2 = a^2 + b^2$ (этой формуле удовлетворяет и рис. 2а)[14]. Вавилонские или египетские математики, возможно, держали перед глазами другой чертеж,

[14] **В.Э.:** Олег, ну это же чушь! На рисунках 2*а* и 2*б* просто вообще отсутствует полный комплект тех объектов, о которых говорится в теореме (три квадрата), и формулу $c^2 = a^2 + b^2$ можно получить только

например тот, что состоял из двух квадратов, показанных на рис. 2в и рис. 2г. Квадраты прямо говорят о справедливости теоремы Пифагора, без всяких манипуляций символами.

А теперь полюбуйтесь, какой чертеж (рис. 2д) и какое доказательство сочинил Евклид.

> «Во всяком прямоугольном треугольнике, – пишет он в Предложение 47 своей первой книги «Начал», – квадрат, построенный на стороне, противолежащей прямому углу (на гипотенузе), равен сумме квадратов, построенных на сторонах, заключающих прямой угол (на катетах). В самом деле, угол *A* – прямой, прямыми являются углы *BAC*, *BAG*, *HAC*, следовательно, прямые *AC* и *AG*, *BA* и *AH* находятся: первые две – на одной прямой *CG*, а вторые две – на прямой *BH*. Проведем *AL* параллельно *BD*. Так как угол *DBC* равен углу *FBC* (аксиома 10)[15], то, прибавляя к обеим частям по углу *CBA*, получим угол *DBA*, равный углу *FBC* (аксиома 2). Но *AB* равно *BF*, *BC* равно *BD*, следовательно, треугольник *ABD* равен треугольнику *FBC* (предложение 4). Заметив теперь, что *BD* параллельна *AL* и *BF* параллельна *GC*, имеем: четырехугольник *BL* равен двум треугольникам *ABD* и четырехугольник *GB* равен двум треугольникам *FBC* (предложение 41). Но треугольник *ABD* равен треугольнику *FBC*, следовательно, четырехугольник *BL* равен квадрату *BG* (аксиома 6). Точно так же можно показать, что четырехугольник *LC* равен квадрату *CH*. Откуда (аксиома 2): квадрат *BC* равен сумме квадратов *AB* и *AC*».

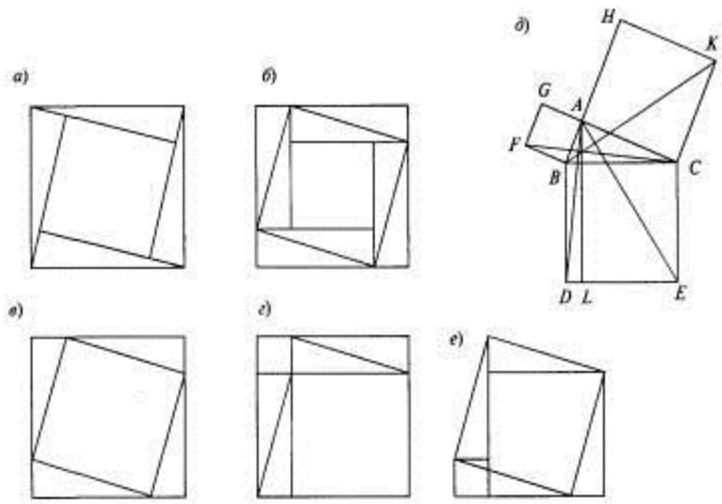


Рис. 2

Это доказательство, хотя и проведено логически верно, имеет, однако, низкую эвристическую ценность, так как при таком проведении вспомогательных линий (*AD*, *AE*, *BK* и *CF*) учащийся не мог представить себе, почему же сумма двух меньших квадратов должна быть равна третьему, большему квадрату.[16] Нерациональное евклидово доказательство теоремы Пифагора комментаторы тут же исправляли: вслед за рис. 2д сразу же в примечании шел, к примеру, рис. 2е, сопровождающийся соответствующими выкладками, но и они были излишни. Никакой «математической культуры» (на это часто ссылаются) цепочка из символов не несет. С точки зрения педагогики, лучшей подсказкой для учащихся здесь будет рекомендация по вырезанию из бумаги соответствующих кусков и укладка их на плоскости чертежа. В общем, геометрия не нуждается в логике и, если она туда попала, то только для схоластических, а не эвристических целей, т.е. для целей школьного образования в самых его ретроградных формах.

привлекая вычисления площадей (что Евклид намеренно не хотел делать). Пара рисунков 2*в* и 2*г*, взятые вместе, доказательство без вычислений дают – перемещением фигур, – но рассуждения, если их записывать, будут не менее сложными, чем у Евклида. Вообще рисунок Евклида – единственный, на котором просто-напросто изображены начальные условия утверждения (а не эти условия просто подразумеваются по умолчанию, как в остальных рисунках – если вообще считать, что на тех рисунках изображена теорема Пифагора). Кто отвергает Евклида, тот утверждает: «не надо изображать начальные условия теоремы, ученик сам должен их увидеть» и/или «не надо записывать рассуждения, ученик сам должен догадаться». Но у Евклида были другие цели: как раз изобразить и записать (для учеников). Личностные свойства, которые мы здесь видим у Евклида – это: добросовестность, основательность и аккуратность.

[15] **В.Э.:** Ссылки на аксиомы не принадлежат Евклиду, они вставлены современными издателями и комментаторами, которые старались изобразить дело так, будто Евклид применял аксиоматический метод.

[16] **В.Э.:** А для этого теперь можно рассматривать другие рисунки.

На примере этой теоремы отчетливо видно, как простота и рациональность могут быть принесены в жертву фальшивому мудрствованию. Сначала подобные доказательства были выдвинуты софистами нарочно, чтобы сбить спесь с «умников» и набить себе цену в глазах родителей. Но потом этот формализм лег в основу школьного и университетского образования, где во многом указанная мотивировка сохранилась. Раньше астрология, возникнув внутри астрономии, погубила точные науки вавилонян, теперь софистская логика, паразитирующая на геометрии и арифметике, погубила точные науки эллинов.

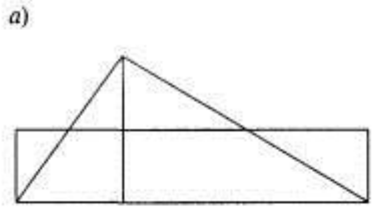
Когда произносят панегирики Евклиду, вспоминаются слова Артура Шопенгауэра из его известного сочинения, из первой книги «Мир как представление», где он говорит:

> «Часто, как это сделано в теореме Пифагора, проводятся линии, неизвестно для чего; впоследствии оказывается, что это были сети, которые неожиданно затягиваются и ловят согласие учащегося, вынужденного, к своему удивлению, признать то, что по своей внутренней связи остается ему совершенно непонятным – до такой степени, что он может проштудировать всего Евклида, не достигнув действительного понимания законов пространственных отношений и вместо этого заучивает наизусть лишь несколько выводов из них» [12,[17] с. 204–205].

Немецкий философ прекрасно понимал преимущества представления перед понятиями и, особенно, преимущества зрительного образа перед схоластическими выкладками в духе Аристотеля. Шопенгауэр во многом ошибался, но отрицательную роль логики в деле познания он оценивал правильно.

> «... Логические методы Евклида в математике, – пишет он чуть ниже, – являются ненужной предосторожностью, костылем при здоровых ногах, кто следует этим методам, подобен путнику, который, приняв ночью светлый, твердый путь за воду, остерегается ступить на него и идет всё время рядом по ухабам...» [12, с. 206].

Отчего не доверять своим глазам, почему нужно исписать страницы путаного и занудного текста, чтобы читающий не смотрел пристально на чертеж, а без конца прыгал глазами туда-сюда, от чертежа к тексту и, в конце концов, сдавшись на пытки автора, прекратил чтение.[18]



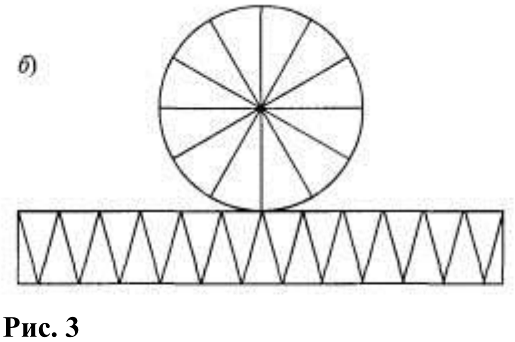


Рис. 3

Взгляните на рис. 3а, он доказывает, что площадь треугольника равна площади прямоугольника, т.е. произведению основания a на половину высоты h ($S = ah/2$).[19] Теперь взгляните на рис. 3б, он тоже самым непосредственным образом доказывает, что площадь круга равна половине прямоугольника, т.е. половине от произведения длины окружности $l = 2\pi r$ на радиус r ($S = lr/2 = \pi r^2$): чем больше число секторов, тем точнее формула – разве это интуитивно не ясно? К чему буквы и словеса – чтобы прикрыть слишком откровенную наготу истины или чтобы предать простым вещам наукообразный вид? Эти рисунки приводились в древнеиндийских учебниках по математике без всяких комментариев. Подсказки, наводящие вопросы

[17] Шопенгауэр А. *Мир как воля и представление*. Т.1. – М., 1993.

