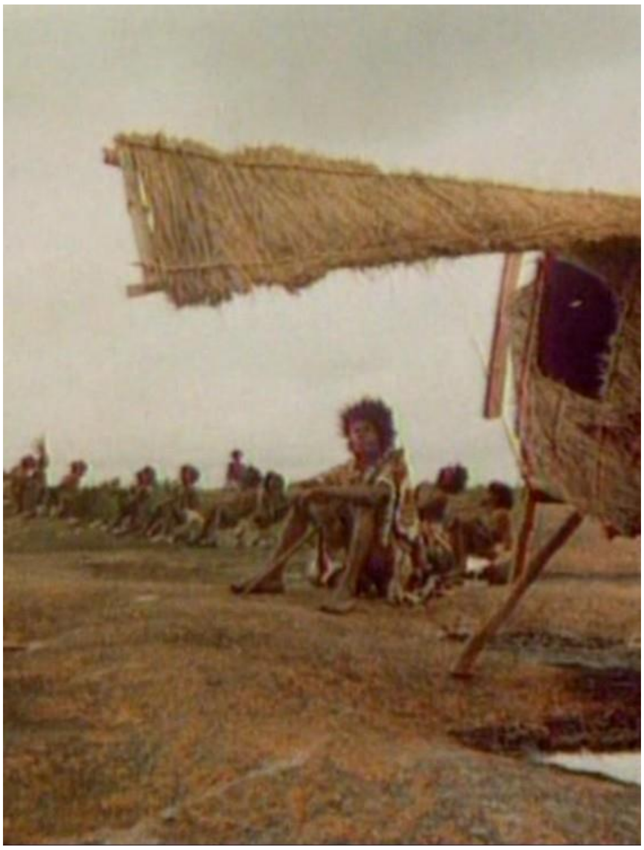
Дневник

Quod sentimus loquamur,
quod loquimur sentiamus!

VEcordia

Извлечение R-PENRO2



The Emperor's New Mind

Открыто: 2010.08.25 17:40
Закрыто: 2011.01.19 17:21
Версия: 2016.12.10 15:42

ISBN 9984-9395-5-3
Дневник «VECORDIA»

ISBN 5-354-00005-X
Роджер Пенроуз. «НРК», том II

Роджер Пенроуз

НОВЫЙ РАЗУМ КОРОЛЯ

Том 2
(главы 3 – 4)
С комментариями Валдиса Эгле

Impositum

Grīziņkalns 2016

Talis hominis fuit oratio,
qualis vita

Большинство математиков предало забвению древние традиции математики и наследие ее прошлого. Наполненные глубоким содержанием сигналы, которые посылает нам природа, достигает лишь закрытых глаз и нечутко прислушивающихся ушей. Математики продолжают жить на проценты от репутации, заработанной их предшественниками, и жаждут при этом шумного одобрения и такой же поддержки, какую математика имела в прошлом.

Морис Клайн,[1] 1980

Предисловие в Векордии

2010.11.11 10:26 четверг

В этот том Векордии помещаются две главы Первой книги Пенроуза, посвященные непосредственно математике, – и тем самым наиболее тесным образом касающиеся самого главного предмета Веданской теории. Сейчас, когда я пишу это Предисловие, я еще не приступил к комментированию этих глав, но чувствуется, что в этом томе, по-видимому, моих комментариев окажется так много, как ни в одном другом из девяти томов, представляющих идеи Роджера Пенроуза в настоящем моем Дневнике.

Поэтому представляется полезным напомнить читателю хотя бы главные моменты из того основания, на которое эти комментарии опираются. Здесь нет ни возможности, ни цели излагать Веданскую теорию в сколь-нибудь широком виде, но попытаюсь повторить самое основное из того, что многократно говорилось мною на протяжении более 32 лет в разных моих сочинениях и комментариях к чужим сочинениям, – чтобы, возможно, помочь читателю лучше понять то, что говорится ниже в этом томе.

1. Начало математики

Всегда, когда Вы изучаете какой-нибудь предмет, небесполезно бывает знать, ЧТО, собственно, Вами изучается, ЧТО этот предмет из себя представляет. Когда Вы изучаете «то, не знаю что», то легко сбиться и уплыть во всякие фантазии, не соответствующие никакой действительности.

Это относится и к математике. Если кто-то (как Пенроуз и тысячи других математиков и философов) хочет рассуждать о математике, то будет весьма полезно в первую очередь установить, что же такое математика и что это за вещи, которые этой наукой изучаются.

Разумеется, Пенроуз (и тысячи других математиков и философов) скажут, что они это знают. (Правда, говорят они это как-то не очень уверенно). Однако их объяснения этих вещей нельзя признать ни в малейшей степени удовлетворительными. (Я хотел здесь привести пример и с этой целью снова заглянул в некоторые энциклопедии, но там всё настолько расплывчато и обширно, что примеры загромоздили бы мне всё Предисловие, ничего существенного так и не сказав. Так что загляните лучше сами в какую угодно из «официальных» книг: попытайтесь по ним уяснить, что такое математика, что такое число и т.д.).

[1] Клайн Морис. «Математика: утрата определенности». «Мир», Москва, 1984, с 351.

А чтобы действительно уяснить, что такое математика и что из себя представляют те объекты, которые ею изучаются (в первую очередь числа), нужно вернуться к ее истокам и посмотреть, с чего и в каких условиях она начиналась, а потом немножко подумать. Итак, как же математика начиналась?

Если мы придерживаемся не каких-нибудь религиозных, а научных взглядов, то картина выглядит так. Ходил по Земле первобытный человек; он представлял из себя материальную систему, состоящую из атомов и молекул, и в этой системе работали различные подсистемы, выполняющие различную работу: сердце разгоняло по организму кровь, кровь подносила клеткам пищу и кислород – и т.д. А одна подсистема занималась обработкой информации о внешнем мире и о самом организме. Вот эта-то подсистема и создала в конце концов математику.

Но КАК система обработки информации может создать математику? (Или первоначально – просто числа).

Что она для этого должна делать? КАК она для этого должна работать?

Чтобы ответить на эти вопросы, требуется, конечно, некоторое понимание вообще о принципах работы систем обработки информации – т.е. о компьютерах.

2. Классификация множеств программой N

Когда такое понимание есть, то становится видным и ответ: для создания натуральных чисел система в первую очередь должна уметь классифицировать объекты (внешнего мира) по количеству элементов в них. То есть, должна уметь различить, когда элементов три, а когда четыре и т.д., и относить объекты с тремя элементами к одному классу (множеству), а объекты с четырьмя элементами к другому и т.д.

Но системы обработки информации (т.е. компьютеры) «умеют» что-то делать лишь тогда, когда у них имеется для этого программа. Следовательно, чтобы первобытные люди могли начинать классифицировать объекты по количеству элементов в них, в их мозге должна была уже существовать программа такой классификации. (А создать эту программу они должны были, как и все другие программы своей деятельности, путем самопрограммирования).

Таким образом, эта мозговая программа классификации объектов по количеству элементов (назовем ее программой N)[2] становится самым первым объектом у истоков математики. Математика начинается с программы N.

Но как же работает эта программа N? Как она осуществляет свою классификацию? Перебрасывает все объекты внешнего мира, имеющие три элемента, в одну кучу, а все объекты, имеющие четыре элемента, в другую кучу? Разумеется, нет – во внешнем мире она ничего не трогает и ничего не перемещает. Она просто создает внутримозговую (внутрикомпьютерную) структуру («таблицу»), которую мы могли бы назвать «множеством всех объектов с тремя элементами», и потом устанавливает связку между данным конкретным объектом (точнее: его внутрикомпьютерным представлением) и этой «таблицей». Такая связка (для всей дальнейшей работы мозгового компьютера) будет означать: «этот объект принадлежит множеству всех объектов с тремя элементами».

Так появляются знакомые нам из математики вещи, но только теперь мы имеем неизмеримо более точное представление об истинной природе этих вещей. Математики – вроде Пенроуза – могут сколько угодно рассуждать об «абстрактных множествах», да только всё то, что они о тех говорят и знают, не дает им возможности самим построить существо, размышляющее о математике (и Пенроуз даже думает, что такое существо построить вообще невозможно на основе программ). А то, что только что сказал я, может в компьютере осуществить любой мало-мальски квалифицированный программист, и, продолжая в таком же духе, он построит существо, реализующее математическое мышление. Поэтому-то наше (изложенное здесь) представление о числах и множествах и является несравнимо более глубоким, нежели у математиков. Нельзя ставить на одну полку знания человека, который телевизор построить не может, и человека, который это сделать может. И нельзя ставить на одну полку знания людей, которые математическое мышление сами создать не могут, и тех, кто это может.

[2] От латинского *naturalis* – естественный или от *numerus* – количество, член, часть.

3. Конкретные множества

Итак, «множество всех объектов с тремя элементами» в компьютере (мозге) представлено внутрикомпьютерным объектом – «таблицей». Такая «таблица» в Веданской теории называется номиналией. (Нужно же присваивать какие-то названия тем вещам, о которых мы говорим, иначе невозможно ничего сказать). Номиналия – это внутримозговой (внутрикомпьютерный) объект, соответствующий внешнему объекту (называемому реалией).

Когда реалия представляет собой просто один определенный объект внешнего мира (например, «вот эти три яблока, лежащие сейчас на столе»), то ситуация довольно проста. Во внешнем мире три яблока; внутри мозга – их номиналия (как мозговая структура).

Немножко сложнее дело обстоит, когда реалия представляет собой такой не совсем четко очерченный объект как «множество всех объектов с тремя элементами». Ведь на самом деле мозг не может действительно перебрать все такие объекты! Но он и не перебирает. На самом деле в мозге имеется только номиналия (якобы соответствующая «множеству всех объектов с тремя элементами») и программа N, способная определить, принадлежит ли данный конкретный объект этому множеству, или нет (и устанавливающая связь между номиналией множества и номиналией объекта, если принадлежит).

Это общий принцип: все математические множества в мозге (т.е. в компьютере)[3] представлены двумя главными объектами: 1) номиналией этого множества и 2) мозговой программой, которая способна определить, принадлежит ли рассматриваемый объект этому множеству, или нет. Поэтому, когда мы хотим рассуждать о множествах точно (точнее, чем это делают математики), то мы должны от «абстрактных» (т.е. расплывчатых) рассуждений о «множествах вообще» перейти к рассуждениям о номиналиях и мозговых программах этих множеств.

Рис. VE1. Исходная концепция множества в Веданской теории. Рассуждая о всяком множестве, нужно различать три главные связанные с ним вещи: 1) Реалию множества, существующую вне ментального мира; 2) Номиналию множества, существующую в ментальном мире и соответствующую реалии; 3) Мозговую программу, способную отличить, принадлежит ли объект данному множеству или нет.

[3] При описании Веданской теории воспользуемся введенным Пенроузом делением интересующих нас «сущностей» на три мира: Физический мир, Ментальный мир и Платоновский мир {PENRS4}, которое очень удобно для наших целей. Тогда всё, что находится внутри мозга-компьютера, представляет собой Ментальный мир, а всё, что вне его – либо Физический, либо Платоновский мир.

4. Абстрактные множества

Но вернемся к программе N, с которой начиналась математика. Итак, эта программа классифицирует объекты по количеству элементов в них. Как результат этой классификации она создает целый ряд множеств: «множество всех объектов с одним элементом», «множество всех объектов с двумя элементами», «множество всех объектов с тремя элементами» и т.д. (т.е., на самом деле она создает в мозге номиналии этих множеств, и сама же и способна определить, к которому из этих множеств относится поданный ей на вход конкретный объект).

Ясно, что тут где-то «истоки понятия числа». Но где оно – собственно число?

Пенроуз ниже в этом томе расскажет, что Фреге считал числом «3» собственно «множество всех объектов с тремя элементами» (т.е. в наших терминах – реалию этого множества). Сам Пенроуз в этом вопросе более осторожен: ведь он понимает, что Вселенная может оказаться конечной, и тогда множество чисел не будет бесконечным. Поэтому он добавляет, что понятие числа, правда, начинается с этих множеств Фреге, но потом превращается в некую «абстракцию» или «расширение» (но при этом, разумеется, Пенроуз не может сказать, как же нам это «абстрагирование» встроить в компьютер математического мышления, поэтому его объяснение просто заменяет одно не до конца понятное слово другим не до конца понятным словом).

Всё, что мы до сих пор рассмотрели в связи с программой N, очевидно, «стоит близко» к «истокам чисел», но пока что ни один из введенных нами объектов не может быть собственно числом. Числом не могут быть номиналии (потому что мозговая программа N данного конкретного индивида за всю жизнь построит сравнительно немного номиналий – номиналии лишь тех множеств, которые этот индивид действительно пересчитал; кроме того, тогда у каждого индивида вообще имеются «свои числа»). Числами не могут быть и реалии этих множеств (потому что даже в самом крайнем случае – если пересчитать всю Вселенную – это всего лишь подход Фреге).

Тогда где же собственно числа – объекты, обладающие всеми свойствами чисел, и в первую очередь – их бесконечным количеством? И одинаковой «надежностью» и «реальностью» всех чисел – что простой единицы 1, что числа $1000^{1000^{1000^{1000^{1000}}}}$, безнадежно далеко выходящего «за пределы Вселенной».

И вот тут нам нужно вспомнить об одной вещи, которую, как показывает опыт 32-летней истории Веданской теории, почему-то почти никто не может понять. Этой вещью является анализ программы без ее выполнения.

Вообще программисты каждый свой рабочий день выполняют это дело. Программист сидит над листингом (распечаткой) своей программы и «в голове» «прокручивает» ее: что будет, если ее запустить на выполнение? что будет, если ей подать такие данные? а что, если такие? а что произойдет в таком случае? а что в таких условиях?

Но мало кто (даже среди программистов) понимает, что эту работу может выполнить и компьютер. Эта же программа (A) может сидеть в компьютере (но не выполняться!), и можно запустить другую программу (B), которая с этой первой программой (A) будет проделывать в принципе ту же работу, что и сидящий над листингом программист. (Что для этого требуется, как программы должны быть структурированы, – это уже другой вопрос, технический).

Вот эта вторая программа (B), анализирующая первую программу (A) отобразит результаты своей работы в некоторых внутрикомпьютерных структурах (кто понимает программирование, тот представит себе), опять же в «таблицах». Эти «таблицы» (построенные программой B) будут представлять, т.е. кодировать потенциальные результаты (продукты) выполнения программы A. Программа A не работала, настоящих своих продуктов не создавала. Но отработала программа B и создала структуры (назовем их тоже номиналиями), кодирующие то, что программа A могла бы создать.

Такие номиналии тоже вроде соответствуют своим реалиям. С точки зрения компьютера и его программ всё выглядит как прежде: есть номиналия внутри компьютера, ей соответствует реалия вне компьютера – всё в порядке. Но только теперь реалией такой номиналии является не материальный объект физического мира, а «идеальный» объект «платоновского мира» (впрочем, совсем не произвольный, а с точки зрения компьютера – мозга – столь же реальный и объективный, как и прежние объекты; его свойства не взяты «с потолка», а определяются программой A).

Такой анализ одной программы, осуществляемый другой программой, – обычная работа в человеческом мозге (и составляет существенную компоненту интеллекта). Ведь живым существам нельзя любую программу, составленную их аппаратом самопрограммирования, сразу пускать на выполнение. Нужно сначала «подумать», т.е. проанализировать возможные последствия ее выполнения. Так что этот аппарат создан (естественным отбором) отнюдь не для математики – но он играет огромную роль в сотворении математики.

Рис. VE2. Возникновение абстрактного объекта. С точки зрения компьютера (мозга) ситуация не отличается от ситуации на Рис. VE1: номиналия является такой же структурой данных, и ей соответствует реалия «во внешнем мире»

Практически все «абстрактные» объекты математики являются вот такими вот потенциальными продуктами различных (мозговых) программ. Имеется программа (А); ее (не выполняя) анализируют «сбоку»[4] другой программой (В); та строит номиналии потенциальных продуктов программы А в своем компьютере, а реалии этих продуктов «существуют» в «платоновском мире идей».

В отличие от реальных продуктов программы А (когда она действительно отработала), потенциальные ее продукты могут быть бесконечными. Нет проблем! Программа В посмотрела и установила, что А будет работать бесконечно, завела номиналию, и этой номиналии (в платоновском мире) соответствует бесконечное множество.