[18] **В.Э.:** Но без этой записи 99 % учеников просто вообще не будут смотреть ни на какой рисунок, или глянут и отвернутся, потому что никаких мыслей у них не возникнет. Для того и записывается ход рассуждений, чтобы его мог пройти такой ученик, который сам не может до этого додуматься.

[19] **В.Э.:** Нет, не доказывает. Сначала надо убедиться, что соответствующие треугольники равны. А так, по рисунку – иди, знай, равны они или нет? На каком-нибудь другом рисунке тоже мне какие-то треугольники покажутся «на глаз» равными, и я приму это за «доказательство», а на самом деле окажется, что они не равны.

иногда нужны, когда имеешь дело со сложными формами или объемными фигурами, но не в случае с теоремой Пифагора или, как в данном случае, с площадью плоских фигур. Здесь логика пусть отдыхает – не ее это дело, улавливать площади геометрических фигур, это дело только воображения, которое не нуждается в символах.

Считается, что «Начала» Евклида являются и *началом* греческой математики. Но сугубо формально-логический характер содержания этой книги говорит нам скорее о *закате* конструктивного знания. Эллины переняли у более древних народов уже готовые результаты и облекли их в схоластическую форму. В том виде, в котором геометрия представлена в учебнике Евклида, она никогда бы не возникла самостоятельно. Именно из-за своей крайней спекулятивности «Начала» были с готовностью приняты средневековыми университетами. Схоласты передавали из поколения в поколения мертвые знания, которые, как и библейские сказания, не имели отношения к рациональной науке, зато они выполняли важный социально-идеологический заказ по манипуляции сознанием наиболее интеллектуальной части общества.

Чтобы почувствовать разницу между формальным методом и конструктивным, давайте проанализируем еще один широко распространенный математический метод. Имеется в виду *метод ложного положения*, которым владели практически все древние народы – индийцы, арабы, вавилоняне и даже европейцы Средневековой эпохи. Не надо думать, что его передавали, как эстафету, из рук в руки одни древние народы другим. Доказательством тому служат некоторые задачи из египетских папирусов типа «аха», которые появились задолго до появления вавилонских табличек и вряд ли могли попасть в Месопотамию.

Слово «аха» можно перевести как «куча» или «множество», т.е. то неизвестное количество, которое необходимо найти и которое мы, люди начала третьего тысячелетия, обозначаем как x. Вот, например, как выглядят условие и решение задачи 26 ранее упомянутого древнеегипетского папируса Ринда: «Аха и ее четвертая часть вместе дают 15». Древнеегипетский писец предлагал алгоритм нахождения «аха»: «Считай с 4; от них ты должен взять четверть, а именно – 1; вместе – 5». Затем нужно было произвести еще два действия: деление – 15/5 = 3 и умножение – $3 \cdot 4 = 12$. Таким образом, находилась неизвестная «аха»: $x = 12$.

Сегодня бы эту задачу мы решали путем составления уравнения и решения его относительно неизвестного x:

$$x + (1/4) \cdot x = (5/4) \cdot x = 15,\ x = (15/5) \cdot 4 = 12.$$

Древний египтянин же использовал, как мы сказали, метод ложного положения. В нем положение x занимает некоторое число 4, от которого легко подсчитывается четвертая часть. Вместо 4, можно было бы взять, скажем, 8. Тогда четвертая часть равнялась бы 2, что в сумме с 8 давало бы 10. Но результат, предложенный данным алгоритмом, окажется тем же, т.е. $x = (15/10) \cdot 8 = 12$.

Приведем задачу из Московского папируса, который так же, как и папирус Ринда, написан в эпоху Среднего царства, но в котором число задач в четыре раза меньше, чем в папирусе, хранящемся в Лондоне, т.е. свыше 20 штук. Кстати, размеры папирусов также отличаются примерно в 4 раза: папирус Ринда имеет площадь $525 \cdot 33$ см^2, а Московский – $544 \cdot 8$ см^2.

Итак, задача 19 из папируса, находящегося в Пушкинском музее в Москве, формулируется так:

> «1 плюс 1/2 аха вместе с 4 дают 10. Что есть аха? Подсчитай число, на которое 10 превышает 4. Получишь 6. Сколько раз надо взять 1 + 1/2, чтобы получить 1? Это число равно 2/3. Возьми 2/3 от 6. Получишь 4. Ответ найден верно».

В данном случае древнеегипетский математик решал уравнение $x + (1/2) \cdot x + 4 = 10$ примерно так же, как это сделали бы мы сегодня, т.е. без всякого «ложного положения»:

$$(3/2) \cdot x = 10 - 4 = 6,\ x = 6 \cdot (2/3) = 4.$$

Наш соотечественник, видный историк науки С.Я. Лурье в комментариях к лекциям известного исследователя и историка науки Отто Нейгебауера о задаче рассматриваемого здесь типа писал следующее:

> «... Если решить эту задачу тем арифметическим способом, который широко применялся в индийской и арабской математике и который, скорее всего, восходит к Вавилону, именно методом

ложного предположения, то каждое из действий, применяемых в тексте, получит свой смысл и не окажется никакой нужды в нынешней алгебре» [13,[20] с. 205].

Действительно, метод ложного положения или, как сказал Лурье, метод ложного предположения – это мощный конструктивный прием. Однако сразу же отметим, что он не может служить альтернативой геометрическим методам и не в состоянии объяснить многие формулы, которыми пользовались древние математики. Что же касается передачи этого метода от вавилонян к индийским и арабским математикам, то в это верится с трудом. Клинопись вавилонян была забыта вместе с закатом их древней цивилизации. Археологические находки в виде глиняных табличек были обнаружены и расшифрованы сравнительно недавно. Нет никаких свидетельств тому, что арабы и индийцы могли читать вавилонскую клинопись. Арабская индийская и вавилонская культуры – это три абсолютно не пересекающихся сферы, разнесенные на многие века во времени. Между тем не такой уж это хитрый интеллектуальный ход, чтобы индийцы и арабы не могли догадаться до метода ложного положения самостоятельно.[21]

В Древнем Египте средства письма и само письмо еще не были достаточно развитыми, поэтому условия задач и алгоритм их решения имели исключительно лаконичную форму. Многие знания передавались из «уст в уши» без какой-либо записи на материальных носителях. Если последние и использовались, то только для фиксации трудно запоминаемой информации, как в случае с каноническим разложением дробей вида $2/n$. Это говорится к тому, что в папирусе Ринда есть иероглифические тексты, которые трудно назвать условием и алгоритмом решения какой-либо задачи. Непосвященному, действительно, сложно было догадаться, о чем, собственно, идет речь. Ниже приводится одна из таких задач. Непосредственная расшифровка ее нескольких иероглифов дала следующий набор слов и чисел: «Лестница, дом – 7, кошка – 49, мышь – 343, колос – 2401, зерно – 16807, один – 2801, два – 5602, четыре – 11204, вместе – 19607».

Исходя из чисел, сразу становится понятным, что данная задача касается суммы пяти членов геометрической прогрессии: $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 19607$. Египетский жрец геометрическую прогрессию обозначил иероглифом «лестница». Устный текст для этой задачи мог бы звучать приблизительно так: «Представьте себе улицу, где стоят семь домов. В каждом доме проживает по семь кошек. Каждая кошка съедает по семь мышей. Каждая мышь съедает по семь колосков. На каждом колоске находится по семь зерен. Требуется определить размер ахи». В папирусе приводятся все пять степеней семерки, три промежуточных и одна окончательная суммы. Посвященный в тайны арифметического счета должен был уметь составлять таблицы типа табл. 7, в которой всё хорошо видно без всяких пояснений.

Таблица 7

1	7	49	343	2401	**2801**
2	14	98	686	4802	**5602**
4	28	196	1372	9604	**11204**
7	**49**	**343**	**2401**	**16807**	**19607**

Выделенные числа фигурировали в тексте задачи, невыделенные числа учащийся должен был уметь воспроизвести самостоятельно. В последней строке табл. 7 приведены степени числа 7, а в последнем столбце – промежуточные и окончательные суммы. Используемый древним математиком алгоритм счета, очевидно, тот же самый, что и в рассмотренной задаче 32, т.е. бинарный.

[20] Нейгебауер О. *Лекции по истории античных математических наук*. Т.1 – М.–Л., 1937.

[21] **В.Э.:** Могли и самостоятельно доходить, но преемственность названных культур имела место. Арабы вышли на мировую сцену после того, как они за очень короткое время разбили одну за другой две тогдашних мировых державы – Персию и Византию –, которые в тот момент были истощены взаимной войной. Захватив громадные их территории, арабы подчинили себе местное население и присвоили-усвоили их культурные достижения. Миллионы греков были в их власти, и вся бывшая Вавилония. Связь Хараппской цивилизации (в долине Инда) с Месопотамией не столь отчетливо видна и общепризнана, но всё указывает на то, что она была основана колонистами из Двуречья (города сразу строились по единому плану с размахом, а не вырастали постепенно и т.д.). Гипотеза о том, что Мохенджо-Даро создали дравиды, не выдерживает никакой критики и представляет собой плод наиболее примитивного хода мыслей: «Раз в Индии, значит, дравиды».

Но вот совпадение: в «Книге абака» средневекового математика Леонарда Пизанского (XII–XIII вв.), т.е. небезызвестного нам Фибоначчи, имеется «задача о 7 старухах, направляющихся в Рим, у каждой из которых по 7 мулов, на каждом из которых по 7 мешков, в каждом из которых по 7 хлебов, при каждом из которых по 7 ножей, каждый из которых в 7 ножнах».

Если в древнеегипетском папирусе суммируется пять степеней семерки, у Леонарда Пизанского – шесть, то в рукописях древней Руси встречается задача на суммирование уже семи степеней семерки; вот ее содержание: «Идет семь баб, у каждой бабы по семи посохов, на каждом посохе по семи сучков, на каждом сучке по семи кошелей, в каждом кошеле по семи пирогов, в каждом пироге по семи воробьев, во всяком воробье по семи пупков».

Надо ли говорить, что мы имеем дело со случайным совпадением задач на базе числа 7. Если бы какому-нибудь автору понадобилась задача на прогрессию, причем именно на базе числа 7, он вряд ли бы стал подменять содержание исходного текста. Нет никакого сомнения, что все три приведенные здесь задачи возникли независимо друг от друга. Эти задачи на числовые ряды умели решать во всех центрах цивилизации.

Приведем еще одну задачу на ряды из египетского папируса, которая говорит нам о том, как в заданных долях разделить некоторое количество ячменя между 10 лицами.

> «Средняя доля есть 1 мера. Вычти 1 из 10. Остаток есть 9. Составь половину разницы. Это есть 1/16. Возьми ее 9 раз. Это даст 1/2 + 1/16. Приложи это к средней доле. Вычитай для каждого лица по 1/8 меры, пока не достигнешь конца».

Если число людей обозначить через n, количество мер ячменя – через S, разность – через d, то алгоритм сводится к вычислению следующих величин:

$$S/n,\ n-1,\ d/2,\ d/2(n-1),\ d/2(n-1)+S/n.$$

Последняя величина есть первый член убывающей арифметической прогрессии, равный 25/16. Путем последовательного вычитания 1/8 из последнего числа, получаем ряд из девяти дробей: 23/16, 21/16, 19/16, 17/16, 15/16, 13/16, 11/16, 9/16, 7/16. В сумме с первым членом ряд дает 10 исходных мер ячменя.

Подобные задачи, кажется, не были известны европейским математикам начала эпохи Возрождения (по крайней мере, большинству из них), и они вынуждены были самостоятельно искать алгоритмы их решения. Такое происходило множество раз: какие-то ответы кем-то находились, но потом они терялись. Поэтому одну и ту же истину приходилось открывать в различных частях света и в разное время не единожды. Не исключено также, что в результате какого-нибудь катаклизма все знания современной цивилизации будут утрачены, однако какое-то число разумных людей останется жить на земле. Можно не сомневаться, что они сумеют переоткрыть для себя и теорему Пифагора, и формулу суммы членов ряда арифметической прогрессии, и многое другое, чем мы сейчас пользуемся. Первоначально эти знания будут носить исключительно конструктивный характер, как это было у древних народов, населяющих землю; затем произойдет формализация и омертвление этих конструктивных знаний, как мы можем наблюдать сегодня.

10. Реконструкция математического мышления древних

Логика не только не добавляет математической строгости, но делает абсолютно невидимыми многие ранее вполне прозрачные геометрические построения. Сегодня сто́ит больших интеллектуальных трудов восстановить ту нехитрую цепь представлений, которыми пользовались древние вавилоняне и египтяне в массовом порядке. Нынешние историки науки не могут разгадать того, что не разъяснялось даже самым нерадивым школьникам – до того это были самоочевидные вещи. Вот один из длинной цепи примеров. Ван-дер-Варденом детально рассматриваются *предложения* II.9 и II.10 «Начал» Евклида, для чего он формулирует их в геометрической форме следующим образом:

> «II.9. Если прямая линия разделена на равные и неравные части, то квадраты на неравных частях, вместе взятые, вдвое больше квадратов на половине прямой и на отрезке между точками деления, взятыми вместе. II.10. Если прямая линия разделена пополам и к ней по прямой добавлен отрезок, то квадрат на всей линии вместе с добавленным отрезком, взятый вместе с квадратом на добавленном отрезке, будет вдвое больше квадрата на половине прямой вместе с квадратом на

прямой, состоящей из половины первоначальной прямой и добавленного отрезка. Оба предложения, – пишет Ван-дер-Варден, – приводят к формуле:

$$x^2+y^2=2\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right]$$ » [14,[22] с, 172].

Далее в его книге говорится, что эти предложения могут рассматриваться как решения задач, которые можно найти на вавилонских глиняных табличках, что, по мнению автора, доказывает факт «списывания» греками условий и решений задач вавилонян. Ван-дер-Варден утверждает, что задача, соответствующая предложению II.9, гласит: даны $x + y = S$, $x^2 + y^2 = F$, требуется найти x и y. Решая современными алгебраическими средствами эту систему из нелинейных уравнений, находим:

$$x=\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{F}{2}-\left(\frac{S}{2}\right)^2},\quad y=\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{F}{2}-\left(\frac{S}{2}\right)^2}.$$

Задача, отвечающая предложению II.10, гласит: даны $x – y = d$, $x^2 + y^2 = F$, требуется отыскать те же x и y. Для них современные формулы выглядят так:

$$x=\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{F}{2}-\left(\frac{d}{2}\right)^2},\quad y=-\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{F}{2}-\left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

По поводу «плагиата» мы уже поговорили ранее, но у читателя, естественно, возникает другой вопрос: как древние вавилоняне могли находить значения x и y, не располагая современными алгебраическими методами? Ван-дер-Варден мимоходом заметил, что x и y можно найти, если «искусно применять теорему Пифагора», однако он не дал отчетливую *реконструкцию* решения подобных задач.

В другом месте он пишет: «*Вавилоняне мыслили, прежде всего, алгебраически. Сквозь геометрическую внешность просвечивает алгебраическая сущность*». В своих исследованиях Ван-дер-Варден опирался на результаты Нейгебауера, который также считал вавилонян первоклассными алгебраистами: их «*математика имеет сильно выраженную алгебраическую ориентацию*», «*вычисление ведется с величайшим изяществом и совершенно тем же методом, который применили бы и мы теперь*» [13,[23] с. 201].

Антропологи Люсьен Леви-Брюль и Карл Юнг считали древних по сравнению с нынешними умственно неполноценными людьми, Ван-дер-Варден и Нейгебауер впали в другую крайность – объявили их провидцами современных алгебраических формул, которые они получали, только вот не умели выразить их клинописью на глине. По этому поводу Лурье замечает: «*От сложности применяемых Нейгебауером алгебраических формул рябит в глазах. По его мнению, вавилоняне применяли вполне сознательно хитроумный, алгебраический прием*». В самом деле, как можно было решать задачи, приводящие к сложнейшим системам уравнений? Например, к таким: $xy = 600$,

$$(3x+2y)^2+\frac{2}{13}\left\{4\left[\frac{1}{2}((x+y)-(1/2+1)(x-y))\right]^2+(x-y)^2\right\}=7100$$

Другой исследователь советского периода, А.А. Вайман, думал иначе, что «*древние математики достаточно хорошо владели методом <u>логического доказательства</u> математических истин*» [15,[24] с. 209]. Значит, дело не в алгебре, а в логике? Но мы уже знаем, что это за инструмент и какая от него польза. Он приводит условие и решение задачи, которая похожа на задачи, сформулированные Ван-дер-Варденом. Вот ее условие: дана длина x и ширина y прямоугольного поля, причем x превышает y на d. Известна также площадь поля S; требуется найти стороны x и y.