5. Классификация отношений множеств программой R

2011.01.08 17:05 суббота

Теперь пусть программа В отработает над программой N. В результате будет «создана» реалия, представляющая собой бесконечный ряд таксонов классификации множеств по количеству элементов. В отличие от «множеств Фреге», этой реалии безразлично, конечна или бесконечна Вселенная: – ряд таксонов, потенциальных продуктов программы N, всё равно бесконечен, и все таксоны одинаково реальны – что в начале ряда, что на любом удалении от начала. И они одинаковы для всех людей (и вообще любых субъектов).

[4] Из-за этой ассоциации о том, что обе программы находятся рядом, «соприкасаются боками», и при этом одна из них анализирует, изучает другую, – такой процесс в Веданской теории называется бокоанализом.

Вот это и есть первый объект у нас, обладающий всеми свойствами чисел.

Этот абстрактный объект Платоновского мира мы можем считать натуральными числами.

Легко видеть, каким образом в этом множестве вводятся арифметические операции. Они представляют собой объективно существующие соотношения между таксонами. Так, если одно множество программой N квалифицируется как принадлежащее таксону 3, а второе как принадлежащее таксону 4, то их объединение обязательно будет классифицироваться как принадлежащее таксону 7 – и т.д.

2011.01.13 14:38 четверг

Однако программа N, классифицирующая множества, хоть и была способна положить начало математике путем создания самых первых чисел, не может обеспечить сколь-нибудь далекое ее развитие. При использовании этой программы субъект имеет только натуральные числа – и никаких больше: ни дробных, ни отрицательных, ни иррациональных, ни комплексных...

Но реальные ситуации и решаемые в них задачи вскоре вынуждают субъекта переходить от классификации множеств (программа N) к классификации отношений между множествами (такая программа классификации в Веданской теории называется «программой R»[5]). Отношения между множествами в исходных данных программы R представлены в виде пар множеств. В каждой паре одно множество считается «единицей измерения», а другое множество – «измеряемое». В один таксон классификации попадают те пары множеств, в которых соотношения между единицей и измеряемым «одинаковы» (по критериям программы R).

Как и в случае с программой N, программа R тоже создает бесконечные множества таксонов-чисел в платоновском мире по схеме рисунка VE2.

Одно подмножество таксонов-чисел программы R оказывается во всех отношениях эквивалентным (изоморфным) продукции программы N; это те соотношения между множествами, когда единица измерения входит в измеряемое «целое число раз». Этим подмножеством программа R как будто «переопределяет» натуральные числа, созданные ранее программой N. Отныне субъекту становится безразлично, понимать ли под натуральными числами таксоны, созданные программой N (обозначим множество этих таксонов как N_N), или считать натуральными числами упомянутое подмножество таксонов программы R (обозначим их N_R). Числа N_N и N_R для субъекта сливаются вместе, начиная уже затуманивать понятие числа и понемножку создавать вековую проблему «Что же такое число?!».

Но остальные таксоны программы R тем временем порождают дробные числа (как соотношения множеств, например, с количеством элементов 7 и 3, и т.п.). Пока программа R применяется только к конкретным множествам[6] (точнее: к их номиналиям), эти дробные числа остаются «рациональными». Но когда программу R применяют к соотношениям абстрактных множеств (таким, например, как «соотношение окружности и диаметра» или «соотношение стороны квадрата и его диагонали»), то дроби могут стать «иррациональными».

Пока программа R интересуется только количеством элементов в множествах, составляющих измеряемые пары (соотношения), создаются только те множества чисел, которые в традиционной математике называются «положительными числами», а в Веданской теории «метрическими».

Но в общем случае программа R учитывает не только количество элементов в множествах данной пары, но и взаимное расположение обоих множеств.

Интерес представляют две модификации программы R:

R′, учитывающая линейную ориентацию множеств пары: одинаково или противоположно они направлены; программа R′ порождает отрицательные числа классической математики (а с точки зрения Веданской теории: она разбивает метрические числа на положительные и отрицательные);

R″, учитывающая планарную ориентацию множеств пары; она порождает «комплексные» числа традиционной математики.

---

[5] От латинского *relatio* – отношение.

[6] «Конкретным множеством» в Веданской теории называется множество, в номиналии которого перечислены все его элементы. Противоположность: «абстрактное множество», элементы которого не перечисляются конкретно, а (в номиналии) указывается ссылка на программу, которая это множество создает (на программу, потенциальным продуктом которой это множество является).

6. Первичные и вторичные алгоритмы

Так, развивая у себя в голове мозговые программы классификации множеств по количеству элементов и пар множеств по их отношениям, первобытный человек создал «числовые системы» и положил начало математике. (Вторым аналогичным направлением его деятельности было развитие мозговых программ «конструирования»: проведения линий, рисования фигур и т.п., и изучение потенциальных продуктов таких программ. Легко понять, что речь идет о геометрии; там сохраняются все те же закономерности: программы, их продукты, бокоанализ программы A программой B и создание ею объектов Платоновского мира; номиналии, реалии и т.д. Но в этом Предисловии, чтобы не загромождать рассказ, не будем углубляться в геометрию, поясняя все нужные нам понятия Веданской теории только на примере чисел).

Итак, числа представляют собой объекты Платоновского мира (причем «платоновский мир» понимается в смысле рисунка VE2). Числа являются таксонами классификаций множеств или их отношений по программам N, R, R′, R″. Только эти объекты обладают всеми свойствами чисел, известными нам со школьной скамьи, такими как их бесконечность, одинаковая «реальность» в любом месте «числовой оси», одинаковость для всех субъектов и «абстрактность», т.е. существование «вне пространства и времени».

В мозгах (компьютерах) субъектов существуют программы работы непосредственно с числами (как с таксонами классификаций по программам N, R, R′, R″). «Визуализация» операции умножения, приведенная Пенроузом в §1.19 тома {PENRS1}, представляет собой типичный пример работы программ этой группы. Там мозговые программы по-разному измеряют (классифицируют) множества строк, множества столбцов и множества суммарных элементов «визуализируемой» матрицы.

Такие операции непосредственно с множествами и с таксонами-числами в Веданской теории называются первичными. (Соответственно, мозговые программы, эти операции осуществляющие, называются первичными программами).

Однако первичными операциями при помощи первичных программ не многого достигнешь. С них математика только начинается, а своего расцвета и неимоверной мощи она достигает при помощи вторичных операций, осуществляемых, соответственно, вторичными программами мозга.

Вторичные действия над числами начинаются с того, что числа (т.е. таксоны классификации) как-то обозначаются. Такое (графическое) обозначение числа в Веданской теории называется нотатой. Всем нам известны «римские» нотаты: I, II, III, IV... и «арабские» нотаты: 1, 2, 3, 4... (известны и другие нотаты: греческие, славянские, еврейские и т.п.). Впредь ограничимся «арабскими» нотатами в «десятичной системе счисления».

Сущность вторичных действий состоит в том, что первичные действия (над множествами и числами-таксонами) заменяются действиями над нотатами. Типичный пример: пенроузовское

$$3 \times 5 = 5 \times 3.$$

Те действия, которые только что при «визуализации» проделывались первичными программами, теперь закодированы нотатами (обозначающими числа, «арифметические операции», определенные соотношения – «равенство» и т.п.).

Вот здесь, во вторичных операциях, математика и начинает по-настоящему разворачиваться. Вскоре ей недостаточно уже $3 \times 5 = 5 \times 3$, а надо писать нотаты $a \times b = b \times a$ (а потом и еще похлеще). Но пусть нас не пугают всё более и более хитроумные системы математических нотат и вторичных операций. Просто нужно помнить главное:

1) система вторичных обозначений и действий стартовала с платформы первичных действий; то, что $3 \times 5 = 15$ вытекает НЕ из самих вторичных нотат и действий с ними, а из того обстоятельства, что в первичных операциях программа классификации N всегда установит принадлежность множества элементов матрицы таксону 15, если множество строк относится к таксону 3, а множество столбцов к таксону 5;

2) вторичная работа (над нотатами) осуществляется другими мозговыми программами, нежели первичная работа (с множествами); для этих других программ существуют таблицы умножения, алгоритмы умножения чисел при помощи сдвинутых строчек, вычитания с «занятием разряда» и т.д.;

3) но вторичная работа с самого начала построена так, чтобы она сохраняла соответствие (изоморфизм) с первичной работой над множествами;

4) именно поэтому и только поэтому вторичная работа (над нотатами) может быть пригодна людям: именно поэтому первичную работу над множествами (их измерение и классификацию) можно заменить вторичной работой над нотатами (вычислениями);

5) такие вторичные построения (над нотатами), которые потеряют соответствие (изоморфизм) с работой первичных программ (над множествами), принципиально не будет иметь никакой возможности применения и пригодности.

Введение в математику вторичных программ, их специфических алгоритмов (вычислительных) и всё более сложных построений над ними исторически еще более замаскировало предмет и сущность математики и окончательно запутало самих математиков. Многие (в том числе Пенроуз) перестали даже различать собственно число и его нотату (его обозначение), готовы считать числом вереницу цифр; они не видят также принципиальных критериев потенциальной пригодности того или иного вторичного построения математики (такого, например, как «теория множеств» Георга Кантора).

7. Термины Веданской теории, применяемые в комментариях

На этом я закончу данное краткое Предисловие. Оно было предназначено для того, чтобы в комментариях к тексту Роджера Пенроуза я мог пользоваться такими понятиями Веданской теории как:

– субъект (человек, животное, робот, инопланетянин и т.п.), обладающий «разумом»,
– номиналия множества в мозге-компьютере субъекта,
– реалия множества во внешнем для мозга-компьютера мире,
– программа (задающая множество),
– программа N (определяющая первичные натуральные числа N_N),
– программа R (определяющая вторичные натуральные числа N_R и дроби),
– программа R′ (определяющая отрицательные числа),
– программа R″ (определяющая комплексные числа),
– метрические отношения (в паре множеств),
– линейная ориентация (в паре множеств),
– планарная ориентация (в паре множеств),
– бокоанализ (программой B программы A),
– потенциальный продукт (программы A, построенный программой B),
– таксон классификации (число),
– конкретные множества (задаются элементами),
– абстрактные множества (задаются программой),
– ментальный мир (обработки информации), существующий в субъекте,
– платоновский мир (потенциальных продуктов программ) вне субъекта,
– нотата (графическое обозначение числа, операции, соотношения и т.п.),
– первичные (алгоритмы, программы) действия над множествами,
– вторичные (алгоритмы, программы) действия над нотатами,

– пользоваться этими терминами, сохраняя при том хоть какую-то надежду на то, что читатель эти слова поймет.

А более частное применение этих понятий – ниже в комментариях к конкретным вопросам, затронутым Пенроузом.

Валдис Эгле

13 января 2011 года

Роджер Пенроуз. «Новый Разум Короля»

(Продолжение; предыдущее в книге {PENRO1})

Глава 3. Математика и действительность

§3.1. Страна Тор'Блед-Нам

Представим себе, что мы совершаем большое путешествие в некий далекий мир. Назовем его Тор'Блед-Нам. Наша телеметрическая система зарегистрировала сигнал, вывела его на монитор и, отфокусировав изображение, мы увидели следующую картину (рис. 3.1):

Что бы это могло быть? Странного вида насекомое? А может быть, темное озеро с многочисленными втекающими в него ручьями? Или огромный причудливой формы внеземной город, с исходящими в разных направлениях дорогами, которые ведут в расположенные поблизости городки и деревушки? Возможно, это остров – и если это так, то давайте поищем поблизости континент, с которым он связан. Для этого «отойдем назад», т.е. уменьшим увеличение наших приборов раз в 15. И вот – посмотрите-ка – этот новый мир предстал перед нашим взором во всей своей полноте (рис. 3.2):

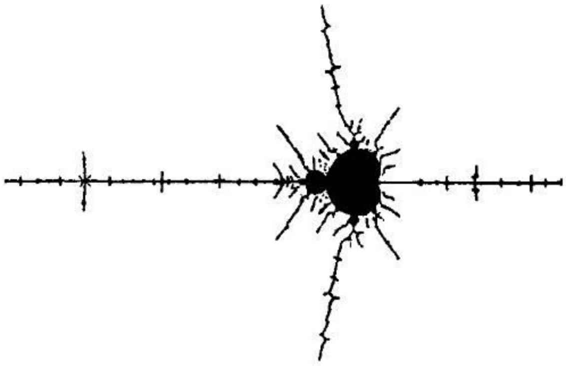


Рис. 3.1. Первый взгляд на новый мир

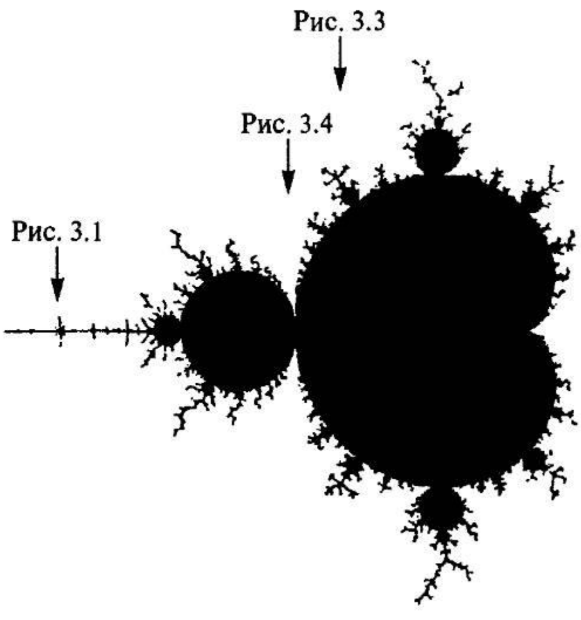


Рис. 3.2. Общий вид Тор'Блед-Нам. Стрелками отмечены области, увеличенные изображения которых даны на рис. 3.1, 3.3 и 3.4

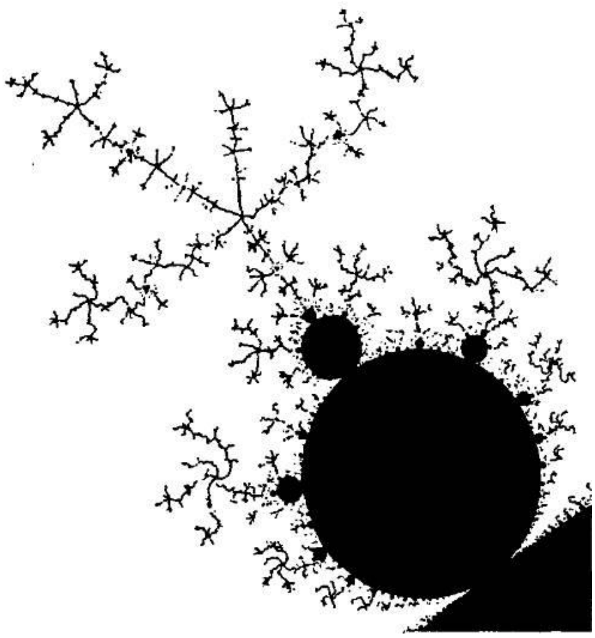


Рис. 3.3. Бородавка с «пятеричностью» своих волоконцев

На рис. 3.2 наш «островок» выглядит как маленькая точка под стрелкой «Рис. 3.1». Все волокна (ручьи, дороги, мосты?), исходящие из первоначального островка, обрываются, за исключением одного – того, что выходит из внутренней части расположенной справа расщелины, и который, в свою очередь, соединен с объектом гораздо большего размера (он изображен на рис. 3.2). Последний, как нетрудно заметить, подобен первоначальному островку, хотя их формы несколько отличаются. При более подробном рассмотрении «береговой линии» выявляются бесчисленные округлые выступы, края которых, в свою очередь, густо усеяны выступами такой же формы. Каждый маленький выступ соединен в каком-нибудь месте с более крупным, и все вместе они образуют бородавчатую структуру, где более крупные выступы покрыты наростами помельче, те – еще более мелкими и т.д. По мере того, как картина становится всё более отчетливой, мы видим мириады мельчайших волокон, исходящих из рассматриваемой структуры. Сами волоконца ветвятся в разных местах, беспорядочно извиваясь. В некоторых частях волокон просматриваются узлы более сложной структуры, неразрешимые при данном увеличении приборов. Ясно, что наш объект – это никакой не остров или континент, и даже не пейзаж. Не исключено, что перед нашим взором чудовищный жук, а то, что мы увидели вначале, – это его детеныш, всё еще соединенный с родителем своеобразной волокнистой пуповиной.