Как он ни хвалит логику, но решает систему двух уравнений ($xy = S, x – y = d$) современным алгебраическим способом:

$$x = t + d/2,\ y = t – d/2,\ xy = t^2 – (d/2)^2,$$

---

[22] Ван-дер-Варден. Б.Л. *Пробуждающаяся наука II. Рождение астрономии*. – М.: Наука, 1991.
[23] Нейгебауер О. *Лекции по истории античных математических наук*. Т.1 – М.–Л., 1937.
[24] Вайман А.А. *Шумеро-вавилонская математика*. – М., 1961.

$$t^2 = (d/2)^2 + S,\ t = \sqrt{(d/2)^2 + S};$$

в результате получилась знакомая нам формула:

$$x, y = \sqrt{(d/2)^2 + S} \pm d/2.$$

Записав эту формулу, Вайман не смог ответить на главный для любого историка вопрос, как пришли к ней древние математики. Следовательно, нужно продолжать искать разумную, скорее всего, геометрическую интерпретацию этой и других, подобных ей алгебраических формул.

Прежде всего, необходимо обратить внимание на то, что древние математики все величины выражали в конкретных числах, а числам ставили в соответствие либо отрезки длины, либо площади, либо объемы. В частности, задача, которую решал Вайман в общем виде, в действительности формулируется на конкретных числах:

> «Условие: длина и ширина; длина превышает ширину на 4, площадь 32, узнай длину и ширину. Решение: 4 раздели пополам, получишь 2; 2 умножь на само себя, ты увидишь площадь 4; площади 32 и 4 сложи, ты увидишь 36; узнай корень квадратный из 36, ты увидишь 6; сложи 6 и 2, ты видишь 8 – это длина; от 6 отними 2, ты увидишь 4 – это ширина».

Хотя данный алгоритм и повторяет алгебраические формулы Ваймана, древний математик, чтобы прийти к нужному для себя результату, вряд ли манипулировал только буквенными символами. Алгеброй и логикой в том объеме, который здесь явно или неявно предполагают современные исследователи, древние математики, конечно, не владели. Их единственным инструментом могла быть геометрия, т.е. ясный пространственный образ, подвергавшийся каким-то не очень сложным действиям.

Разумную реконструкцию решения подобных задач предлагает В.М. Розин. Он высказал предположение, что вавилоняне, скорее всего, просто умели прекрасно пользоваться пространственным воображением. Взяв за основу другие числа, он предложил следующую реконструкцию решения задачи.

Пусть дано «прямоугольное поле: ширина 7, длина 9. От поля отрезали вертикальный участок со стороной 1 (рис. 4) и добавили горизонтальный участок со стороной 1. Какова величина исходного поля и разница между полями?

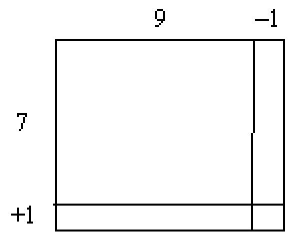


Рис. 4

Решение:

1) 7 · 9 = 63 – площадь исходного поля,
2) 7 + 1 = 8, 9 – 1 = 8 – нахождение сторон нового поля,
3) 8 · 8 = 64 – площадь нового поля,
4) 64 – 63 = 1 – разница между полями».

Эти простые геометрические и арифметические действия древний математик производить мог и, видимо, производил.

> «Рассматривая решения этих задач, можно заметить, что новое поле, возникшее после передела, – квадратное (8 · 8). Кроме того, разница между полями, равная единице, совпадает по величине с маленьким квадратным полем (1 · 1), получившимся в правом нижнем углу чертежа (рис. 4). Наконец, длина и ширина исходного поля и нового поля связаны следующими соотношениями: ширина исходного поля меньше стороны нового квадратного поля на 1, а длина этого поля больше этой стороны на 1, разница же между длиной и шириной исходного поля (9 – 7 = 2) ровно в два раза больше стороны маленького квадратного поля (1). Отсюда при желании можно извлечь и план решения.
>
> Известна величина исходного поля. Каким образом его нужно переделать, чтобы возникло новое квадратное поле? К исходному полю нужно добавить маленькое квадратное поле, сторона которого в два раза меньше разницы между длиной и шириной исходного поля. Затем нужно узнать сторону получившегося квадратного поля (т.е. извлечь корень квадратный из величины этого поля) и добавить (отнять) от этой стороны половину разности между длиной и шириной исходного поля» [16,[25] с. 99].

---

[25] Розин В.М. *Как решали математические задачи в Древнем Вавилоне* // Природа № 6, 1980.

Нам кажется, что Розин предложил правдоподобный выход из возникшей эпистемологической проблемы. Несомненно, всё дело *в умении древних математиков думать пространственными представлениями, а не алгебраическими или логическими понятиями*, т.е. *они превосходно манипулировали образами, а не символами*.

Аналогичным путем, видимо, решали задачи и египтяне, жившие в эпоху Среднего царства (2052–1786 гг. до Р.Х.). Вполне очевидные мысленные операция геометрического и логического характера древние математики не стремились вытаскивать на свет в форме занудных геометрических доказательств или логических умозаключений. Всё это софистико-схоластическое буквоедство возникло в эпоху Поздней Античности, когда оформилась субординация ученик – учитель, и особенно зацвело пышным цветом в Средние века, когда в Европе появились университеты.

Задачи типа «аха», которые решались *методом ложного положения*, или *задачи на арифметические и геометрические прогрессии*, которые мы уже затрагивали, не апеллируют к пространственным образам. Но подобных задач очень много в древнеегипетских папирусах. В связи с этим сложилась ложное мнение, будто на берегах Тигра и Евфрата, а также Нила, не умели решать задачи геометрического характера. Однако то, что вавилоняне и египтяне в противоположность грекам не часто прибегали к чертежам, еще не говорит об их незнании геометрии. Розин продемонстрировал нам, что вавилоняне, скорее всего, прекрасно владели геометрическими методами, причем настолько остроумными, что смогли поставить в тупик многих наших современных историков науки, приученных думать алгебраической символикой. Далее мы проиллюстрируем, что и египетские математики тоже весьма виртуозно владели геометрией, причем вовсе не считали нужным, как это делали греки, выставлять напоказ свое умение.

Известна не одна задача, где для вычисления площади круга ($S = \pi^2 d^2/4$) использовалась удивительно точная формула: $S = d^2\,(8/9)^2$. По этой формуле выходит, что $\pi = 3{,}1605$, в то время как даже в Древнем Вавилоне принималось величина $\pi = 3$. Анна Раик [17,[26] с. 36–37] выдвинула любопытную гипотезу, которая является, скорее всего, истинной. Она предположила, что площади круга диаметром d ставится в соответствие описанный квадрат A_0, из которого вычтены четыре площади A_1 малых квадратов со сторонами $d/6$ и восемь площадей A_2 со стороной $d/9$ (пояснения на рис. 5). В этом случае последовательные приближения давали следующие значения площади круга:

нулевое приближение – $S_0 = A_0 = d^2$,
первое приближение – $S_1 = S_0 - 4A_1 = d^2(1 - 4/6^2) = d^2(8/9)$,
второе приближение – $S_2 = S_1 - 8A_2 = d^2(8/9 - 8/9^2) = d^2(8/9)^2$,

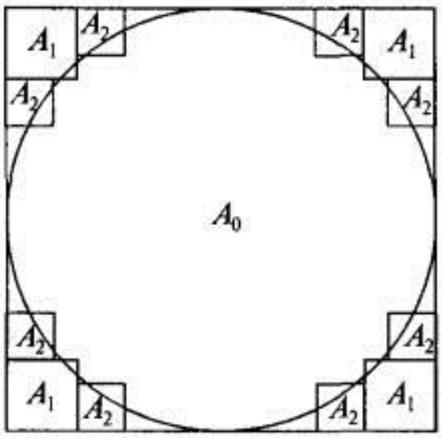


Рис. 5

Этот алгоритм выглядит достаточно правдоподобно, ведь нужно же было как-то формулу выводить, а учитывая любовь египтян к дробям, такой способ вывода вполне вероятен. Если бы практические нужды требовали более точного расчета площади круга, то древний математик ввел бы следующее приближение – в этом можно не сомневаться.

Верно, что египтяне почти не оставили нам геометрических чертежей, однако не следует думать, что они вообще не прибегали к геометрическим представлениям. Известна одна задача, в которой в явном виде довольно детально произведен геометрический анализ, сопровождавшийся чертежом. Наш соотечественник, блестящий исследователь Юрий Яковлевич Перепелкин (1903–1982) выполнил иероглифический перевод содержания задачи 14 Московского папируса (о нём читайте в разделе **Жизнь и труды Юрия Яковлевича Перепелкина**).

Эта задача включала схематический рисунок (рис. 6), позволяющий нам сориентироваться в отношении того, каким образом древнеегипетские математики обращались с пространствен-

[26] Раик А.Е. *Очерки по истории математики в древности*. – Саранск, 1967.

ными формами. Содержание задачи сводится к примеру вычисления объема (V) усеченной пирамиды с квадратным основанием, когда высота (h) и стороны нижнего (a) и верхнего (b) квадратов заданы в конкретных числах. Алгоритм можно передать следующими словами:

«Если тебе дана пирамида без вершины в 6 локтей в высоту, в 4 локтя по нижней стороне и в 2 локтя по верхней стороне, то вычисления начни с нижней стороны, которую возведи в квадрат, получишь 16. Затем умножь 4 на 2, получишь 8; далее возьми 2 и возведи в квадрат, получишь 4; сложи вместе три числа – 16, 8 и 4, получишь 28; возьми треть от 6, получишь 2; перемножь эту 2 с числом 28, получишь 56. Ты нашел верно».

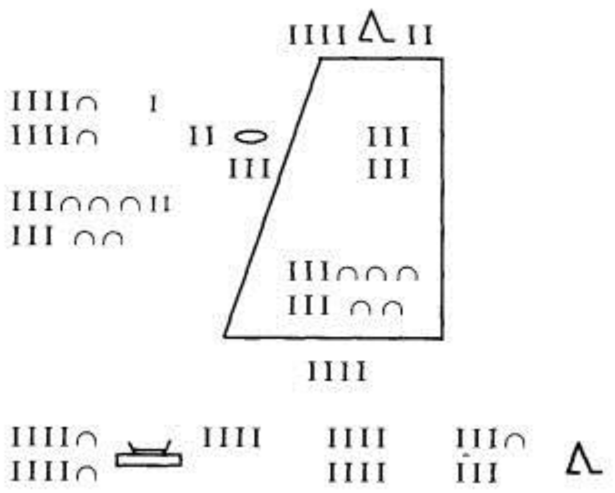


Рис. 6

Как видим, автор этого алгоритма рекомендует последовательно придерживаться школьной формулы вычисления, а именно:

(а) $V = (a^2 + ab + b^2)h/3$.

Схема (рис. 6), которой была снабжена задача, в лаконичной форме дублировала подробный алгоритмический текст задачи. Напомним, что все записанные на ней числа и действия с ними нужно прочитывать справа налево. На схеме, помимо известного нам иероглифа «результат», имеются еще два – «шагающие ноги», символизирующие математические действия сложение и возведение в квадрат (что также сводится к сложению). Иероглиф «шагающие ноги» можно было бы передать английским словом «*go*», который на русский язык переводится не только как «иди», но и более широко – «действуй». «Рот, откусывающий часть от целого» (в нашем случае «откусывается» треть от шести, т.е. две единицы), символизирует дробную часть.

Самое первое стоящее над пирамидой число указывает сторону верхнего сечения и тут же оно возводится в квадрат (возможно, автор желал тем самым показать, что рассматривается именно объемная фигура, а не плоская трапеция, как это может показаться на первый взгляд). Под нижним основанием пирамиды стоит четверка, указывающая сторону еще одного квадрата. Внутри пирамиды написаны два числа: первое 6, которое указывает высоту пирамиды, второе 56 – объем пирамиды. На одной строке с числом 6 автор записал математическое действие – «откусывание одной трети от шести» – и тут же помещен результат этого действия – 2. Слева от изображения пирамиды записано бинарное перемножение двух чисел – 28 · 2 = 56. В самом низу рисунка показано, как получается число 28; оно получается путем сложения 16, 8 и 4.

В изложенной задаче, прежде всего, поражает формула (а), по которой следует алгоритм решения. Если отбросить экзотические предположения, связанные, например, с посещением страны древних пирамид инопланетными пришельцами, которые могли бы подсказать формулу, то всякий историк науки обязан попытаться воспроизвести ход мысли древних математиков. Понятно, что без моделирования пространственными формами выражение (а) не получить.

Существует два варианта рассуждений. Первый основывается на том факте, что в Московском папирусе как будто бы изображена прямоугольная усеченная пирамида. В этом случае можно произвести ее разрез на четыре части, как это показано на рис. 7а, высчитать объем каждой части и затем произвести сложение. Результирующая формула будет иметь вид:

(б) $V = b^2h + b(a - b)h + (a - b)^2h/3$.

Здесь нужно заметить, что формула для объема пирамиды общего вида была известна, видимо, с очень древних времен. Этот объем равен одной трети от произведения площади основания пирамиды на ее высоту. Во всяком случае, ее несложно найти эмпирическим путем, как это сделал, в частности, Демокрит. Он составлял из «атомов», т.е. маленьких кубиков, сначала пирамиду, а потом из тех же самых «атомов» и на том же основании прямую призму, которая всегда оказывалась на две трети ниже высоты пирамиды. Аналогичным методом пользовался Архимед, когда он подсчитывал площади криволинейных геометрических фигур: он их взвешивал, помещал в ванны с водой и по произведенным физическим действиям судил о геометрических свойствах этих фигур. Поэтому последнее слагаемое в выражении (б) не вызывает вопросов. Но они тут же появятся, если данное выражение сравнить с выражением (а). Почему алгоритм рассматриваемой задачи из папируса не выстроен сразу по формуле (б)? Ведь невозможно себе представить, чтобы древнеегипетские математики могли произвести сложные алгебраические преобразования от формулы (б) к формуле (а). Они оперировали только конкретными числами, и ни о каких буквенных преобразованиях не могли и подумать (хотя бы потому, что тогда не было самого алфавита).

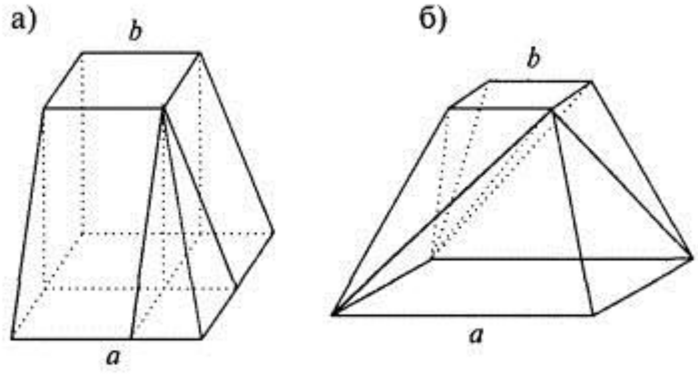


Рис. 7

Более правдоподобным вариантом рассуждения древних кажется второй. Усеченную пирамиду, вылепленную, например, из сырой глины (причем необязательно прямоугольной формы), можно было бы разрезать, как это показано на рис. 7б. Тогда формула объема, выраженная через сумму ее составляющих, будет выглядеть уже несколько ближе к алгоритмической формуле (а):

$$(\text{в})\ V = a^2h/3 + b^2h/3 + 2(ah/2)b/3.$$

Долгое обращение с конкретными числами не могло не привести внимательного человека к мысли о справедливости коммутативного и дистрибутивного законов:

$$ab = ba,\ ad + bd + cd = (a + b + c)d.$$

Это значит, что путь от формулы (в) к формуле (а) существовал, и он носил явно *конструктивный* характер, без манипуляции *пространственными образами* здесь не обошлось. Египетских жрецов не заботили доказательства, они думали только о *вычислении* подтверждаемого практикой результата.

Теперь перенесемся на другой конец света – в древний Китай. Там за 1100 лет до Р.Х. умели строить прямоугольные треугольники. В «Математическом трактате чжоу-би», («Чжоу-би суань цзин», *чжоу-би* – шест для измерения солнечной тени, аналог греческого *гномона*), принадлежавшем каллиграфической кисти Шан Гао, говорилось о треугольнике со сторонами 3, 4 и 5 единиц длины, а Чень-цзы, живший в VI в. до Р.Х., сформулировал теорему Пифагора в общем виде. Без элементарных навыков в области геометрии вряд ли знаменитый китайский астроном Ши Шень мог в IV в. до Р.Х. составить первый дошедший до нас звездный каталог, включающий 809 звезд.

В «Цзю чжан суань шу» («Математика в девяти книгах»), где были собраны задачи китайских математиков, живших в первом тысячелетии до Р.Х., есть книга V, которая называется «Оценка работ». Здесь приводятся задачи, связанные с земляными и строительными работами, в частности, даются алгоритмы расчета выработки на одного человека (в зависимости от материала, климатических условий и времени года) по строительству каналов, стен и плотин, имеющих порой весьма сложную форму, а также по копанию ям и рвов различной конфигурации. Нас сейчас будут интересовать задачи, связанные с нахождением объемов сложных геометрических фигур, которые были обойдены даже греческими математиками. Вот содержание задачи 17. Имеется сянь-чу. Нижняя ширина 6 чи, верхняя ширина 1 чжан [= 10 чи], глубина 3 чи, верхняя ширина 8 чи, глубины нет, длина 7 чи. Спрашивается, каков объем?»