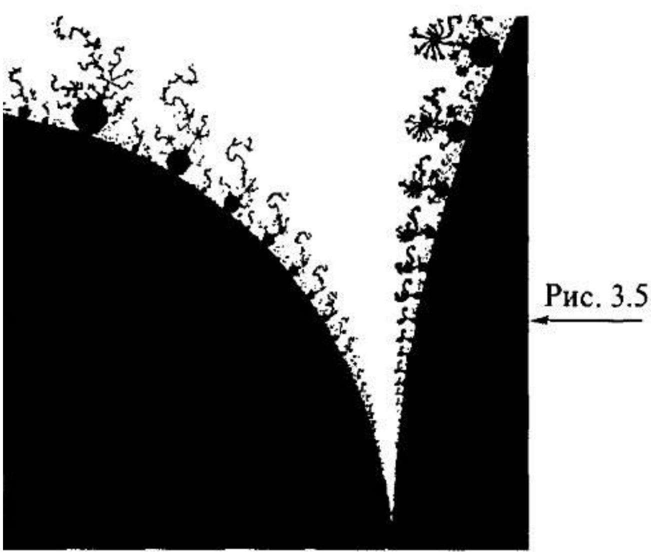


Рис. 3.4. Главная впадина. «Долина морских коньков» едва различима справа внизу

Рис. 3.5. Хвост «морского конька» крупным планом

Давайте исследуем один из наростов у нашего насекомого, для чего увеличим разрешение примерно в десять раз (см. рис. 3.3 – соответствующая область на рис. 3.2. отмечена как «Рис. 3.3»). Своим видом нарост сильно напоминает всё существо целиком, за исключением места соединения. Обратите внимание, что на рис. 3.3 имеется множество точек, в которых сходятся пять волокон. По-видимому, этому конкретному наросту свойственна некая «пятеричность» (точно так же, как для самой верхней «бородавки» на рис. 3.2 характерна определенная «троичность»). На самом деле, если исследовать (на рис. 3.2) расположенный чуть ниже и левее следующий разумного размера нарост, то мы обнаружим у него «семеричность», а у следующего – характерную «девятеричность» и т.д. При углублении во впадину между двумя самыми крупными областями на рис. 3.2, справа будут встречаться наросты с постоянно нарастающим нечетным числом лучей. Давайте всмотримся внимательно вниз вглубь заостренной впадины, повысив увеличение еще в десять раз по сравнению с рис. 3.2 (рис. 3.4). Мы обнаружим множество других мельчайших наростиков на фоне общего беспорядочного завихрения. Справа видны едва различимые спиралевидные структуры, напоминающие «хвосты морских коньков», расположенные в области, которую мы так и назовем – «долина морских коньков». Здесь нам встретятся – если смотреть на это место при достаточно большом увеличении – разнообразные «морские анемоны» или области с богатой флорой. В конце концов, перед нами действительно может быть какой-то экзотический берег – возможно, коралловый риф, изобилующий всевозможными формами жизни. Объект, принятый нами за цветок, при более сильном увеличении может оказаться состоящим из мириада мельчайших и при этом невероятно сложных структур, с многочисленными волокнами и вихреобразными спиралевидными хвостами. Давайте рассмотрим подробнее один из более крупных хвостов морских коньков, а именно – едва различимое образование, обозначенное на рис. 3.4 как «Рис. 3.5» (и соединенное с 29-ричным наростом!). Повысив увеличение в 250 раз, мы увидим изображенную на рис. 3.5 спираль. При этом окажется, что это не обычный хвост: и он тоже состоит из сложнейших вихреобразных структур с многочисленными мельчайшими спиралями и областями в форме осьминогов и морских коньков!

Рис. 3.6. Дальнейшее увеличение места соединения спиралей. В центре едва различим маленький детеныш

Рис. 3.7. При увеличении детеныш обнаруживает сходство с целым миром

Во многих местах видно, что исследуемые нами структуры расположены точно в том месте, где сходятся две спирали. Рассмотрим одно такое место (обозначенное как «Рис. 3.6» на рис. 3.5) с дополнительным 30-кратным увеличением. Посмотрите-ка: в самой середине теперь виднеется странный объект, в котором, однако, есть что-то знакомое. Увеличим изображение еще в шесть раз (рис. 3.7) – появляется крохотный дочерний объект, практически идентичный всей структуре! При более внимательном рассмотрении обнаруживаются некоторые отличия присоединенных к этой субструктуре волокон от тех, что выходят из основной структуры, – новые волокна, закручиваясь, уходят на значительно бóльшие относительные расстояния. И при этом маленькое существо выглядит почти неотличимым от своего родителя, – у него даже есть аналогично расположенные собственные детеныши. Можно было бы исследовать и их, если вновь повысить увеличение приборов. «Внуки» тоже будут напоминать своего общего предка – и нетрудно увидеть, что так может продолжаться до бесконечности. Этот странный мир Тор'Блед-Нам можно исследовать как угодно долго, постоянно увеличивая разрешающую способность нашей системы наблюдения. И тогда перед нами предстанет бесконечное разнообразие: никакие две области не являются в точности одинаковыми, но всем им свойственны общие черты, которые очень быстро становятся узнаваемыми. Знакомые нам уже жукообразные существа появляются на всё меньших и меньших масштабах. Каждый раз при этом расположенные рядом волокнистые структуры отличаются от предыдущих, демонстрируя новые фантастические сцены невероятной сложности.

В какой же странной и удивительно замысловатой по своей структуре стране мы оказались? Не сомневаюсь, что многие читатели уже знакомы с ней, но не все. Это не что иное, как фрагмент абстрактной математики – множество, известное под названием множества Мандельброта.[7] При всей его несомненной сложности оно получается на редкость простым образом! Чтобы как следует объяснить правила построения этого множества, необходимо сначала рассказать о том, что такое комплексные числа. Именно этим я сейчас займусь. Комплексные числа нам понадобятся и в дальнейшем. Они являются неотъемлемой частью структуры квантовой механики и вследствие этого лежат в основе поведения самого мира, в котором мы живем. Кроме того, комплексные числа являют собой одно из великих чудес математики. Чтобы объяснить, что такое комплексные числа, мне сначала потребуется напомнить вам, что подразумевается под термином «действительные числа». Не лишним будет также отметить связь этого понятия с действительностью «реального мира»!

§3.2. Действительные числа

Напомним, что натуральные числа являются целыми величинами:

[7] См. Мандельброт [1986]. Выбранная мною конкретная последовательность коэффициентов увеличения взята из работы Пайтгена и Рихтера [1986], в которой можно познакомиться с большим количеством цветных изображений множества Мандельброта. Другие поразительные иллюстрации можно найти в книге Пайтгена и Заупе [1988].

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...[8] (*1)[9]

Это самый элементарный и фундаментальный вид чисел. Ими можно количественно измерить любую дискретную сущность[10]: можно говорить о двадцати семи овцах в поле, двух вспышках молнии, двенадцати ночах, тысяче слов, четырех беседах, нуле новых идей, одной ошибке, шести отсутствующих, двукратной смене направления и т.д. Натуральные числа можно складывать или перемножать, получая при этом новые натуральные числа.[11] Мы использовали эти числа при обсуждении алгоритмов в предыдущей главе.

Тем не менее некоторые важные математические операции могут всё же вывести нас за пределы мира натуральных чисел. Простейшая из них – вычитание. Для систематического определения вычитания нам понадобятся <u>отрицательные</u> числа.[12] Теперь мы можем выстроить всю систему <u>целых чисел</u>:

... –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... (*2)

Некоторые вещи – такие, как электрический заряд, банковские балансы или даты,[13] измеряются количественно этими числами. Однако сфера применения целых чисел всё же слишком ограничена, поскольку <u>деление</u> одного числа на другое может оказаться неразрешимой задачей в рамках целых чисел.[14] Соответственно, нам понадобятся <u>дроби</u>, или, как их называют, <u>рациональные числа</u>:

$$0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -1,\ 2,\ -2,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\ .$$

Этих чисел достаточно для операций конечной арифметики, но для очень многих задач нам потребуется пойти еще дальше, с тем чтобы охватить бесконечные операции или операции перехода к пределу. Например, хорошо известная – и играющая огромную роль в математике – величина π возникает как результат многих бесконечных выражений.[15] В частности, мы имеем:

---

[8] **В.Э.:** Разумеется, в этой строке приведены <u>нотаты</u> чисел, а не сами числа.

[9] **В.Э.:** Красные метки добавлены мной для последующей ссылки на эти строки.

[10] **В.Э.:** То есть – отнести ее саму к тому или иному таксону классификации N_N или ее соотношение с «единичной сущностью» к таксону классификации N_R.

[11] **В.Э.:** Для каждой отдельной «арифметической операции», например 2 × 2, вместо пенроузовских слов точнее будет сказать так: 1) первичными действиями мы можем убедиться, что если количество «сущностей» относится к таксону 2, и количество элементов в них тоже к таксону 2, то общее количество элементов будет относиться к таксону 4; 2) вторичными же действиями мы можем сопоставить нотатам «2 × 2» нотату «4». Действия этих двух видов нужно видеть за словами «*натуральные числа можно складывать или перемножать*», а если ЭТО не видеть, то уже и не знаешь, что на самом деле происходит.

[12] **В.Э.:** В традиционных изложениях «необходимость» в отрицательных числах появляется из-за того, что «нужно» «систематически определить» вычитание. Пенроуз просто повторяет традиционный подход. Однако этот подход целиком находится в рамках вторичных операций и не затрагивает первичные. Применение такого подхода свидетельствует о том, что связь (математики) с «реальным миром» уже утрачена. А в области первичных операций здесь дело обстоит так, что вдобавок к самим «сущностям» появляется понятие их движения «туда» или «назад» (т.е. линейной ориентации). Например, вавилонский купец закупает зерно (направление +) и продает его (направление –). Пока он продает меньше, чем покупает, «операция вычитания» четко определена. Но когда он продал больше, чем закупил, то получается «отрицательная сущность». Это может означать, например, что он должен покупателю, который ему уже заплатил, но товар еще не получил. В любом случае отрицательные числа в области первичных операций появляются тогда, когда в «сущностях» (т.е. множествах) введена линейная ориентация.

[13] На самом деле при счете дат имеет место некоторое отступление от этого правила, поскольку нулевой год пропускается.

[14] **В.Э.:** Опять дроби вводятся по традиционному приему исключительно с точки зрения вторичных операций (т.е. при утраченной связи с физическим миром). А чтобы эту связь не утрачивать, не надо выпускать из виду первичные операции. В первичных операциях речь идет о соотношениях множеств.

[15] **В.Э.:** Как хорошо известно из школьной математики, число π первоначально вводится как соотношение длины окружности к диаметру. (Даже само обозначение π представляет собой первую букву греческого слова «окружность»). То есть, если мы рассматриваем окружность как некоторое множество точек П, а диаметр как другое множество точек Д, то π будет тот таксон, к которому программа R отнесет соотношение множеств П/Д. С этой точки зрения π ничем не отличается от «рационального» числа. Беда только в том, что П и Д не являются конкретными множествами, и мы не знаем, <u>сколько</u> в них элементов. П и Д являются абстрактными множествами – потенциальными продуктами программы обведения окружности вокруг центра. Так дела с числом π обстоят в области первичных операций. В области же вторичных операций мы можем обнаружить, что некоторые (бесконечные) вычислительные процессы,

$$\pi = 2\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\times\ldots\right),$$

а также

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots\right).$$

Это знаменитые выражения. Первое из них было найдено английским математиком, филологом и криптографом Джоном Уоллисом в 1655 году, а второе – шотландским математиком и астрономом (а также изобретателем первого телескопа-рефлектора) Джеймсом Грегори в 1671 году. Как и π, определенные подобным образом числа не обязаны быть рациональными (то есть представляться в виде m/n, где m и n – целые числа, причем n не равно нулю). Систему чисел необходимо расширить, обеспечив возможность включения в нее таких величин.

Расширенная таким образом система чисел называется системой действительных чисел – тех самых хорошо знакомых нам чисел, что представляются в виде бесконечных десятичных дробей, таких как:

–583,70264439121009538... .

В этом представлении мы получаем следующее известное выражение для числа π:

π = 3,14159265358979323846....

Другими примерами чисел, представимых таким образом, являются квадратные корни (или кубические корни, или корни четвертой степени) из положительных рациональных чисел, такие как:

√2= 1,41421356237309504...

или же квадратные корни (или кубические корни и т.д.) любого положительного числа, как, например, выражение для числа π, найденное великим швейцарским математиком Леонардом Эйлером:

$$\pi = \sqrt{6\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots\right)}.$$

Действительные числа нам в сущности хорошо знакомы – мы с ними сталкиваемся в повседневной жизни. Правда обычно нас интересуют всего лишь приближения к этим числам и мы предпочитаем ограничиваться разложениями, состоящими из небольшого числа десятичных знаков. Тем не менее, в математических утверждениях может потребоваться точное задание действительных чисел и, как следствие, необходимость в некотором бесконечном способе описания наподобие бесконечной десятичной дроби, или какого-нибудь иного бесконечного математического выражения вроде приведенных выше формул для числа π, предложенных Уоллисом, Грегори и Эйлером. (В дальнейшем я буду обычно использовать десятичные дроби, но лишь потому, что они нам наиболее привычны. У математиков есть множество разных и более удовлетворительных способов представления действительных чисел, но нас это здесь не интересует.)

Может создаться впечатление, что представить себе всё бесконечное десятичное разложение целиком невозможно, но это не так. Вот простой пример, когда вся последовательность знаков оказывается явным образом обозримой:

1/3 = 0,333333333333333... .

Многоточие указывает на то, что последовательность троек продолжается бесконечно. Для получения полного представления об этом разложении достаточно знать, что оно действительно состоит из неограниченной последовательности одних лишь троек. У каждого рационального числа есть повторяющееся (или конечное) десятичное представление вроде:

93/74 = 1,2567567567567567...,

где последовательность 567 повторяется неограниченное число раз. Это число тоже оказывается полностью обозримым. Также обозримым является выражение

работающие с нотатами чисел, (три из них приводит Пенроуз: процессы Уоллиса, Грегори и Эйлера) будут приходить к одному и тому же пределу, который мы имеем основания считать числом π. А основания эти возникают из того, что эти (вторичные) вычислительные процессы изоморфны (первичным) конструкторским процессам (таким, как вписывание многогранников в окружность, всё более и более приближающихся к самой окружности).

0,220002222000000222222000000000222222220...,

которое определяет иррациональное число[16] (оно просто состоит из последовательностей нулей и двоек, длины которых каждый раз увеличиваются на единицу), и еще много похожих выражений. В каждом таком случае нам достаточно знать правило, по которому составлено разложение. Знание алгоритма порождения очередной цифры в разложении числа – при условии, что такой алгоритм существует – дает нам способ «увидеть» целиком всё бесконечное десятичное разложение. Действительные числа с алгоритмически порождаемыми десятичными разложениями называются вычислимыми числами (см. также с. 56). (При этом не важно, десятичное это разложение или двоичное. Вычислимыми в этом смысле оказываются одни и те же числа, независимо от использованного основания разложения.) Только что рассмотренные числа π и √2 представляют собой примеры вычислимых чисел. В обоих случаях подробное описание соответствующего правила – задача довольно-таки кропотливая, но, в принципе, нетрудная.

Есть, однако, действительные числа, которые не являются вычислимыми в упомянутом выше смысле.[17] Как мы убедились в главе 2, существуют невычислимые и при этом совершенно четко определенные последовательности. В качестве примера можно рассмотреть десятичное разложение, в котором *n*-я цифра равна 0 или 1 в зависимости от того, останавливается или нет *n*-я машина Тьюринга,[18] производящая действия над числом *n*. В общем случае мы потребуем лишь, чтобы для действительного числа существовало какое-нибудь бесконечное десятичное разложение. Мы не только не требуем существования алгоритма порождения *n*-й цифры, но нам

---

[16] **В.Э.:** Здесь уже видно, что Пенроуз утратил различие между самим числом и его нотатой. Для него это становится одно и то же. Если в строках (*1) или (*2) пренебрежение этим различием можно было считать продиктованным соображениями простоты и краткости изложения, то здесь так считать уже невозможно. Здесь Пенроуз «наобум» конструирует какую-то нотату и считает ее «числом». Раньше у нас сначала существовало число (таксон классификации множеств), потом оно как-то обозначалось нотатой: «IV», «4» или как-то еще. Теперь же дело обстоит наоборот: сначала есть нотата (обозначение), и из того, что существует обозначение, делается вывод, что существует и то, что оно обозначает. (Хороший логический прием! Попробуйте, читатель, применить его в повседневной жизни, например, к обозначениям «бес», «куздра» или «тамизедун»).

[17] **В.Э.:** Здесь рассказ Пенроуза стал уже настолько расплывчатым, что нам обязательно нужно остановиться и разобраться. Числа (согласно Веданской теории) есть таксоны классификации множеств или их соотношений по программам N, R, R′, R″ (можем оставить одну лишь R′, если говорим только о тех числах, о которых сейчас рассуждает Пенроуз). Чтобы число было определено, нужно определить два множества, И и Е (измеряемое и единицу). Если мы это можем сделать, то «число существует». (Аналогично, как для числа *π* мы определяли множества точек П – окружность и Д – диаметр). Пенроуз же полностью перешел от множеств (первичной области) к цифрам (вторичной области) и занялся исключительно конструированием нотат. Хотя такой прием с логической точки зрения и является довольно рискованным (вспомните обозначения «бес», «куздра» и «тамизедун» и соответствующие им объекты – соответствующие ли?), но всё же при определенной натяжке мы можем предположить, что при (произвольно) заданной нотате мы можем далее конструировать и такие множества, соотношению которых данная нотата будет соответствовать. В случае «иррациональных» чисел этот способ построения множеств из нотаты остается довольно туманным, но в принципе ситуация всё же знакомая и допустимая: мы предполагаем, что есть некоторая программа P, строящая множества по нотате; мы не знаем ее алгоритма, но путем бокоанализа создали номиналию (а далее, реалию) ее потенциальных продуктов, и соотношение этих множеств тогда и есть искомое число. Поэтому не будем возражать Пенроузу, когда он, сконструировав нотату, утверждает, что создал число. Но далее Пенроуз начинает говорить о «невычислимых последовательностях», т.е. о «невычислимых числах». Теперь не только множества, определяющие число, не известны, но не известна даже и нотата! Однако нотат, которые вообще нельзя было бы построить, не существует. Любая нотата может быть создана при помощи «машины Луллия» *L*: путем простого комбинирования цифр – правда, не индивидуально, а вкупе со всеми остальными нотатами. (Этот вопрос подробно и исчерпывающе обсуждался в «Канториане» {CANTO}, {CANTO2}). В этом смысле никаких «невычислимых чисел» не существует. (А другие смыслы разберем далее по ходу рассказа Пенроуза).

[18] **В.Э.:** Здесь, значит, мы имеем ситуацию, когда нет не только пары множеств И/Е, но нет даже и нотаты. Вместо нотаты имеется некоторая программа (алгоритм) П, которая будет в нотату ставить 0 или 1 в зависимости от того, что ей выдаст вызываемая ею подпрограмма P (алгоритм которой, разумеется, не известен), определяющая, остановятся ли все *n* ($n \to \infty$) машины Тьюринга T_n (конструкция которых для данного *n*, разумеется, не известна, так как она зависит от множества факторов: см. пенроузовскую главу 2!). (Замечательная точность рассуждений!). Из-за неопределенности P и T_n мы, разумеется, не знаем, какова именно будет эта искомая нотата, но точно знаем, что в любом случае она будет среди продуктов «машины Луллия» *L*. Такова истинная ситуация, (весьма неудачно) характеризуемая Пенроузом словами «*невычислимые и при этом совершенно четко определенные последовательности*».

даже не обязательно знать о существовании какого бы то ни было правила, в принципе определяющего n-ю цифру.[19] Заметим, что вычислимые числа неудобны в работе. Невозможно обойтись одними лишь вычислимыми операциями, даже оперируя вычислимыми числами. Например, в общем случае вычислимым образом невозможно даже решить, равны ли два вычислимых числа друг другу! По этой причине мы будем работать со всеми действительными числами, когда десятичная последовательность может быть любой, а не только, скажем, вычислимой.

В заключение отметим также тождественность действительных чисел, чьи десятичные разложения заканчиваются бесконечной последовательностью девяток, и чисел, чьи разложения заканчиваются бесконечной последовательностью нулей. Например:

$$-27{,}1860999999... = -27{,}1861000000... .$$

§3.3. Сколько же всего действительных чисел?

Давайте остановимся на минутку, чтобы оценить всю колоссальность обобщения при переходе от рациональных чисел к действительным.

Вначале может показаться, что целых чисел больше, чем натуральных, поскольку каждое натуральное число является целым, в то время как некоторые целые числа (а именно отрицательные) натуральными не являются. Аналогично может создаться впечатление, что дробей больше, чем целых чисел. Однако это не так.[20] Согласно мощной и очень красивой теории бесконечных чисел, разработанной в конце XIX века Георгом Кантором – исключительно самобытным немецким математиком русского происхождения,[21] – общее число дробных чисел, общее количество всех целых чисел и число всех натуральных чисел равны одному и тому же бесконечному числу, обозначаемому $\aleph_0$ («алеф-нуль»). (Удивительно, что похожая идея была частично предвосхищена еще за 250 лет до этого в начале XVII века великим итальянским физиком и астрономом Галилео Галилеем. Мы вспомним о некоторых других достижениях

[19] Насколько мне известно, точка зрения, согласно которой для любого действительно (действительного? – *В.Э.*) числа должно существовать некое – пусть неэффективное и даже совершенно неопределимое в рамках заданной формальной системы (см. главу 4) – правило, позволяющее определить его n-й знак, является вполне непротиворечивой, хотя и нетрадиционной. Я сильно надеюсь на то, что этот подход действительно непротиворечив, поскольку именно этой точки зрения я сам больше всего хотел бы придерживаться!

[20] **В.Э.:** Больше или не больше целых чисел, чем натуральных, и больше или не больше дробных чисел, чем тех же натуральных, – это зависит от того, как мы здесь определяем понятия «больше» или «одинаково», как мы измеряем их «количество». Классическая математика, создавшая алмазный фонд этой науки – дифференциальное и интегральное исчисление – всегда рассматривала математические соотношения как результаты некоторых процессов (функций). Если функция $\varphi(x)$ и функция $\psi(x)$ при $x \to \infty$ обе тоже стремились к бесконечности, то соотношение $\varphi(x) / \psi(x)$, т.е. соотношение ∞/∞ отнюдь не предполагалось обязательно равным 1, а определялось по (золотому!) правилу Лопиталя соотношением производных функций. Если мы сохраняем этот дух классической математики и смотрим на числа как на результат некоторых процессов (а они и есть потенциальные продукты программ, т.е. процессов!), то $\infty/\infty \neq 1$, а $\infty/\infty = 2$ для соотношения целых и натуральных чисел и $\infty/\infty = \infty$ для соотношения дробных и натуральных чисел. «Великое открытие» Кантора состояло в том, что он вводом своего «взаимно-однозначного соответствия» установил, что $\infty/\infty = 1$ (всегда!), то есть, он принял такой постулат и тем самым отступился от духа классической математики, пришедшей в этом месте к правилу Лопиталя уже примерно за 200 лет до Кантора. Оценку этому постулату Кантора мы дадим ниже.

[21] **В.Э.:** Георг Кантор был сыном датчанина (лютеранина) и немки (католички), родившимся в России, в Санкт-Петербургской колонии иностранных торговцев, но в 11 лет увезенный родителями в Германию, где и прожил всю остальную жизнь. Кантор был психически болен, страдал маниакально-депрессивным психозом; в депрессивной фазе он прекращал работу и ему давали отпуска на его профессорской работе в Галльском университете и помещали в психиатрическую клинику (каковая имелась при том же университете), а в маниакальной фазе своей болезни Кантор сочинял разные неправильные «теории», например теорию бесконечных множеств и теорию о том, что Шекспира не существовало, а его сочинения написал Бэкон (в ранней стадии канторовской болезни) или что не существовало ни Шекспира, ни Бэкона, а их сочинения написал какой-то неизвестный тайный гений (в поздней стадии канторовской болезни). Болезнь Кантора может вызвать сочувствие, но сочувствия не может вызвать тот факт, что маниакальный бред психически больного человека был принят в качестве «научной истины» такой наукой как математика (!!!). Георг Кантор умер в психиатрической клинике своего университета.

Галилея в главе 5.) Равенство количества целых чисел количеству натуральных чисел видно из следующего взаимно-однозначного соответствия:

Целые числа		Натуральные числа
0	$\leftrightarrow$	0
-1	$\leftrightarrow$	1
1	$\leftrightarrow$	2
-2	$\leftrightarrow$	3
2	$\leftrightarrow$	4
-3	$\leftrightarrow$	5
3	$\leftrightarrow$	6
-4	$\leftrightarrow$	7
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$-n$	$\leftrightarrow$	$2n-1$
n	$\leftrightarrow$	$2n$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Обратите внимание,[22] что каждое целое число (в левом столбце) и каждое натуральное число (в правом столбце) встречаются один и только один раз в своем списке. В канторовской теории множеств именно существование такого рода взаимно-однозначного соответствия устанавливает факт равенства числа объектов в левом столбце числу объектов в правом столбце. Таким образом, число целых чисел действительно равно числу натуральных чисел. В данном случае это число бесконечно, но это не имеет значения. (Единственное необычное свойство бесконечных чисел состоит в том, что даже если мы исключим некоторые элементы одного из списков, мы можем установить взаимно-однозначное соответствие между элементами двух списков). Аналогичным, хотя и несколько более сложным образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между дробными и целыми числами. (Для этого можно использовать какой-либо из способов представления пар[23] натуральных чисел – числителей и знаменателей – через отдельные натуральные числа; см. главу 2, с.50). Множества, которые можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с рядом натуральных чисел, называются счетными; таким образом, счетные бесконечные множества – это множества, состоящие из $\aleph_0$ элементов. И, как мы только что убедились, множество целых чисел, равно как и множество дробных чисел, является счетным.[24]

Существуют ли множества, не являющиеся счетными? Несмотря на расширение натуральной системы чисел сначала целыми, а затем и рациональными числами, общее число рассматриваемых объектов не увеличилось. Как мы убедились, число объектов во всех случаях осталось счетным. У читателя теперь может создаться впечатление, что все бесконечные множества

---

[22] **В.Э.:** Больше всего, читатель, обратите внимание на то, что элементы, перечисленные в левом списке, – конечны (т.е. в каждой строке списка имеется только один элемент). Лишь поэтому (а вовсе не потому, что строк в списке недостаточно много!) здесь нельзя проводить знаменитый «диагональный процесс» и обнаруживать ценнейший вывод, что не все целые числа перенумерованы натуральными числами.

[23] **В.Э.:** Обратите внимание, читатель, что теперь в перенумерованном списке в каждой его строке содержится уже пара элементов, т.е. их два. Это больше, чем в предыдущем случае, но всё же еще всего лишь конечное число, и великолепный диагональный процесс пока провести невозможно.

[24] **В.Э.:** На самом деле «счетны» ВСЕ бесконечные множества. Кантор установил постулат, что $\infty/\infty \equiv 1$, и несчетных множеств не существует. Иллюзию существования «несчетных» множеств создает только «диагональный метод». А этот процесс можно будет проводить, как только количество элементов в строке «пронумерованного списка» станет бесконечным. Обратите внимание читатель: возможность проведения диагонального процесса не имеет никакого отношения к количеству строк в списке (о котором после этого процесса будут делаться выводы), а имеет отношение только к количеству элементов в самой строке.

счетны. Это не так, поскольку ситуация меняется коренным образом[25] при переходе к действительным числам. Одним из замечательных достижений Кантора явилось доказательство того, что действительных чисел больше, чем натуральных. При этом Кантор применил так называемый диагональный процесс, который упоминался в главе 2 и который Тьюринг использовал в своем доказательстве неразрешимости проблемы остановки для машин Тьюринга. Доказательство Кантора, как и более позднее доказательство Тьюринга, – это доказательство от противного. Предположим, что утверждение, справедливость которого мы хотим установить, на самом деле ложно, то есть множество действительных чисел счетно. Тогда множество действительных чисел в интервале от 0 до 1 должно быть заведомо счетным и должен существовать какой-нибудь список,[26] устанавливающий взаимно-однозначное соответствие между рассматриваемым множеством действительных чисел и множеством натуральных чисел, наподобие вот этого:

Натуральные числа		Действительные числа
0	↔	0,**1**0357627183...
1	↔	0,1**4**329806115...
2	↔	0,02**1**66095213...
3	↔	0,430**0**5357779...
4	↔	0,9255**0**489101...
5	↔	0,59210**3**43297...
6	↔	0,636679**1**0457...
7	↔	0,8705007**4**193...
8	↔	0,04311737**8**04...
9	↔	0,786350811**5**0...
10	↔	0,4091673889**1**...
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Жирным шрифтом выделены диагональные десятичные знаки. В данном случае эти цифры равны:

1, 4, 1, 0, 0, 3, 1, 4, 8, 5, 1, ...

Метод диагонального процесса состоит в построении действительного числа (в интервале от 0 до 1), чье десятичное разложение (после десятичной запятой) отличается в каждом разряде от соответствующего числа приведенной выше последовательности. Для определенности положим, что цифра данного разряда равна 1, если цифра соответствующего разряда на диагонали отлична от 1, и равна 2, если цифра на диагонали равна 1. Таким образом, в рассматриваемом случае получается такое действительное число:

0,21211121112... .

Это действительное число не может быть в списке,[27] поскольку оно отличается от первого числа в первом десятичном разряде (после десятичной запятой), от второго числа – во втором разряде,

[25] **В.Э.:** Верно! Ситуация меняется коренным образом: теперь в каждой строке стало бесконечное количество элементов (цифр)! Ур-ра-а-а!!! Теперь можно проводить диагональный процесс! – Но что менялось-то? Количество строк? Или длина строки? Ясно, что решающим было изменение длины строки. А выводы будут делаться о количестве строк! Но, читатель, это ведь логическая ошибка чрезвычайной грубости: выводы, которые должны относиться к длине строки, переносить на количество строк!

[26] **В.Э.:** Однако элементарно очевидно, что этот список, если он претендует на то, что он содержит ВСЕ «действительные числа» (точнее, их нотаты) указанного интервала, то он должен иметь вправо длину n цифр, а вниз длину 10^n строк. Если он имеет не такое соотношение длин, то (вариант 1) он не содержит все требуемые «числа», а если он содержит все «числа», то (вариант 2) соотношение длин таково ($n/10^n$). Теперь выбирайте, мистер Пенроуз, какой вариант Вы подразумеваете? (Или никакой не подразумеваете: в тумане пребываете?). Постулат Кантора ($\infty/\infty \equiv 1$) заставляет Вас полагать, что $n/10^n = 1$ и что $10^n = n$, но это неминуемо приведет Вас к противоречиям.

[27] **В.Э.:** Может или не может это «число» быть в списке – это зависит от того, какую концепцию своей таблицы Пенроуз принял из двух вариантов, предложенных ему в предыдущей моей сноске. Если он принял концепцию (1) (матрица квадратна), то полученного «числа» действительно нет в таблице, и этот

от третьего числа – в третьем разряде и т.д. Таким образом, мы приходим к противоречию,[28] поскольку полагали, что рассматриваемый список содержит все действительные числа в интервале от 0 до 1. Из этого противоречия следует истинность утверждения, которое нам требовалось доказать, – а именно, что не существует взаимно-однозначного соответствия между множеством действительных чисел и множеством натуральных чисел и, соответственно, что число действительных чисел больше[29] числа рациональных чисел и не является счетным.

Число действительных чисел равно бесконечному числу, обозначаемому *C*. (Здесь *C* является сокращенным обозначением слова континуум – другого названия системы действительных чисел.) Может возникнуть вопрос, почему мы не обозначаем это число, например, $\aleph_1$. Символ $\aleph_1$ на самом деле обозначает следующее за $\aleph_0$ бесконечное число, а вопрос о том, верно ли утверждение $C = \aleph_1$ – это так называемая континуум-гипотеза, – представляет собой знаменитую и пока что нерешенную проблему.[30]

При этом следует отметить, что множество вычислимых чисел счетно.[31] Пересчитать их можно просто перечислив по порядку машины Тьюринга, порождающие действительные числа (то есть машины, последовательно порождающие цифры каждого разряда действительных чисел). При этом можно исключить из списка любую машину Тьюринга, порождающую действительное число, которое уже встречалось ранее в списке. Поскольку множество машин Тьюринга счетно, то, следовательно, счетным также должно быть и множество вычислимых действительных чисел. Почему же нельзя применить диагональный процесс к этому списку с тем, чтобы породить новое не включенное в список вычислимое число? Ответ состоит в том, что в общем случае невозможно с помощью вычислений решить, следует ли ту или иную машину Тьюринга

результат опровергает предположение, что в квадратной матрице могут содержаться ВСЕ указанные числа. (К соотношению количества натуральных и действительных чисел этот результат никакого отношения не имеет). Если же Пенроуз принял концепцию (2) (длина матрицы вправо *n* цифр, а вниз – 10^n строк), то диагональный процесс охватил не всю таблицу, а только ее верхнюю часть, и «построенный» диагональным процессом элемент имеется в таблице, – но только в неохваченной диагональным процессом ее части. Так что надо просто мыслить четко и ясно, выбирать какой-нибудь один определенный вариант, а не пребывать в «суперпозиции» обоих вариантов сразу.