Алгоритм лаконичный: «Сложи три ширины, умножь на глубину, еще умножь на длину, разделив на 6, возьми 1 раз». «Сань-чу» – это многогранник неправильной формы, изображенный на рис. 8а. Согласно условию задачи, имеем:

$$a = 6,\ b = 10,\ c = 8,\ h = 3,\ l = 7,$$

алгоритм следует изящной формуле:

$$V = (a + b + c)hl/6.$$

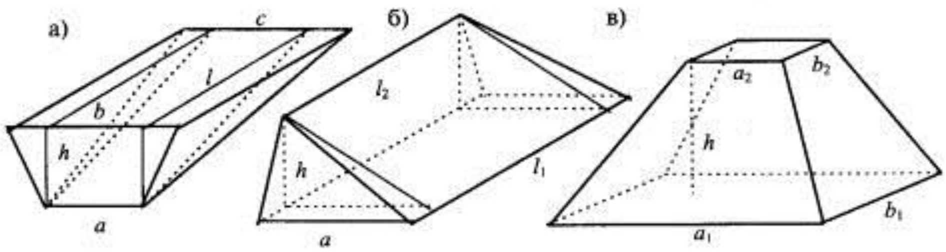


Рис. 8

Чтобы найти объем, нужно произвести рассечение фигуры «сань-чу» на три части, одна из которых будет прямой призмой высотой a и с прямоугольным треугольником в основании (катетами у него являются величины h и l); две другие части представляют собой две равновеликие пирамиды с высотой h, в основании лежит трапеция, у которой высота равна l, а стороны – $(b - a)/2$ и $(c - a)/2$. В этом случае объем первой части будет равен $ahl/2$, объем двух других частей –

$$2\{1/2[(b - a)/2 + (c - a)/2]hl/3\};$$

при сложении этих величин получим формулу для V. Данная формула была переоткрыта французским математиком Андриеном Лежандром (1752–1833) в его классическом курсе «Начала геометрии» (кн. VI, предложение 20).

Между тем древние китайцы рассматривали множество других геометрических тел, например тело «чу-мэн», которое изображено на рис. 8б; формула, по которой ищется объем чу-мэна, выглядит следующим образом:

$$V = (2l_1 + l_2)ah/6.$$

На рис. 8в изображено тело «чу-тун», которое похоже на четырехугольную усеченную пирамиду, только у «чу-туна» боковые грани при своем продолжении не сходятся в одной точке. Объем этой фигуры равен:

$$V = [(2a_1 + a_2)b_1 + (2a_2 + a_1)b_2]h/6.$$

Объемы тел, найденные в «Цзю чжан суань шу», нельзя получить случайным образом, путем манипуляции символами, как это делают формалисты. Следовательно, даже в очень отдаленные эпохи мышление китайца было достаточно конструктивным. Главным же здесь является то, что исходный сложный объект разлагался на сумму простых элементов. Важно понять, что только пространственные образы диктуют логику алгоритмов и вычислительные формулы, но никак не наоборот. Какой бы сложной ни была задача, ее решение всегда должно быть связано с большим или малым числом наглядных и понятных действий с пространственными образами. Это эпистемологическое положение верно как для математиков Северной Африки и Юго-Восточной Азии, так и для математиков, живущих в другой местности.

11. Неопределенность дефиниций и аксиом

Дефиниции, аксиомы и теоремы, выведенные еще софистами, были триумфом школьной, т.е. схоластической науки (*scholastic* – школьная), которая ничего не открывала. На примере доказательства теоремы Пифагора мы видели, каким путем происходило закабаление творческого ума (здесь непременно нужно учитывать этот психологический аспект). Соединение геометрии с логикой, осуществленное Евклидом, является неестественным гибридом двух взаимоисключающих психических начал – образного (представление) и языкового (понятие). Этот кентавр возник в результате противостояния двух противоположных устремлений эллина: тяги к путешествиям и любви к изобразительному искусству, с одной стороны (пространственная составляющая) и, с другой – философское резонерство, которое в Элладе, особенно в поздний ее период, всегда носило скептический и софистический оттенок (формально-логическая составляющая).

Евклид, о личности которого историки ничего не знают, очевидно, был типичным софистом, т.е. философствующим преподавателем, специализирующимся на геометрии. До и после «Начал» Евклида в Античной Греции имелись аналогичные книги других авторов, причем под тем же самым названием; в частности, «Начала» Леонта, Февдия, Гиппократа, Евдема, которые, однако, до нас не дошли. Уже к концу V в. до Р.Х. геометрия приобрела аксиоматико-дедуктивную форму. Другими словами, с самого начала развитие греческой геометрии шло рука об руку с развитием логики.

Логика в то время претендовала на роль эпистемологии, что-то наподобие метанауки, которая, однако, никогда не открывала новые истины, а лишь подтверждала верность ранее найденных геометрических соотношений. Не дав никакого подлинно эвристического метода, логики, тем не менее, стали контролировать познавательный процесс и выдавать аттестат на истинность той или иной геометрической формулы. Из письма Архимеда к Эратосфену мы знаем, что под правильные формулы площадей и объемов геометрических фигур и тел, найденных каким-нибудь конструктивным путем, надо было еще подвести аксиоматико-дедуктивную базу, иначе софисты, т.е. тогдашние представители официальной учености, не признали бы их. Очевидно, формализм паразитировал на конструктивизме во все времена, начиная с самых древнейших.

Судя по учебнику, который Евклид оставил нам, он был редким ретроградом, который мучил своих несчастных учеников тупой зубрежкой спорных определений и постулатов, нудными теоремами и бессмысленными доказательствами самых очевидных пространственных соотношений. Его, как и Аристотеля, стали прославлять на закате эллинской культуры. Прокл (410–485) писал: Евклид

> «составил "Начала", собрав множество теорем Евдокса, усовершенствовав немало, принадлежавшее Теэтету, а также дав неопровержимые доказательства предложений, которые не были полностью доказаны его предшественниками. Этот муж жил во времена первого Птолемея, который однажды спросил его, нет ли более короткого пути в геометрию, чем путь "Начал", на что Евклид ответил, что в геометрию нет царского пути».

Евклидовы «Начала» [11] состоят из 13 книг; в первых шести описываются свойства прямых, треугольников, прямоугольников, многоугольников, окружности, а также рассказывается о пропорциях и подобии фигур; следующие четыре книги посвящены теории числа, в частности, здесь доказывается иррациональность числа $\sqrt{2}$; в книге XI дается введение в стереометрию; в книге XII рассказывается о пирамидах, конусах и цилиндрах; а в книге XIII – о пяти Платоновых телах, – такова приблизительная структура древнего учебника математики.

Учебник начинался с длинного списка определений (*definitiones*) и постулатов (*postulata*), приводивших в восторг средневековых схоластов, радовавшихся новому инструменту властвования над учениками. Теперь они знали, каким образом можно держать в узде молодые умы, которые часто выигрывали в соревновании по решению конкретных задач. Чтобы читатель почувствовал формалистский дух «Начал», приведем из первой книги список обязательных дефиниций, которые требовалось выучить назубок каждому учащемуся как древней, так и средневековой школы. Этот список служит беспримерным памятником бесплодного формализма, которым до сих пор восхищаются неисправимые ретрограды XXI века, называя его началом «подлинной науки».

1. Точка суть то, что не имеет частей.
2. Линия суть длина без ширины.
3. Концы линии суть точки.
4. Прямая линия суть та, которая равно расположена по отношению к точкам, лежащим на ней.
5. Поверхность суть то, что имеет только длину и ширину.
6. Концы поверхности суть линии.
7. Плоскость суть та, которая одинаково расположена относительно всех прямых линий, лежащих на ней.
8. Плоский угол суть взаимное наклонение двух линий
9. Если линии, образующие угол на плоскости, суть прямые, то угол называется прямолинейным.
10. Если прямая, встречающая другую прямую, составляет с ней два равные смежные угла, то каждый из этих углов суть прямой, а прямая, составляющая их, называется перпендикуляром ко второй прямой.
11. Тупой угол суть больше прямого.
12. Острый угол суть меньше прямого.
13. Граница суть то, что является оконечностью чего-либо.
14. Фигура суть то, что содержится внутри одной или нескольких границ.
15. Круг суть плоская фигура, ограниченная одной линией; [она] называется окружностью, [в ней] все прямые линии суть радиусы; [они] проведенные из некоторой точки, лежащей внутри нее; [радиусы] равны между собой.

16. Эта точка суть центр круга.

17. Диаметр круга суть прямая, проведенная через центр и ограниченная с обеих сторон окружностью; эта прямая делит круг пополам.

18. Полукруг суть фигура, ограниченная диаметром и равной частью окружности, на которую этот диаметр делит окружность.

19. Сегмент суть фигура, ограниченная прямой и одной независимой частью окружности, на которые эта прямая делит окружность.