[28] **В.Э.:** Самое главное, фундаментальное, противоречие кроется, конечно, в собственно постулате Кантора о том, что $\infty/\infty \equiv 1$. Нет никакой необходимости вводить этот постулат. Ситуация предельно просто объясняется и ясна «как божий день» без него – и по «лезвию Оккама» этот постулат должен лететь в мусорную яму. Но вместо этого на его основе строится запутанное, уродливое здание некоего подобия «теории», не соответствующей никакой реальности ни физического, ни платоновского мира, «теории», принципиально лишенной возможности когда-либо быть где-нибудь примененной и приносить какую-либо пользу людям (за исключением, разумеется, тех профессоров, которые ею занимаются, выдавая это за «научную деятельность» и выманивая таким способом деньги от общества).

[29] **В.Э.:** С тем, что действительных чисел больше, чем рациональных, мы можем согласиться по тем же соображениям, по которым мы соглашаемся, что целых чисел больше, чем натуральных (т.е. – ДО введения постулата Кантора о том, что $\infty/\infty \equiv 1$). Однако, если мы рассуждаем в рамках системы, принявшей этот постулат, то у нас НЕТ оснований считать, что действительных чисел больше, чем рациональных. Мнение о таком превосходстве количества опирается, во-первых, на диагональный процесс, но возможность проведения этого процесса зависит НЕ от количества строк в «пронумерованном списке», а от бесконечности длины самих строк, и перенос выводов о длине строк на их количество представляет собой элементарную логическую ошибку. Во-вторых, с бесконечной длиной строк связана и другая особенность «списка действительных чисел»: его нельзя построить по линейному алгоритму, т.е. строя одну строку за другой (как строились списки целых и рациональных «чисел», состоящие из конечных строк). Чтобы таким же образом (одну строку за другой) строить список «действительных чисел», алгоритм должен был бы «перепрыгивать через бесконечность» каждой очередной строки, чтобы приступить к созданию следующей. Это обстоятельство облегчает адептам Кантора пребывать во мнении, что действительных чисел якобы больше рациональных даже если принят постулат Кантора ($\infty/\infty \equiv 1$). Но существуют нелинейные алгоритмы создания «всех действительных чисел», и их изучение показывает, что нет абсолютно никаких оснований полагать, что это множество чем-то принципиально отличается от других бесконечных множеств. **Если принят постулат Кантора, то ВСЕ бесконечности одинаковы**. (И, следовательно, нет ни необходимости, ни смысла этот постулат принимать).

[30] **В.Э.:** Если мы о канторовском диагональном процессе знаем то, что мы теперь знаем, то «проблема континуума» сводится к вопросу: «Есть ли какое-нибудь промежуточное значение между *конечно* и *бесконечно* в отношении длины строк той матрицы, в которой мы (вслед за Пенроузом) проводили диагональный процесс?». (Великая научная проблема – ничего не скажешь!)

[31] **В.Э.:** Поскольку на самом деле множество действительных чисел тоже «счетно», то данное утверждение Пенроуза не представляет интереса.

включать в список, поскольку для этого мы должны были бы иметь возможность решить проблему остановки. Некоторые машины Тьюринга, начав порождение цифр действительного числа, могут зависнуть и оказаться уже не в состоянии выдать очередную цифру (поскольку они «не остановятся»). Не существует вычислимого способа, который позволил бы решить, какие именно машины Тьюринга зависнут таким образом. Это, в сущности, и есть проблема остановки. Значит, хотя метод диагонального процесса и породит некоторое действительное число, последнее не будет вычислимым. На самом деле, это рассуждение может использоваться для доказательства существования невычислимых чисел. Именно в этом ключе выдержано описанное в предыдущей главе тьюринговское доказательство существования классов алгоритмически неразрешимых задач. Другие области применения диагонального процесса будут рассмотрены дальше.

§3.4. «Действительность» действительных чисел

Если отвлечься от понятия вычислимости, то действительные числа называются «действительными», потому что они, как представляется, дают величины, необходимые для измерения[32] расстояний, углов, времени, энергии, температуры и многих других геометрических и физических параметров. Однако связь абстрактно определенных «действительных» чисел с физическими величинами не так проста, как может показаться. Действительные числа следует рассматривать скорее как некоторую математическую идеализацию, чем как реальную меру физически объективных величин. Система действительных чисел обладает, например, таким свойством, что между любыми двумя действительными числами (вне зависимости от их близости) существует третье действительное число. При этом совершенно не ясно, можно ли обоснованно утверждать то же самое о физических расстояниях или промежутках времени. Если мы продолжим дробить физическое расстояние между двумя точками, то мы в конце концов достигнем масштабов столь малых, что само понятие расстояния в обычном его смысле станет бессмысленным. Предполагается, что это действительно имеет место на масштабах, характерных для квантовой теории гравитации, которые в 10^{20} раз[33] меньше размеров субатомных частиц. Но чтобы отобразить действительные числа, нам потребуется дойти до сколь угодно более мелких масштабов, которые, например, в 10^{200}, 10^{2000} или даже в $10^{10^{200}}$ раз меньше размеров частиц.[34] И совершенно не ясно, есть ли какой бы то ни было физический смысл у столь абсурдно малых масштабов. То же самое можно сказать и в отношении столь же малых интервалов времени.

Система действительных чисел выбрана в физике в силу ее математической полезности, простоты и изящества, а также поскольку она согласуется на очень широком интервале масштабов с физическими понятиями пространства и времени. Она выбрана не потому, что мы будто бы знаем, что она согласуется с упомянутыми физическими величинами на всех масштабах. Такое согласие вполне может не иметь места на очень малых пространственных и временных масштабах. Обычные расстояния измеряются при помощи линейки, но линейка оказывается «зернистой» при переходе к масштабам образующих ее атомов. Само по себе это не мешает нам продолжать использовать действительные числа подходящим образом, но измерение меньших расстояний требует уже гораздо большей изобретательности. По крайней мере, мы должны быть готовы предположить, что на очень-очень малых масштабах могут встречаться принципиальные трудности с расстояниями. Как оказывается, природа оказалась к нам на удивление благосклонна, сделав те самые действительные числа, которые мы привыкли повседневно применять для описания предметов на макро-масштабах, пригодными для описания расстояний гораздо меньших атомных – по крайней мере, на масштабах, равных одной сотой «классического» диаметра элементарной частицы – такой, как электрон или протон, – и, по-

[32] **В.Э.:** Нет, не поэтому – и странно, что Пенроуз этого не знает! Действительные (Real – реальные) числа исторически получили такое название в противоположность «имагинарным» («воображаемым») числам, таким, как i, –i, 2i и т.д. (А объединения «реальных» и «воображаемых» чисел стали называться «комплексными»).

[33] Напомним, что 10^{20} означает число 100˙000˙000˙000˙000˙000˙000, то есть единицу с двадцатью нулями.

[34] **В.Э.:** Вот, поэтому-то и не годится никакая другая концепция числа, кроме той, которую дает Веданская теория: число – это потенциальный продукт программы, а программу потенциально можно продолжать сколь угодно далеко.

видимому, вплоть до «масштабов квантовой теории гравитации», что на двадцать порядков меньше размеров таких частиц! Это пример исключительно сильной экстраполяции нашего опыта. Сфера применимости привычного понятия расстояния, измеряемого действительными числами, по-видимому, простирается до самых далеких квазаров и еще дальше. Общий диапазон измеримых расстояний составляет 10^{42}, а может быть, 10^{60} или даже больше. Кстати, сомнения в правомерности использования системы действительных чисел высказывались не так уж часто. Почему же мы так уверены в том, что эти числа дают точное описание физических явлений, хотя реально об их применимости мы знаем лишь в весьма ограниченном диапазоне масштабов? Должно быть, эта уверенность – возможно, неверная – основывается на (правда, не очень часто признаваемых) логическом изяществе, внутренней согласованности и математической мощи системы действительных чисел в сочетании с верой в глубинную математическую гармонию природы.[35]

§3.5. Комплексные числа

Оказывается, что действительные числа – это не единственная математически мощная и изящная система чисел. Система действительных чисел всё же не лишена некоторых неудобств. Например, квадратные корни можно извлекать только из положительных чисел (или нуля), но никак не из отрицательных чисел.[36] С математической точки зрения – и отвлекаясь пока что от вопроса о непосредственной связи с физическим миром – было бы очень удобно иметь возможность извлекать квадратные корни как из положительных, так и из отрицательных чисел. Давайте постулируем существование, или попросту «изобретем» квадратный корень из числа –1. Обозначим его буквой i. Тогда мы имеем:

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Величина i, конечно же, не может быть действительным числом, поскольку произведение действительного числа на самого себя всегда положительно (или равно нулю, если само число равно нулю). Поэтому числа, квадраты которых отрицательны, обычно называют мнимыми. Следует, однако, отметить, что эти «мнимые» числа не менее реальны, чем ставшие уже привычными «действительные» числа. Как я уже отмечал выше, связь таких «действительных» чисел с физической реальностью далеко не столь непосредственна и убедительна, как может показаться на первый взгляд, и основана на математической идеализации о допустимости бесконечного уточнения, которая не имеет ясного априорного обоснования в природе.

Имея квадратный корень из –1, можно без особого труда получить квадратные корни для всех действительных чисел. Если a является положительным действительным числом, то величина

$$\mathrm{i} \times \sqrt{a}$$

есть квадратный корень из отрицательного действительного числа $-a$. (У этого числа есть еще другой квадратный корень, а именно $-\mathrm{i} \times \sqrt{a}$.) Ну, а что же можно сказать о самом числе i? Есть ли у него квадратный корень? Разумеется есть, поскольку, как легко проверить, величина

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

[35] **В.Э.:** Ну, весь этот абзац показывает, что у Пенроуза нет глубокого понимания природы чисел. Концепция Веданской теории по этому вопросу была изложена в Предисловии к настоящему тому.

[36] **В.Э.:** То, что (в системе действительных чисел) невозможно извлечь квадратный корень из отрицательного числа, является следствием того обстоятельства, что $-a \times -a = +a$. В свою очередь, это обстоятельство (вторичных операций) в области первичных операций вытекает из того, что (при линейной ориентации) дважды поменяв направление, мы получаем исходную ориентацию. Если ЭТО понимать, то уже в общем-то нетрудно догадаться, что для того, чтобы при двойном изменении ориентации получить противоположное направление, каждое из этих двойных изменений должно быть не на «полный оборот» (на 180°), а на «пол-оборота» (на 90°). То есть, от линейной ориентации (на прямой) нужно перейти к планарной ориентации (на плоскости). Вот, к этому выводу математика и шла – только долгими, трудными и окольными путями – и дальнейший рассказ Пенроуза показывает, что даже и теперь даже и он не очень-то хорошо понимает глубинную сущность «комплексных чисел». А она проста: никаких таинственных неизвлекаемых корней, никаких «мнимых» чисел; просто ротация – элементарное вращение.

(равно как и та же величина, взятая с отрицательным знаком), будучи возведена в квадрат, равна i. А у этой величины, в свою очередь, есть квадратный корень? Ответ опять положительный: квадрат числа

$$\sqrt{\frac{1+1/\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-1/\sqrt{2}}{2}}$$

или того же числа, взятого с отрицательным знаком, действительно равен $(1 + i)/\sqrt{2}$.

Обратите внимание, что при образовании такого рода величин мы позволили себе складывать действительные и мнимые числа, а также умножать наши числа на произвольные действительные числа (или делить их на произвольные ненулевые действительные числа, а это то же самое, что умножать их на обратные величины). Получаемые таким образом объекты называются комплексными числами. Комплексное число это число вида:

$$a + ib,$$

где a и b – это действительные числа, называемые, соответственно, действительной и мнимой частью комплексного числа. Правила сложения и умножения двух таких чисел вытекают из обычных правил (школьной) алгебры с одним дополнительным правилом $i^2 = -1$:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Удивительное дело: к созданию этой системы чисел нас подтолкнуло желание иметь возможность извлечения квадратных корней из любых чисел. Эта цель достигнута, хотя само по себе это еще не очевидно. Но новая система чисел позволяет делать гораздо больше: безнаказанно извлекать кубические корни, корни пятой степени, корни девяносто девятой степени, корни π-й степени, корни степени $1 + i$ и т.д.[37] (это смог доказать еще в XVIII веке великий математик Леонард Эйлер). В качестве другого примера волшебных свойств комплексных чисел рассмотрим довольно сложные на вид тригонометрические формулы, которые проходят в школе. Так, синус и косинус суммы двух углов

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

представляют собой, соответственно, просто-напросто мнимую и действительную части гораздо более простого (и легче запоминаемого!) комплексного уравнения[38]:

$$e^{iA+iB} = e^{iA}e^{iB}.$$

Всё, что нам нужно здесь знать, это «формула Эйлера» (по-видимому, полученная за много лет до Эйлера замечательным английским математиком XVI века Роджером Котсом):

$$e^{iA} = \cos A + i \sin A,$$

которую мы теперь подставим в приведенное выше уравнение. В результате имеем:

$$\cos(A + B) + i \sin(A + B) = (\cos A + i \sin A)(\cos B + i \sin B),$$

и, выполнив умножение в правой части, получим искомые тригонометрические соотношения.

Более того, любое алгебраическое уравнение

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + ... + a_nz^n = 0$$

---

[37] **В.Э.:** В области первичных операций (над множествами) это означает, что ротация (вращение) является гораздо более совершенным и завершенным видом движения, нежели смена направления «туда» или «сюда». Раз (введением отрицательных чисел) вообще ввели учет ориентации над метрическими числами, то невозможно было уже остановиться, пока не дошли до ротации и не получили наконец совершенную систему чисел.

[38] Величина e = 2,7182818285... (основание натуральных логарифмов, иррациональное число, по своему значению для математики сравнимое с числом π) определяется как

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{1\times2\times3} + \dots,$$

а e^z означает степень z от e, которая равна

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\times2} + \frac{z^3}{1\times2\times3} + \dots .$$

(где a_0, a_1, a_2, ..., a_n являются комплексными числами и $a_n \neq 0$) всегда имеет своим решением некоторое комплексное число z. Например, существует комплексное число, удовлетворяющее соотношению:

$$z^{102} + 99z^{33} - \pi z = -417 + \mathrm{i},$$

хотя это совершенно не очевидно!

Это общее свойство иногда называют «основной теоремой алгебры». Многие математики XVIII века старались доказать этот результат. Получить удовлетворительное доказательство в общем случае оказалось не под силу даже Эйлеру. И только в 1831 году великий математик и естествоиспытатель Карл Фридрих Гаусс предложил потрясающий по своей оригинальности ход рассуждений и представил первое общее доказательство. Ключевым компонентом этого доказательства было применение топологических[39] рассуждений к геометрическому представлению комплексных чисел.

На самом деле Гаусс не был первым, кто использовал геометрическое представление комплексных чисел. Уоллис сделал то же самое примерно за двести лет до Гаусса, хотя далеко не столь результативно. Геометрическое представление комплексных чисел обычно связывают с именем Жана Робера Аргана – швейцарского бухгалтера, описавшего это представление в 1806 году, хотя полное описание этого представления было на самом деле дано девятью годами раньше норвежским геодезистом Каспаром Весселем. Согласно этой традиционной (хотя и не совсем правильной с исторической точки зрения) терминологии, я буду называть стандартное геометрическое представление комплексных чисел плоскостью Аргана.

Плоскость Аргана представляет собой обычную евклидову плоскость со стандартными декартовыми координатами x и y, где x обозначает расстояние по горизонтали (положительное вправо и отрицательное влево), а y – расстояние по вертикали (положительное вверху и отрицательное внизу). В этом случае комплексное число

$$z = x + \mathrm{i}y$$

представляется точкой на плоскости Аргана с координатами

$$(x, y)$$

(рис. 3.8). Обратите внимание, что число 0 (рассматриваемое как комплексное число) соответствует началу координат, а число 1 – одной из точек на оси x.