20. Прямолинейная фигура суть та, которая ограничена прямыми линиями.

21. Трехсторонние фигуры суть те, которые ограничены тремя прямыми.

22. Четырехсторонние фигуры суть те, которые ограничены четырьмя прямыми.

23. Многосторонние фигуры суть те, которые ограничены более чем четырьмя прямыми.

24. Среди трехсторонних фигур имеется равносторонний треугольник, в котором все стороны равны.

25. Равнобедренный треугольник суть тот, в котором две стороны равны.

26. Разносторонний треугольник суть тот, в котором все стороны неравны.

Ретроград сегодняшней школы так же, как и его античный коллега или схоласт из средневекового университета, будет уверять вас в необходимости знания этих определений, без которых, как он думает, математическая наука существовать не может. Однако на протяжении многовековой истории существования евклидовых «Начал» шел непримиримый спор о количестве и содержании дефиниций. Ученые Средневековой, Новой и Новейшей Школы без устали спорили между собой, как лучше определить тот или иной термин и в каком порядке их нужно давать.[27]

Так, наряду с определением точки как неделимого объекта, Герон, а за ним и большинство математиков Средних веков, подчеркивали невозможность ее измерения: точка суть место без протяженности в длину, ширину и высоту. Это определение корреспондировало с определением линии. Другое определение точки было таким: точка суть граница линии. В отношении линии многие авторы делали акцент не на ее одномерности, а на ее двусторонности, т.е. от всякой точки линия тянется не во все стороны, как плоскость, а только в две противоположные (если убрать последний термин, то получалась дефиниция плоского угла). Другими определениями для этого понятия были: линия суть граница поверхности или линия суть то, что вычерчивает движущаяся точка и т.д.

Подобные разногласия касались и всех остальных определений евклидова учебника. Кроме того, схоласты дополняли «самую строгую из наук» собственными дефинициями квадрата, ромба, прямоугольника, параллелограмма и т.п., которым Евклид почему-то не дал строгих определений. Вся ученость учителей стала заключаться в их умении определять одни группы слов через другие. Тот, кто знал множество вариантов одних и тех же понятий и историю развития системы определений, считался и лучшим знатоком науки геометрии. Решениями же каких-либо задач схоласты не занимались, так что к формулам длины, площади и объема различных геометрических объектов, найденным еще Демокритом, Евдоксом, Архимедом, они в течение долгих веков не добавили ровным счетом ничего.

За определениями шли постулаты, т.е. то, что допускалось:

1. От всякой точки до всякой точки [можно] провести прямую.
2. Конечную прямую [можно] продолжить.
3. Из всякого центра и всяким радиусом [можно] провести окружность.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, падающая на две другие прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньше двух прямых, то при продолжении эти две линии встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Прочтя эти определения и постулаты, более древние, чем Евклид, математики из Египта, Вавилона или Китая, наверняка, были бы сильно удивлены. Они не смогли бы ответить, по крайней мере, на два вопроса: во-первых, почему это словесное извержение нужно было

[27] **В.Э.:** Евклид не несет ответственности за действия схоластов. В любой сложной книге полезен глоссарий – перечень используемых терминов, хотя бы приблизительно их объясняющий. Если ученик вообще не понимает, о чем речь в предложении (теореме), то хорошо, если он может куда-то заглянуть и посмотреть, о чем вообще идет речь. Тем более это важно в древних книгах, текст которых был очень сжат и сам по себе малопонятен. Конечно, действия Евклида были совершенно правильными.

называть «математикой», да к тому же еще и «геометрией»; а, во-вторых, почему эту софистику должны заучивать наизусть все дети земли вот уже в течение двух с лишним тысяч лет, будто без неё невозможно дальнейшее существование цивилизации. Ученик этих трех более древних культур не стал бы спрашивать у своего учителя «допуск»: имеет ли он право данную точку взять в качестве центра окружности или «разрешения» на проведение линии из точки A в точку B. У него никогда бы не возникало сомнения в равенстве прямых углов и в справедливости более абстрактных законов рефлексивности ($A = A$) и транзитивности (если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$). Все эти надуманные законы были призваны регулировать несвободные отношения между безынициативным, почти беспомощным учеником и всевластным педантом. Никакого отношения к действительности или даже просто к продуктивной математике они не имеют. Постулаты и определения еще никому не помогли найти площадь или объем геометрической фигуры, но зато за ними всегда был виден строгий взгляд учителя, недовольного своенравием учеников. Раболепные зубрилки, которые затем сменяли своих мучителей, верили, что в этих наукообразных предложениях якобы заложен глубокий смысл. Но когда бывшие ученики подрастали и заступали на кафедры, они забывали о всяком содержании и требовали только одного – точного воспроизведения формулировок, в которых ни в коем случае нельзя было переставлять или заменять слова. Нет сомнений, что какому-нибудь озорному ученику Эллады приходила на ум крамольная мысль о множественности параллельных, но грозный учитель, указав ему на пятый постулат Евклида, быстро приводил его в чувство, и он до конца своих дней отучался самостоятельно думать.[28]

За постулатами выстраивались аксиомы, т.е. предложения, которые не требуют доказательства. Аристотель обращается к авторитету общепринятости отправных положений.

> «Началами доказательства, – пишет Аристотель в главе 2, книги 3 своей "Метафизики", – я называю общепринятые положения, на основании которых все строят свои доказательства, например положение, что ... невозможно в одно и то же время быть и не быть, а также все другие положения такого рода» [18, 996 b 26–32].

Аксиома об исключении третьего была провозглашена в связи с критикой гераклитовой диалектики, признающей одновременное существования *А* и не-*А*. Чуть ниже Аристотель обращает внимание на следующее:

> «Полагать, что ими [аксиомами] занимается одна наука [далее имеется в виду геометрия], нет достаточных оснований».

В следующей книге он уточняет эту мысль, апеллируя, во-первых, к ясности аксиом самих по себе и, во-вторых, к их общности, которая открывается знатокам первой философии, изучающей наиболее достоверные начала познания:

> «Тот, кто в какой-либо области располагает наибольшим знанием, должен быть в состоянии указать наиболее достоверные начала своего предмета... А это и есть философия [в другом месте он употребил словосочетание первая философия]. А самое достоверное из всех начал – то, относительно которого невозможно ошибиться, ибо такое начало должно быть наиболее очевидным (ведь все обманываются в том, что не очевидно) и свободным от всяких гипотез» [18, 1005 b 7–15].

У Евклида же аксиомы называются *общие понятия*. Средневековые схоласты этому греческому термину нашли латинский эквивалент: *communes notiones*. Вместо средневекового термина теорема (*proposition*), первоначально образованного от греческого глагола созерцать, рассматривать, Евклид противопоставляет визуально непроницаемый термин *protasis*, означающий у него как общую теорему, так и конкретную задачу (задачу схоласты называли *problema*).

Итак, перечислим все двенадцать аксиом Евклида.[29]

1. Величины, равные одной и той же величине, равны между собой.

---

[28] **В.Э.:** Всё это проникнуто таким непониманием роли постулатов и аксиом у Евклида, что и отвечать не хочется... Как дела обстоят на самом деле, изложено в моей статье Веданопедии «Аксиоматический метод» и в ее приложениях.

[29] **В.Э.:** Большинство этих аксиом не принадлежат Евклиду.

2. Если к равным величинам придадим равные же, то суммы получим равные.
3. Если от равных величин отнимем равные же, то остатки получим равные.
4. Если к неравным величинам придадим равные, то суммы получим неравные.
5. Если от равных величин отнимем равные, то остатки получим неравные.
6. Величины, двойные одной и той же величине, равны между собой.
7. Величины, половинные одной и той же величине, равны между собой.
8. Величины, совместимые по положению, равны между собой.
9. Целое больше своей части.
10. Все прямые углы равны между собой.
11. Если две прямые линии встречаются третьей так, что сумма внутренних углов, лежащих по одну сторону третьей, между двух прямых углов, то две первые прямые, при достаточном продолжении, встретятся по ту сторону третьей прямой, на которой сумма внутренних углов меньше двух прямых.
12. Две прямые линии не могут заключать пространства.

Любой внимательный читатель заметит, что 10-я аксиома непонятно зачем повторяет 4 постулат, 11 аксиома – 5 постулат, а 12 аксиома тесно перекликается с 8 определением.[30] Понятно, что разницы между определениями, постулатами и аксиомами нет никакой. Зачем городить этот частокол малосодержательных предложений, неизвестно.[31] Если начать обсуждать необходимость или бесполезность данных несуразностей, то мы рискуем вовлечь себя в пустые схоластические споры. В самом деле, конструктивно думающему человеку трудно уловить логическую необходимость, например, одновременного существования четырех аксиом порядка, которые в [19][32] формулируются следующим образом[33]:

1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C – различные точки одной прямой и B лежит также между C и A.
2. Каковы бы ни были точки A и C, существует по крайней мере одна точка B на прямой AC такая, что C лежит между A и B.
3. Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.
4. Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой, и a – некоторая прямая в плоскости ABC, не содержащая ни одной из точек A, B, C. Тогда, если прямая a проходит через точку отрезка AB, то она проходит также либо через точку отрезка AC, либо через точку отрезка BC.