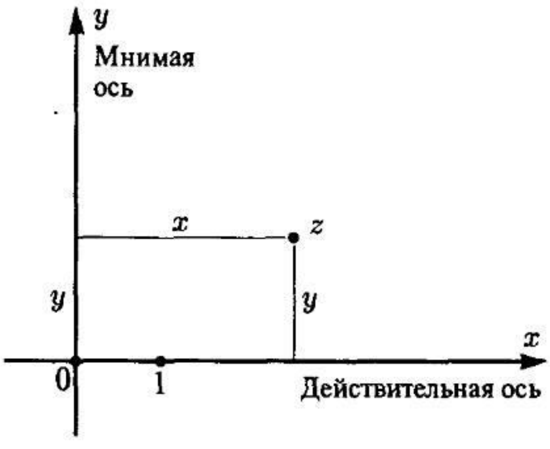


Рис. 3.8. Изображение комплексного числа $z = x + \mathrm{i}y$ на плоскости Аргана

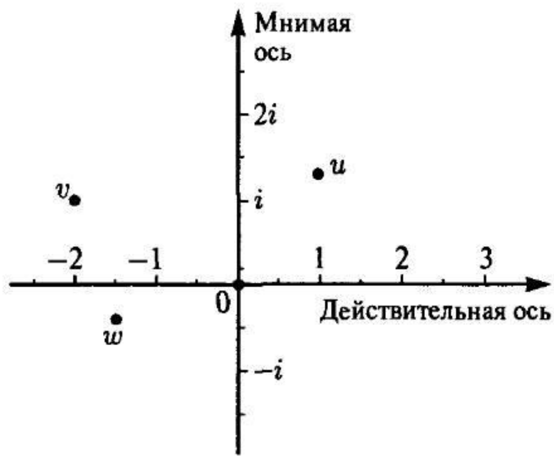


Рис. 3.9. Расположение чисел $u = 1 + \mathrm{i}\,1{,}3$, $v = -2 + \mathrm{i}$, $w = -1{,}5 - \mathrm{i}\,0{,}4$ на плоскости Аргана

Плоскость Аргана есть просто способ геометрически наглядной организации семейства комплексных чисел. Такое представление не является для нас чем-то совершенно новым. Мы уже знакомы с геометрическим представлением действительных чисел – в виде прямой линии, простирающейся на неограниченное расстояние в обоих направлениях. Одна из точек обозначена как 0, а еще одна – как 1. Точка 2 смещена относительно точки 1 ровно настолько, насколько точка 1 смещена относительно точки 0; точка 1/2 расположена в точности посередине между

[39] Слово «топологический» означает, что речь идет о разделе геометрии, – иногда называемом «геометрией резиновой поверхности», – в котором расстояния не имеют никакого значения, а важны только свойства непрерывности объектов.

точками 0 и 1; точка –1 расположена так, что точка 0 находится в точности посередине между точками –1 и 1, и т.д., и т.п. Отображенное таким образом множество действительных чисел называется действительной прямой. В случае комплексных чисел у нас есть уже целых два действительных числа – a и b – которые могут рассматриваться как координаты комплексного числа $a + \mathrm{i}b$. Эти два числа дают нам две координаты точки на плоскости, в данном случае – на плоскости Аргана. Для примера я указал на рис. 3.9 приблизительные положения комплексных чисел

$$u = 1 + \mathrm{i}\ 1{,}3,\quad v = -2 + \mathrm{i},\quad w = -1{,}5 - \mathrm{i}\ 0{,}4.$$

Теперь основные алгебраические операции сложения и умножения комплексных чисел приобретают ясную геометрическую интерпретацию. Рассмотрим сначала сложение. Предположим, что u и v это два комплексных числа, представленные на плоскости Аргана в соответствии с описанной выше схемой. Тогда сумма этих двух чисел $u + v$ представляется «векторной суммой» двух точек, то есть точка $u + v$ находится на месте недостающей вершины параллелограмма, образованного точками u, v и началом координат 0. Нетрудно убедиться, что эта конструкция (рис. 3.10) действительно дает сумму двух чисел, но соответствующее доказательство я здесь опускаю.

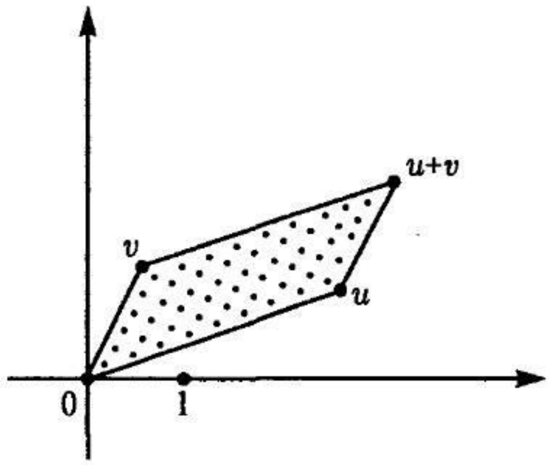


Рис. 3.10. Сумма $u + v$ двух комплексных чисел определяется по правилу параллелограмма

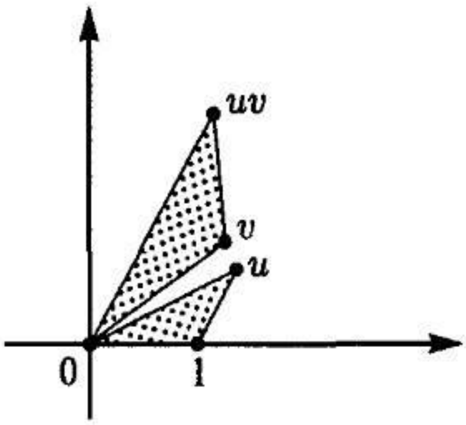


Рис. 3.11. Произведение uv двух комплексных чисел u и v – это такое число, что треугольник, образованный точками 0, v и uv, подобен треугольнику, образованному точками 0, 1 и u. То же самое можно сформулировать иначе: расстояние точки uv от 0 равно произведению расстояний от 0 до точек u и v, а угол между uv и действительной (горизонтальной) осью равен сумме углов между этой осью и отрезками к точкам u и v

Произведение uv двух комплексных чисел тоже имеет простую, хотя и, быть может, несколько менее очевидную геометрическую интерпретацию (рис. 3.11). (Я опять опускаю доказательство.) Угол при начале координат между 1 и uv равен сумме углов между 1 и v и между 1 и u (все углы измеряются против часовой стрелки), а расстояние точки uv от начала координат равно произведению расстояний от начала координат до u и v. Это эквивалентно утверждению, что треугольник, образованный точками 0, v и uv подобен (и ориентирован подобно) треугольнику, образованному точками 0, 1 и u. (Энергичные читатели, не знакомые с такого рода построениями, могут сами убедиться в том, что эти построения непосредственно следуют из только что приведенных алгебраических правил сложения и умножения комплексных чисел, также как и упомянутые выше тригонометрические тождества.)

§3.6. Построение множества Мандельброта

Теперь мы можем рассмотреть, как определяется множество Мандельброта. Пусть z – это некоторое произвольное комплексное число. Каковым бы ни было это число, оно представляется некоторой точкой на плоскости Аргана. Рассмотрим теперь отображение, при котором z превращается в новое комплексное число, равное

$$z \to z^2 + c,$$

где c есть некое фиксированное (то есть заданное) комплексное число. Числу $z^2 + c$ будет сопоставляться некоторая другая точка на плоскости Аргана. Например, если c равно числу 1,63 − i4,2, то z отображается согласно формуле

$$z \to z^2 + 1{,}63 - \mathrm{i}4{,}2,$$

так что, в частности, число 3 превратится в

$$3^2 + 1{,}63 - \mathrm{i}4{,}2 = 9 + 1{,}63 - \mathrm{i}4{,}2 = 10{,}63 - \mathrm{i}4{,}2,$$

а число −2,7 + i0,3 в

$$(-2{,}7 + \mathrm{i}0{,}3)^2 + 1{,}63 - \mathrm{i}4{,}2 = (-2{,}7)^2 - (0{,}3)^2 + 1{,}63 + \mathrm{i}\{(-2{,}7)(0{,}3) - 4{,}2\} = 8{,}83 - \mathrm{i}5{,}82.$$

Когда числа становятся громоздкими, вычисления лучше выполнять на компьютере.

Теперь, каково бы ни было число c, число 0 превращается, согласно принятой схеме, в число c. А что же можно сказать о самом числе c? Оно превращается в $c^2 + c$. Давайте продолжим этот процесс, применив наше преобразование к $c^2 + c$. Мы получим:

$$(c^2 + c)^2 + c = c^4 + 2c^3 + c^2 + c.$$

Снова повторим отображение, применив его к приведенному выше числу. Мы получим:

$$(c^4 + 2c^3 + c^2 + c)^2 + c = c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 6c^5 + 5c^4 + 2c^3 + c^2 + c.$$

Потом еще раз применим процедуру, теперь уже к последнему числу, и т.д. В результате мы получаем последовательность комплексных чисел, которая начинается с числа 0:

$$0,\ c,\ c^2 + c,\ c^4 + 2c^3 + c^2 + c,\ \ldots .$$

Данная процедура, будучи реализована при некоторых определенных значениях комплексного числа c, дает последовательность чисел, которые всё время остаются вблизи начала координат плоскости Аргана; точнее, для выбранных таким образом значений c получаемая последовательность оказывается ограниченной, то есть любой ее член находится в пределах некоторого фиксированного круга с центром в начале координат (рис. 3.12). Хорошим примером здесь может служить последовательность c = 0, поскольку каждый ее член равен 0. Другим примером ограниченного поведения является случай c = 1,[40] при котором получается последовательность 0, –1, 0, –1, 0, –1, ...; еще один пример – это c = i, когда получается последовательность 0, i, i–1, –i, i–1, –i, i–1, –i, ... Однако, для целого ряда других комплексных чисел c получаемая последовательность всё дальше удаляется от начала координат, то есть является неограниченной и не может находиться целиком в пределах фиксированного круга. Именно так происходит при c = 1, когда получается последовательность 0, 1, 2, 5, 26, 677, 458˙330, ... ; аналогичное поведение имеет место в случае c = 3 – соответствующая последовательность имеет вид 0, −3, 6, 33, 1086, ...; а также случай c = i−1, который приводит к последовательности 0, i−1, −i−1, −1 + 3i, −9 − i5, 55 + i91, −5257 + i10011, ...

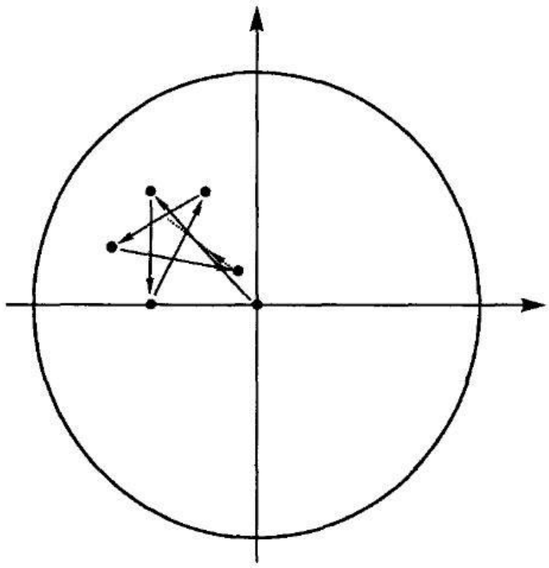


Рис. 3.12. Последовательность точек на плоскости Аргана ограничена, если вся она целиком помещается в пределах некоторого фиксированного круга. (Итерация на рисунке начинается с точки 0 и построена для c = −1/2 + (1/2) i.)

Множество Мандельброта – то есть зачерненная часть страны Тор'Блед-Нам[41] – как раз и есть та самая область на плоскости Аргана, что состоит из всех точек c, для которых получаемая последовательность является ограниченной. Белая же область состоит из тех точек c, для которых получается неограниченная последовательность. Приведенные выше подробные рисунки основаны на результатах компьютерных вычислений. На компьютере был проведен систематический перебор всевозможных комплексных чисел c, для каждого из них строилась

[40] **В.Э.:** Так в книге. Видимо, должно быть: c = –1.

[41] В оригинале – Tor'Bled-Nam. А что получится, если прочитать наоборот? – *Прим. ред.*

последовательность 0, c, $c^2 + c$, ..., после чего согласно некоторому критерию определялось, ограничена или нет получаемая последовательность. Если последовательность оказывалась ограниченной, то соответствующая числу c точка экрана становилась черной. Таким образом, для каждой точки в рассматриваемой области компьютер решал, закрасить ее в белый или черный цвет.

Множество Мандельброта впечатляет своей сложностью, особенно учитывая, как это часто бывает в математике, удивительную простоту его определения. Кроме того, структура этого множества в целом не очень чувствительна к выбору алгебраической формы отображения – $z \to z^2 + c$. Многие другие итеративные отображения (например, $z \to z^3 + iz^2 + c$) приводят к поразительно похожим структурам (при условии выбора подходящего начального числа – возможно, это не 0, а значение, четко задаваемое вполне определенным математическим правилом для каждого разумно выбранного отображения). Подобные «мандельбротовы» структуры характеризуются некоторыми универсальными или абсолютными свойствами по отношению к итеративным комплексным отображениям. Изучение таких структур является предметом отдельного раздела математики – так называемой теории комплексных динамических систем.

§3.7. Платоническая реальность математических понятий?

Насколько реальны объекты математического мира? Некоторые считают, что ничего реального в них быть не может. Математические объекты суть просто понятия, они представляют собой мысленные идеализации,[42] созданные математиками – часто под влиянием внешних проявлений и кажущегося порядка окружающего нас мира; но при этом они – всего лишь рожденные разумом абстракции. Могут ли они представлять собой что-либо, кроме просто произвольных конструкций, порожденных человеческим мышлением? И в то же время эти математические понятия часто выглядят глубоко реальными и эта реальность выходит далеко за пределы мыслительных процессов любого конкретного математика. Тут как будто имеет место обратное явление – человеческое мышление как бы само оказывается направляемым к некой внешней истине – истине, которая реальна сама по себе,[43] и которая открывается каждому из нас лишь частично.

Множество Мандельброта представляет собой потрясающий пример. Его удивительно сложная структура не является результатом изобретения ни какой-либо отдельной личности, ни группы математиков.[44] Сам Бенуа Мандельброт – американский математик польского происхождения (и один из главных разработчиков теории фракталов), который первый[45] изучил это множество, не мог себе представить, насколько фантастически сложным окажется этот объект, хотя и понимал, что обнаружил нечто очень интересное. Действительно, увидев самые первые компьютерные изображения, он счел увиденные им размытые структуры результатом сбоя (Мандельброт [1986])! И только потом он убедился, что они действительно являлись частью множества. Более того, сложную структуру множества Мандельброта во всех ее деталях не под силу охватить никому из нас, и ее невозможно полностью отобразить на компьютере. Создается впечатление, что рассматриваемая структура не является всего лишь частью нашего мышления, но что она реальна сама по себе. Кто бы из математиков или программистов ни занялся изучением этого множества, результатом их исследований обязательно будут приближения к

[42] **В.Э.:** «Мысленные идеализации»... Как беспомощно! И как же эти «мысленные идеализации» нам встроить в робота? (Ах это невозможно?)... На самом деле эти «мысленные идеализации» являются потенциальными продуктами программ, построенные бокоанализом другими программами, – и все эти программы (во всяком случае для достаточно квалифицированного программиста) являются объектами столь же определенными, как и операционные системы или вычислительные сети.

[43] **В.Э.:** Разумеется, она реальна! Если дана программа (или алгоритм), то ее продукты одинаковы для всех; это объективная данность – как и данности физического мира.

[44] **В.Э.:** Разумеется: множество Мандельброта – это потенциальный продукт описанного выше Пенроузом алгоритма. (А черные и белые точки на экране или бумаге в рисунках 3.1–3.7 – это даже и не потенциальный, а реализованный продукт этого алгоритма).

[45] Первенство обнаружения этого множества до сих пор остается предметом споров (см. Брукс, Мательски [1981], Мандельброт [1989]), но сама возможность таких споров представляет собой дополнительное свидетельство в пользу того, что здесь мы имеем дело скорее с открытием, чем с изобретением. **В.Э.:** Соотношения между открытием и изобретением здесь (как и повсюду в математике) очень просты: алгоритмы изобретают; их свойства потом открывают.