Если конструктивисты шли по пути анализа всё более усложняющихся математических объектов, то формалисты двинулись в противоположном направлении и стали наперегонки выискивать самые элементарные объекты, называя их «основаниями математики», при этом без конца споря между собой, чей объект примитивнее, т.е., с их точки зрения, более основательный. Это привело к конкуренции нескольких наиболее простых утверждений, которые в чем-то дублировали, а в чем-то противоречили друг другу. Отсюда всплыли три новых проблемы: непротиворечивости, полноты и замкнутости системы основополагающих утверждений, которые, конечно, не возникали перед человеком, который пытался найти, скажем, корни алгебраического уравнения пятой степени или решить сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Зато к обсуждению словесного фонтана из определений и аксиом, взметнувшегося в начале XX столетия, охотно подключились философы. Они устроили вокруг «оснований» самой строгой из наук такой невообразимый шум, что все подумали, будто без этих «оснований» математика существовать далее не может.[34] В результате метаматематического философствования на свет появилось понятие «множества», заменившее старые схоластические универсалии. Операции с множествами, как хорошо известно, целиком дублируются логическими операциями, так что

---

[30] **В.Э.:** Акимов, как видно по Списку литературы, пользуется киевским изданием Евклида 1880 года; это перевод Ващенко-Захарченко, и это издание содержит много ошибок; надо было пользоваться превосходным переводом Д.Д. Мордухай-Болтовского, изданным в 1948 году. Там в этом отношении всё в порядке и, кроме того, имеется масса очень содержательных комментариев и пояснений (на основе которых я и построил свое мнение о работе и целях Евклида).

[31] **В.Э.:** Кому неизвестно? Мне известно.

[32] Ефимов Н.В. *Высшая геометрия*. – М.: Наука, 1971.

[33] **В.Э.:** А это уже не Евклид; это современные «аксиоматисты»; это ерунда – их я не защищаю; всё, что Акимов говорит – к НИМ относится в полную меру и совершенно справедливо.

[34] **В.Э.:** Почему философы? Главный «шумотворец» же был Гильберт, со своими «23 проблемами».

между ними невозможно провести границу. Однако Георг Кантор (1845–1918) пытался путем логико-множественных спекуляций уверить, например, Пуанкаре и других математиков-классиков, что целое может равняться части (см. аксиому 9 евклидовых «Начал»). Кантор же ввел понятия о счетном и континуальном бесконечных множествах. Счетным он стал называть такое множество, которому можно поставить в однозначное соответствие числа натурального ряда; континуальное он ассоциировал с вещественными числами.

Тут же возник схоластический спор, что первично: числа или элементы множества. Бесконечный ряд натуральных чисел вкладывается в бесконечный ряд действительных чисел; точки прямой, плоскости и объема характеризовались одной и той же бесконечной последовательностью действительных чисел. Людям, далеким от всякой математики, например философам, очень нравятся «глобальные» рассуждения формалистов. Их приводит в умиление положение о том, что число точек на линии равно числу точек на плоскости или в объеме. Это тождество проводится на том основании, что все точки линии, плоскости и объема проецируются на один и тот же бесконечный ряд вещественных чисел. Философы восклицали: «Ох, какой глубокий, мировоззренческий смысл здесь заложен! Теорией Кантора нельзя забивать гвозди, но она восхитительна». С конструктивной же позиции, подобные рассуждения являются образцом спекуляций в области математики. Математик-конструктивист не склонен доверять теориям, которые опираются только на манипуляцию некими символами и, прежде всего, символами, обозначающими бесконечность. У Кантора же выходило так, что если единицу прибавлять слева к бесконечности, то результирующая сумма вновь равнялась этой же самой бесконечности, а если единицу прибавлять справа, то получалась уже новая бесконечность, иными словами, в отношении бесконечности нарушался закон коммутативности. У него в бесконечности сливались не только часть и целое, но четное и нечетное, а сама бесконечность распадалась на актуальную и потенциальную, границу между которыми невозможно было уловить. В самом деле, разве можно представить что-то определенное, когда, рассказывая об актуальной бесконечности, вам указывают на Господа Бога, который у одних обитает на небесах, у других – в сердцах. Вообще, *Бог* – это некое «умное место», своеобразное вместилище для различных смутных идей. В другой раз, заговорив об актуальной бесконечности, Кантор указал на иррациональное число на том лишь основании, что выраженное через десятичную дробь 1,414213562... оно дает нескончаемый поток цифр. Так что же, иррациональные числа являют собой образец актуальной бесконечности? Трудно согласиться с таким пониманием, но не станем далее разбираться в спорных[35] идеях Кантора, вместо этого приведем пять аксиом, которые выкристаллизовались к началу XX века на языке теории множеств [20][36].

1. Аксиома существования. Существует, по крайней мере, одно множество.
2. Аксиома тождества двух множеств. Если множества A и B составлены из одних и тех же элементов, то они совпадают (тождественны, равны или эквивалентны).
3. Аксиома существования пустого множества. Существует такое множество, в котором отсутствуют элементы.
4. Аксиома объединения. Для произвольных множеств A и B существует множество, элементами которого являются все элементы множества A и все элементы множества B и которое никаких других элементов не содержит.
5. Аксиома разности. Для произвольных множеств A и B существует множество, элементами которого являются те элементы множества A, которые не являются элементами множества B.

Этот перечень у различных авторов меняется как по содержанию, так и по числу аксиом. Например, вместо разности напрашивается ввести пересечение множеств и т.д. Однако нельзя не заметить уже на этом примере, что мы имеем дело с рецидивом поиска универсальной системы, которая бы позволила формалистам выразить все их математические знания, опираясь на одно-единственное основание. По сути, нынешние формалисты недалеко ушли от аксиоматики Евклида и силлогистики Аристотеля. Поиск общего и универсального списка каких-то чудо-предложений являлся основной задачей формалистов-утопистов в любые времена. Что первично: единица числового ряда, точка геометрического пространства или элемент множества, всегда будет вызывать у них нескончаемые споры. Никогда не знаешь, с чего следует лучше начать

[35] **В.Э.:** Они не спорные, они просто неправильные, элементарно ошибочные. См. статью Веданопедии «Диагональный метод».

[36] Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств*. – М.: Мир, 1970.

строго формализованную науку – с логических положений или с множественных положений, выписанных только что. В действительности же здесь не может быть какого-то однозначного решения, так как условиям полноты, независимости и непротиворечивости удовлетворяют бесчисленное количество наборов логических и алгебраических предложений, что является следствием более общей природы «точного» знания: оно не имеет оснований, т.е. какого-то определенного начала или конца. Можно положить в основание одиннадцатую аксиому (пятый постулат) и вывести с его помощью теорему о том, что сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым, или поступить ровно наоборот. Еще большей неопределенностью страдают вышеуказанные принципы Аристотеля, который ориентировался на общность, очевидность и общепринятость отправных положений. Примерно эти же ложные огни освещают путь нынешним философствующим формалистам, которые то и дело натыкаются на рифы реального мира.

Попытки заложить один фундамент под все без исключения точные знания есть утопическая мечта специфической категории людей, тщетно стремящихся к всеохватывающему универсализму. Сотни исследователей кинулись аксиоматизировать классическую механику, релятивистскую и квантовую физику; даже генетика и эволюционная теория не избежали этого интеллектуального насилия. Авторы аксиоматических концепций уверяли, что к аксиоматической форме должна прийти любая наука, если она хочет называться таковой, ибо, где аксиомы, там порядок и обоснованность, где их нет, там хаос и беззаконие. Однако на практике всё выходило наоборот: аксиоматизированные теории являют собой вершину скудоумия, которое оформлялось в самые банальные и бесполезные утверждения. Так, например, У. Чёрчмен вздумал аксиоматизировать уже достаточно бессодержательную науку – общую теорию систем. Что из этого получилось, можно судить по его списку аксиом:

> «1. Система синтезируется и конструируется. 2. Система синтезируется по частям. ... 9. Поиск обобщенной системы становится всё более затруднительным с течением времени и никогда не завершится».

На наш взгляд, этот список было бы очень правильно дополнить следующими аксиомами: «10. Система разваливается сама или разрушается людьми. 11. Система выходит из строя по частям» и т.д. Любой конструктивист хорошо чувствует всю нелепость затеи по составлению глобального списка предложений, не требующих якобы никаких доказательств.

(Продолжение следует)

Оглавление