одной и той же единой для всех фундаментальной математической структуре. Не важно, на каком компьютере проводятся вычисления – лишь бы он правильно работал (конечно, если отвлечься от различий в степени подробности выявляемых деталей и скорости их вывода, связанными с различиями в производительности, объеме памяти и параметрах монитора). При этом компьютер применяется в сущности так же, как прибор в руках физика-экспериментатора, исследующего строение физического мира. Множество Мандельброта – это не плод человеческого воображения, а открытие. Подобно горе Эверест, множество Мандельброта просто-напросто уже существовало «там вовне»[46]!

Аналогичным образом сама система комплексных чисел обладает глубокой и вневременнóй реальностью, выходящей далеко за пределы мысленных конструкций, созданных любым конкретным человеком. Первые шаги на пути к пониманию комплексных чисел связаны с работами Джероламо Кардано. Он родился и жил в Италии с 1501 по 1576 год – врач, игрок и составитель гороскопов (однажды он даже составил гороскоп для Иисуса Христа), написавший в 1545 году очень важный и оказавший большое влияние на последующее развитие математики трактат по алгебре под названием *Ars Magna*. В этом трактате он предложил первое полное решение (в терминах иррациональных выражений, то есть корней *n*-ой степени) кубического уравнения в общем виде.[47] Кардано заметил, что в некоторых – так называемых «неприводимых» – случаях, когда уравнение имело три действительных решения, он был вынужден на определенном этапе включать в свою формулу квадратный корень из отрицательного числа. Хотя это обстоятельство и приводило его в замешательство, он понял, что полное решение можно получить тогда и только тогда, если допустить возможность извлечения таких квадратных корней (окончательный результат всегда оказывался действительным числом). Позднее, в 1572 году Рафаэль Бомбелли в своей работе, озаглавленной «Алгебра», обобщил работу Кардано, положив начало изучению алгебры комплексных чисел.

Хотя вначале может показаться, что введение таких квадратных корней из отрицательных чисел представляет собой всего лишь некоторый прием – математическое изобретение для достижения конкретной цели, – впоследствии становится очевидным, что потенциал этих объектов выходит далеко за рамки их использования для первоначально поставленных целей. При том, что изначально комплексные числа вводились (как уже упоминалось выше) для обеспечения возможности «безнаказанно» извлекать квадратные корни из отрицательных чисел, сделав этот шаг, мы получили в качестве бесплатного приложения еще и способ извлечения корней любой степени, а также решения любых алгебраических уравнений. Далее мы обнаружим у комплексных чисел много других волшебных свойств, о которых мы вначале даже и не подозревали. Эти свойства просто-напросто уже существуют «там вовне». Они не были привнесены туда ни Кардано, ни Бомбелли, ни Уоллисом, ни Котсом, ни Эйлером, ни Весселем, ни Гауссом, несмотря на несомненную прозорливость и их, и других великих математиков. Этот набор волшебных свойств был изначально присущ самой структуре, которую они шаг за шагом открывали. Когда Кардано вводил комплексные числа, он и подозревать не мог о существовании множества открытых впоследствии чудесных свойств, названных именами знаменитых ученых – таких как интегральная формула Коши, теорема отображения Римана или свойство продолжения Леви. Эти и многие другие замечательные свойства присущи самим числам – в точности тем самым числам, с которыми Кардано впервые столкнулся в 1539 году.

Что такое математика – изобретение или открытие? Процесс получения математиками результатов – что это: всего лишь построение не существующих в действительности сложных мысленных конструкций, мощь и элегантность которых способна обмануть даже их собственных изобретателей, заставив их поверить в «реальность» этих не более чем умозрительных построений? Или же математики действительно открывают истины уже где-то существующие, чья реальность в значительной степени независима от их деятельности? Я думаю, что читателю

[46] **В.Э.:** Множество Мандельброта «уже существовало там вовне» в том смысле, что ЕСЛИ кто-то миллион лет назад на Земле или кто-то на планете в Туманности Андромеды стал бы изучать сходимость в области комплексных (планарно ориентированных) чисел, то он получил бы тот же результат: в любой точке Вселенной (и также в других вселенных) в любое время как до Большого взрыва, так и после Большого коллапса. В этом смысле Платоновский мир (и множество Мандельброта в нем) вечен. Но другое дело, что могли бы и не изобрести такой алгоритм, основанный на сходимости в области комплексных чисел, и не изучать его. В этом смысле множество Мандельброта не существовало, пока им не занялись. (Не вижу тут ничего неясного).

[47] Частично основанное на более ранних работах Сципионе дель Ферро и Тартальи.

должно стать уже совершенно ясно, что я склонен придерживаться скорее второй, чем первой точки зрения, по крайней мере, в отношении таких структур, как комплексные числа или множество Мандельброта.[48]

Однако, не всё так просто. Как я уже сказал, в математике существуют вещи, к которым термин «открытие» подходит больше, чем «изобретение» – как в только что упомянутых примерах. Это происходит, когда структура дает гораздо больше того, что в нее было вложено изначально. Можно встать и на такую точку зрения, согласно которой в этих случаях математики просто наталкиваются на «творения Бога». Встречаются, однако, другие ситуации, когда математические структуры не столь убедительно уникальны – например, когда посреди доказательства какого-нибудь результата возникает необходимость в некой хитроумной, хотя и далеко не уникальной конструкции для достижения весьма специфической цели. В этих случаях от вновь созданной конструкции вряд ли следует ожидать больше того, что было в нее первоначально заложено, и термин «изобретение» представляется более подходящим, чем «открытие». Они, действительно, суть просто «творения человека». Согласно этой точке зрения, истинные математические открытия должны, как правило, рассматриваться как достижения более великие, чем «просто» изобретения.

Такого рода ранжирование обнаруживает некоторое сходство с тем, что мы иногда наблюдаем в области искусства или техники. Великие произведения искусства действительно «ближе к Богу», чем менее значительные творения. У художников нередко возникает чувство, что в своих величайших произведениях они открывают вечные истины, существовавшие уже до них в некотором высшем смысле,[49] в то время как менее значительные произведения могут быть более случайными, являясь по своей природе всего лишь порождениями простых смертных. Точно так же и новое инженерное решение с очень красивой структурой, позволяющее достичь значительных результатов через применение простой и неожиданной идеи, может с полным на то основанием рассматриваться скорее не как изобретение, а как открытие.

Однако, высказав все эти соображения, я не могу отделаться от ощущения, что в случае математики вера в некоторое высшее вечное существование – по крайней мере для наиболее глубоких математических концепций, – имеет под собой гораздо больше оснований, чем в других областях человеческой деятельности. Несомненная уникальность и универсальность такого рода математических идей по своей природе существенно отличается от всего того, с чем приходится сталкиваться в области искусства и техники. Точка зрения, согласно которой математические понятия могут существовать в такого рода вневременном, высшем смысле, была впервые высказана еще в древности (около 360 года до н.э.) великим греческим философом Платоном, и поэтому ее часто называют математическим платонизмом. Она играет важную роль в дальнейшем изложении.

В главе 1 я довольно много места уделил обсуждению точки зрения сильного искусственного интеллекта, согласно которой мыслительные явления находят свое воплощение в рамках математического понятия алгоритма. В главе 2 я особо подчеркнул, что алгоритм есть действительно очень глубокое и «Богом данное» понятие. В этой главе я старался доказать, что такие «Богом данные» математические идеи существуют в определенном смысле вне времени и независимо от нас смертных. Не могут ли эти соображения служить своего рода подтверждением справедливости концепции сильного искусственного интеллекта, допуская возможность некоего высшего существования мыслительной деятельности? Это вполне возможно – и я даже собираюсь далее привести ряд соображений в поддержку в чем-то похожей точки зрения. Но если у мыслительных явлений и вправду имеется такое вместилище, я всё же не думаю, что это может относиться и к понятию алгоритма. Тут нужно что-то более «тонкое». Последующее обсуждение будет в значительной степени опираться на тот факт, что связанные с понятием алгоритма объекты составляют очень узкую и ограниченную часть математики. Следующая глава даст некоторое представление об огромных возможностях и изяществе неалгоритмической математики.

---

[48] **В.Э.:** А если знать их сущность (что это: потенциальные продукты алгоритмов), то можно без всяких там «склонен», «не склонен» говорить смело и уверенно: «алгоритмы изобретают; их свойства открывают».

[49] Как сказал выдающийся аргентинский писатель Хорхе Луис Борхес: «...знаменитый поэт в большей степени первооткрыватель, чем изобретатель...».

Глава 4. Истина, доказательство и интуиция

§4.1. Программа Гильберта для математики

Что есть истина? Как мы составляем наши суждения о том, что в мире является справедливым, верным, а что – нет? Следуем ли мы некоторому алгоритму, которому отдается предпочтение среди прочих, менее эффективных, в процессе всемогущего естественного отбора? Или же возможен некий иной путь – не алгоритмизированный, а основанный на особой проницательности, интуитивный, инстинктивный – позволяющий угадывать правду? Это представляется нелегким вопросом.[50] Наши суждения зависят от сложных взаимосвязанных комбинаций данных, поставляемых органами чувств, и наших размышлений и догадок. Более того, во многих реальных ситуациях не может существовать единого мнения по поводу того, что на самом деле истинно, а что – ложно. Чтобы упростить задачу, рассмотрим только лишь математическую истину. Как мы формируем суждения – а может, даже и наши «стопроцентно верные» знания – при ответе на вопросы из области математики? Там уж, по крайней мере, всё должно быть не так размыто, очерчено более ясно. Там не может возникать вопросов об истинности – или все-таки может? Что же, в конце концов, есть математическая истина?

Вопрос об этой истине возник не сегодня, он уходит корнями в античность, к греческим философам и математикам – и, несомненно, еще дальше, в глубь веков. Однако, несколько великих открытий и поразительных прозрений здесь были сделаны не далее как в XX столетии. Эти новые достижения заслуживают того, чтобы постараться их понять. Они носят фундаментальный характер и непосредственно касаются вопроса о том, являются ли наши мыслительные процессы полностью алгоритмизированными по своей природе или нет. Четко разобраться в этом – задача, имеющая для нас весьма важное значение.

В последней части XIX века математика шагнула далеко вперед в результате развития всё более и более мощных методов математического доказательства. (Давид Гильберт и Георг Кантор, с которыми мы познакомились ранее, и великий французский математик Анри Пуанкаре, с которым нам еще предстоит встретиться, шли во главе этих разработок.) Как следствие, математики стали обретать уверенность в том, что применение этих методов приведет к успеху. Многие из таких методов основаны на рассмотрении множеств[51] с бесконечным числом членов, и доказательства часто оказывались осуществимы благодаря именно тому, что такое множество можно было рассматривать как реальный «объект» – завершенное единое целое, существующее не только в абстракции. Многие из этих идей родились из в высшей степени оригинальной концепции Кантора о бесконечных числах, которую он развил, последовательно используя бесконечные множества. (Мы кратко ознакомились с ними в предыдущей главе.)

Однако эта уверенность пошатнулась, когда в 1902 году английский логик и философ Бертран Рассел придумал свой знаменитый парадокс (который предвидел и сам Кантор и который выводился непосредственно из его диагонального процесса). Чтобы понять доводы Рассела, мы сначала должны хотя бы немного почувствовать, как можно представить множество в виде единого целого. Давайте представим себе множество, характеризуемое некоторым (общим) свойством.[52] Например, набор красных предметов может быть охарактеризован словом

---

[50] **В.Э.:** Если принят основной постулат Веданской теории (что человеческая интеллектуальная деятельность представляет собой обработку информации), то установление истины, разумеется, есть алгоритмический процесс. И именно потому, что разными субъектами могут применяться разные алгоритмы (и задействованные в них критерии), они приходят к разным выводам об истинности. А сущность «озарений» и «интуиции» была показана в {PENRO1}.

[51] «Множество» означает набор предметов – физических объектов или математических абстракций, – который может рассматриваться как единое целое. В математике элементы (т.е. члены) множества часто сами являются множествами, поскольку множества могут собираться таким образом, чтобы самим формировать множества. Тем самым можно рассматривать множества множеств, множества множеств множеств и т.д.

[52] **В.Э.:** То, о чем Пенроуз сейчас говорит, соответствует реалии (см. Рис. VE1 в Предисловии этого тома). Собственно множество – это реалия. Но рассуждения о множестве не могут быть точными и исчерпывающими, если параллельно не помнить и о двух других объектах, сопутствующих реалии (множеству): о ее номиналии и о программе, определяющей множество. То «общее свойство, характеризующее множество», о котором сейчас говорит Пенроуз, – оно как раз и встроено в программу: именно

«краснота»[53] как его определяющим свойством: нечто принадлежит этому множеству тогда и только тогда, когда это обладает «краснотой» (имеет красный цвет). Это позволит нам «перевернуть» точку зрения и трактовать свойство как единичный объект, который будет состоять из всего множества вещей, обладающих данным свойством.[54] При таком рассмотрении «краснота» эквивалентна множеству всех красных предметов. (При этом мы можем предполагать существование «там вовне» и других множеств, члены которых не могут быть охарактеризованы подобным простым свойством.)

Идея формулировки понятий в терминах множеств послужила основой для процедуры, предложенной в 1884 году влиятельным немецким логиком Готтлибом[55] Фреге, которая позволяла определять числа через множества. К примеру, что мы понимаем под числом 3? Мы знаем, в чем заключается «тройственность», но что есть число 3 само по себе? Очевидно, что «тройственность» есть свойство наборов объектов, т.е. свойство множеств: некоторое множество обладает данным свойством тогда и только тогда, когда это множество состоит из трех членов. Этим свойством характеризуется, скажем, тройка призеров-медалистов некоторой Олимпиады. Равно как и набор шин к трехколесному велосипеду, или листья на одном стебельке обычного клевера, или множество всех решений уравнения $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Как же можно тогда определить по Фреге само число 3? Согласно Фреге, 3 – это множество множеств, а именно, всех множеств, имеющих свойство «тройственности»[56]. Таким образом, множество содержит три члена тогда и только тогда, когда оно принадлежит множеству 3 по Фреге.

Может показаться, что мы попадаем в замкнутый круг, но в действительности это совсем не так. Мы можем определить числа в общем случае как совокупности всевозможных эквивалентных множеств, где говоря «эквивалентные», мы понимаем «состоящие из элементов, которые могут быть попарно сопоставлены друг другу» (или, в более привычной терминологии, «имеющих одинаковое число элементов»[57]). Тогда число 3 будет одной из этих совокупностей множеств,[58] которая содержит в себе в качестве члена множество, состоящее, скажем, из яблока, апельсина и груши. Обратите внимание, что это принципиально отличается от определения «**3**», данного Черчем (с. 69). Существуют также и другие определения, причем более популярные в наши дни.

Вернемся теперь к парадоксу Рассела. В чем он заключается? В нем рассматривается множество R, определенное следующим образом:

программа (ее алгоритм) определяет, что это за свойство и как отличить объекты, обладающие этим свойством, от объектов, им не обладающих.

53 **В.Э.:** А точнее – не словом, а (мозговой) программой, способной установить, отражает ли данный объект свет таким образом, что поглощает фотоны всех других частот, кроме красного диапазона.

54 **В.Э.:** Довольно туманное рассуждение... В оригинале: «*We may imagine some set that is characterized in terms of a particular PROPERTY. For example, the set of RED things is characterized in terms of the property of REDNESS: something belongs to that set if and only if it has redness. This allows us to turn things about, and talk about a property in terms of a single object, namely the entire set of things with that property. With this viewpoint, `redness' IS the set of all red things*.» Нет, – «краснота» не есть множество красных вещей; «краснота» есть способность отражать фотоны только красного спектра, а все остальные поглощать. И еще тут присутствует программа, алгоритм которой способен это свойство констатировать.

55 **В.Э.:** Готлоб (в русских энциклопедиях) или хотя бы Готтлоб (как пишется по-немецки), но не Готтлиб – ошибка перевода: у Пенроуза правильно.

56 Рассматривая множества, члены которых, в свою очередь, также являются множествами, мы должны тщательно проводить отличия между членами такого множества и членами его членов. Например, допустим, что S – это множество непустых подмножеств некоторого другого множества T, членами которого являются один апельсин и одно яблоко. T в таком случае имеет свойство «двойственности», тогда как S обладает свойством «тройственности»: членами S будут множества а) из одного яблока; б) из одного апельсина и в) из одного апельсина и одного яблока – представляющие три члена S. Аналогично, множество, чьим единственным членом является пустое множество, будет иметь свойство «единичности», а не «нулевости» – в него входит один член, а именно пустое множество! При этом само пустое множество не будет иметь, конечно, ни одного члена.

57 **В.Э.:** Перевод точен; у Пенроуза тоже: «(i.e. in ordinary terms this would be `having the same number of members')». Но лучше было бы сказать не «имеющих одинаковое число элементов», а «имеющих одинаковое количество элементов», чтобы не употреблять понятие числа, когда оно еще не введено, а пока еще только вводится сейчас.

58 **В.Э.:** Фреге не смог дойти до конца в понимании природы чисел, потому что не рассматривал всё это дело как работу компьютера. Разумеется, это простительно, если учесть то время, когда он жил (1848 – 1925). Компьютеров тогда не было, и опыта программирования Фреге не имел.

R есть множество множеств, которые не являются членами самих себя.[59]

Таким образом, *R* есть набор множеств *X*, отвечающих следующему условию: среди членов множества *X* не должно быть самого *X*.

Не является ли абсурдным предполагать, что множество в действительности может быть членом самого себя? Ничуть. Рассмотрим, к примеру, множество *I*, состоящее из бесконечных множеств (множеств с бесконечным числом членов). С очевидностью, существует бесконечное число различных бесконечных множеств, и само множество *I*, таким образом, является бесконечным. И, таким образом, оно, действительно, принадлежит самому себе! Но как же, в таком случае, рассуждения Рассела дают нам парадоксальное утверждение? Давайте спросим: является ли множество Рассела *R* членом самого себя или нет? Если нет, то оно должно принадлежать себе, ибо *R* состоит как раз из таких множеств, которые не являются членами самих себя. То есть, в конечном счете, *R* принадлежит *R* – противоречие! С другой стороны, если *R* есть член самого себя, то, поскольку «самое себя» – это *R*, оно в то же время принадлежит множеству, члены которого, по определению, не могут быть составляющими самих себя, т.е. все-таки не принадлежит самому себе – и вновь противоречие![60]

Этот парадоксальный вывод не был праздной игрой ума: Рассел использовал – хотя и в крайней форме – тот же тип весьма общих теоретико-множественных методов, которые математики начинали использовать в то время для своих доказательств. Становилось очевидным, что казавшаяся незыблемой почва ускользает из-под ног, и поэтому необходимо было как можно точнее определить, какие рассуждения считать допустимыми.[61] Ясно было, что такие рассуждения должны быть свободны от внутренних противоречий, и что утверждения, которые будут выводиться с их помощью как следствия из априори верных посылок, должны быть также верными. Рассел, совместно со своим коллегой Альфредом Нортом Уайтхедом, взялся за развитие такой полностью формализованной системы аксиом и правил вывода, на язык которой стало бы возможным перевести все виды корректных математических рассуждений. Все правила подвергались тщательному отбору, дабы избежать «ложных» путей рассуждений, могущих привести к парадоксам, подобным упомянутому выше. Однако схема, появившаяся на свет в результате этих усилий, была очень громоздка и оказалась весьма ограниченной по диапазону различных типов математических рассуждений, которые она охватывала. Великий математик Давид Гильберт (которого мы впервые встретили в главе 2) задался целью создать более практичную и универсальную систему. В нее должны были войти все типы математических рассуждений из всех областей математики. Более того, Гильберт стремился сделать возможным

[59] **В.Э.:** Ну вот, и чтобы разобрать (и понять) сущность знаменитого-презнаменитого «парадокса Рассела», обратимся опять к концепции множества, отображенной на Рис. VE1. Расселовское «множество *R*» – это реалия. Но рядом тут существует еще и номиналия и (главное!) программа. Вот эта программа-то и есть самое ключевое звено здесь, на что мы должны в первую очередь смотреть! Итак, Бертран Рассел на самом деле задал программу, которая будет проверять, принадлежит ли данное множество само себе в качестве элемента. (И, как обычно – как в случае с «краснотой» и «тройственностью» –, при наличии требуемого свойства причислять объект к задаваемому программой множеству-реалии). Ну, программа как программа – отчего же не придумать такой алгоритм? А теперь посмотрим (детально, а не поверхностно! посмотрим так, как смотрят программисты, а не так, как смотрят математики!), что же произойдет, если программу Рассела выполнить? Запускаем ее первый раз (фактически – над номиналией множества *R*, но одновременно и как бы над реалией – над самим множеством). Сейчас *R* не содержит себя в качестве элемента, значит причисляем его к *R*. Пускаем программу второй раз для проверки: теперь *R* уже принадлежит само себе, значит, исключаем его из *R*. Пускаем программу еще раз для надежности: теперь *R* не принадлежит само себе, значит, причисляем его к *R*. Пускаем программу для проверки... И так до бесконечности. Программа Рассела зациклилась! Ой, читатель, какой ужас, какой кошмар! Фреге чуть не застрелился и больше ничего не публикует всю оставшуюся жизнь! Крушение всех оснований математики! Мировая катастрофа, эхо которой вот уже 109 лет с 1902 года разносится по всему свету! Математики взмахивают руками, хватаются за головы и падают в обморок. Программа Рассела циклит!!! (Сравни с «парадоксом Лжеца» в {POTI1}).

[60] Можно дать занятную трактовку парадокса Рассела в более привычных терминах. Представьте себе библиотеку с двумя каталогами, один из которых перечисляет только те книги в библиотеке, которые хотя бы раз ссылаются на себя самих, а другой – остальные книги, т.е. те, которые не упоминают себя. В каком из этих каталогов, в таком случае, должен фигурировать второй каталог?

[61] **В.Э.:** Допустимыми следует считать лишь те рассуждения, которые учитывают тот факт, что всё это происходит в (мозговом) компьютере, а не невесть где. Тогда не только не будет «внутренних противоречий», а вопрос о противоречиях вообще станет столь же маловажным, как, например, в физике.

строгое доказательство отсутствия противоречий в своей схеме. Тогда математика раз и навсегда смогла бы встать на прочную и неколебимую основу.

Однако надежды Гильберта и его последователей были перечеркнуты, когда в 1931 году блестящий австрийский логик математики Курт Гёдель выдвинул поразительную теорему, которая до основания разрушала программу Гильберта. Гёдель показал, что любая подобная точная («формальная») система аксиом и правил вывода, если только она достаточна широка, чтобы содержать в себе описания простых арифметических теорем (как, например, «последняя теорема Ферма», рассмотренная в главе 2), и если она свободна от противоречий – то такая система должна включать утверждения, которые не являются ни доказуемыми, ни недоказуемыми в рамках формализма данной системы. Истинность таких «неразрешимых» утверждений, следовательно, не может быть выяснена с помощью методов, допускаемых самой системой. Более того, Гёдель смог показать, что даже утверждение о непротиворечивости системы аксиом, будучи переведенным в форму соответствующей теоремы, само по себе является «неразрешимым». Для нас будет очень важным понять природу этой неразрешимости. Тогда мы увидим, почему выводы Гёделя опровергали самое основание программы Гильберта. Мы также увидим, каким образом они дают нам возможность, воспользовавшись интуицией, выходить за пределы любой рассматриваемой формализованной математической системы. Это понимание будет решающим для того, чтобы, в свою очередь, лучше понять обсуждаемое далее.

§4.2. Формальные математические системы

Необходимо будет несколько уточнить, что мы понимаем под «формальными математическими системами аксиом и правил вывода». Мы должны предположить наличие некоторого алфавита символов, через которые будут записываться математические выражения. Эти символы в обязательном порядке должны быть адекватны для записи натуральных чисел с тем, чтобы в нашу систему могла быть включена «арифметика». По желанию, мы можем использовать общепринятую арабскую запись 0, 1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, 12, ... хотя при этом конкретные выражения для правил вывода становятся несколько более сложными, чем требуется. Гораздо более простые выражения получаются, скажем, при использовании записи вида 0, 01, 011, 0111, 01111, ... для обозначения последовательности натуральных чисел (или, в качестве компромисса, мы могли бы использовать двоичную запись). Однако, поскольку это могло бы стать источником разночтений в дальнейших рассуждениях, я буду для простоты придерживаться обычной арабской записи независимо от способа обозначения, которая может на самом деле использоваться в данной системе. Нам мог бы понадобиться символ «пробел» для разделения различных «слов» или «чисел» в нашей системе, но, так как это тоже может вызвать путаницу, то мы будем по мере необходимости использовать для этих целей просто запятую (,). Произвольные («переменные») натуральные числа (равно как и целые, рациональные и т.д.; но давайте здесь ограничимся натуральными) мы станем обозначать буквами, например, t, u, v, w, x, y, z, t', t'', t''' и т.п. Штрихованные буквы t', t'', ... вводятся нами в употребление, дабы не ограничивать число переменных, которые могут встретиться в произвольном выражении. Мы будем считать штрих (′) отдельным символом формальной системы, так что действительное количество символов в системе остается конечным. Помимо этого нам также потребуются символы для базовых арифметических операций –, +, × и т.д.; для различных видов скобок (,), [,], и для обозначения логических операций, таких как & («и»), ⇒ («следует»), ∨ («или»), ⇔ («тогда и только тогда»), ~ («не»). Дополнительно нам будут нужны еще и логические «кванторы»: квантор существования ∃ («существует... такое, что») и квантор общности ∀ («для любого... выполняется»). Тогда мы сможем такие утверждения, как, например, «последняя теорема Ферма», привести к виду:

$$\sim\exists\, w, x, y, z\, [(x + 1)^{w+3} + (y + 1)^{w+3} = (z + 1)^{w+3}]$$

(см. главу 2, с. 62). (Я мог бы написать «0111» для «3», и, возможно, использовать для «возведения в степень» обозначение, более подходящее к рассматриваемому формализму; но, как уже говорилось, я буду придерживаться стандартной системы записи во избежание ненужной путаницы.) Это утверждение (если читать его до левой квадратной скобки) звучит как:

«Не существует таких натуральных чисел w, x, y, z, что...».

Мы можем также переписать последнюю теорему Ферма при помощи ∀:

$$\forall\, w, x, y, z\, [\sim (x + 1)^{w+3} + (y + 1)^{w+3} = (z + 1)^{w+3}]$$

которое будет читаться следующим образом (заканчивая символом «не» после левой квадратной скобки):

«Для любых натуральных чисел w, x, y, z не может быть выполнено...»,
что логически эквивалентно написанному ранее.

Нам понадобятся еще и буквы, обозначающие целые утверждения, для чего я буду использовать заглавные буквы $P, Q, R, S, \ldots$. Таким утверждением может, к примеру, служить и вышеприведенная теорема Ферма:

$$F = \sim\exists\, w, x, y, z\, [(x + 1)^{w+3} + (y + 1)^{w+3} = (z + 1)^{w+3}]$$

Утверждение может также зависеть от одной или более переменных; например, нас может интересовать формулировка теоремы Ферма для некоторого конкретного[62] значения степени w+3

$$G(w) = \sim\exists\, x, y, z\, [(x + 1)^{w+3} + (y + 1)^{w+3} = (z + 1)^{w+3}]$$

так что $G(0)$ утверждает, что «куб не может быть суммой кубов положительных чисел»; $G(1)$ говорит о том же применительно к четвертым степеням и так далее. (Обратите внимание на отсутствие w после символа $\exists$.) Тогда теорема Ферма гласит, что $G(w)$ выполняется для любого w:

$$F = \forall w[G(w)].$$

G( ) является примером так называемой функции исчисления высказываний, т.е. утверждением, которое зависит от одной или более переменных.

Аксиомы нашей системы будут представлять из себя перечень утверждений общего характера, чья справедливость в рамках принятого символизма предполагается самоочевидной. Например, для произвольных утверждений или функций исчисления высказываний P, Q, $R(\ )$ мы могли бы указать среди прочих аксиом системы такие, как

$$(P \,\&\, Q) \Rightarrow P,$$

$$\sim(\sim P) \Leftrightarrow P,$$

$$\sim\exists\, x\, [R(x)] \Leftrightarrow \forall\, x\, [R(x)]$$

«априорная истинность» которых уже заключена в их смысловых значениях. (Первое утверждение означает лишь, что «если выполняется P и Q, то выполняется и P»; второе устанавливает равносильность утверждений «неверно, что не выполняется P» и «P выполняется»; а третье может быть проиллюстрировано эквивалентностью двух способов формулировки теоремы Ферма, данных выше.) Мы можем также включить основные аксиомы арифметики:

$$\forall\, x, y\, [(x + y) = (y + x)],$$

$$\forall\, x, y, z\, [(x + y) \times z = [(x \times z) + (y \times z)],$$

хотя некоторые предпочитают определять арифметические операции через более простые понятия и выводить вышеуказанные утверждения как теоремы. Правила вывода могут вводиться в виде (самоочевидных) процедур типа

«Из P и $P \Rightarrow Q$ следует Q».

«Из $\forall\, x\, [R(x)]$ мы можем вывести любое утверждение, получающееся путем подстановки конкретного натурального числа x в $R(x)$».

Такие правила являются инструкциями, следуя которым, можно с помощью утверждений, чья истинность уже доказана, получать новые утверждения.

Теперь, отталкиваясь от системы аксиом и раз за разом применяя правила вывода, мы имеем возможность построить достаточно длинные цепочки новых утверждений. На любой стадии этого процесса мы можем использовать снова и снова любую из аксиом, а также обратиться к любому из уже выведенных нами производных утверждений. Каждое утверждение из корректно выстроенной цепочки называется теоремой (несмотря на то, что многие из них достаточно тривиальны и неинтересны с точки зрения математики). Если у нас есть некое утверждение P, которое мы хотим доказать, то мы должны подобрать такую цепочку, выстроенную в согласии с действующими правилами вывода, которая заканчивается утверждением P. Такая цепочка предоставит нам доказательство P в рамках системы; а P тогда будет являться, соответственно, теоремой.

Идея программы Гильберта состояла в том, чтобы найти применительно к любой отдельно взятой области математики набор аксиом и правил вывода, который был бы достаточно полным

---

[62] Хотя справедливость теоремы Ферма в общем случае пока не доказана, ее справедливость для некоторых частных случаев, таких как $G(0)$, $G(1)$, $G(2)$, $G(3)$, доказана вплоть до $G(125000)$. Другими словами, доказано, что куб никакого числа не может быть суммой кубов двух других положительных чисел, четвертая степень числа не может быть суммой четвертых степеней других чисел и т.д. вплоть до степени 125˙000. (Несколько лет назад теорема Ферма была доказана в общем виде. См. сноску 5 на с. 62. – *Прим. ред*.)

для всех возможных в данной области корректных математических рассуждений. Пусть такой областью будет арифметика (с добавленными кванторами ∃ и ∀, позволяющими формулировать утверждения, подобные последней теореме Ферма). То, что мы не рассматриваем более общую область математики, не умаляет нашу задачу: арифметика и сама по себе обладает общностью, достаточной для применения процедуры Гёделя. Если мы допустим, что благодаря программе Гильберта мы действительно располагаем такой всеобъемлющей системой аксиом и правил вывода для арифметики, то мы тем самым обретаем и определенный критерий для выявления «корректности» математического доказательства любого утверждения в области арифметики. Возлагались надежды на то, что подобная система аксиом и правил может быть полной в смысле предоставляемой нам принципиальной возможности решать, истинно или ложно произвольное утверждение, сформулированное в рамках этой системы.

Гильберт рассчитывал, что для любой строки символов, представляющих математическое утверждение, скажем, P, можно будет доказать либо P, либо $\sim P$, если P истинно или ложно, соответственно. Здесь мы в обязательном порядке оговариваем, что строка должна быть синтаксически корректна, где «синтаксически корректна» по сути означает «грамматически корректна» – то есть удовлетворяет всем правилам записи, принятым в данном формализме, среди которых будет правильное попарное соответствие скобок и т.п. – так чтобы P всегда имело четко определенное значение «ложь» или «истина». Если бы надежды Гильберта оправдались, то можно было бы вообще не задумываться о том, что означает то или иное утверждение! P было бы просто-напросто синтаксически корректной строкой символов. Строке было бы приписано значение ИСТИНА, если бы P являлось теоремой (другими словами, если бы P было доказуемо в рамках системы); или же ЛОЖЬ, если бы теоремой было $\sim P$. Чтобы такой подход имел смысл, мы должны дополнительно к условию полноты наложить еще и условие непротиворечивости, гарантирующее отсутствие такой строки символов P, для которой как P, так и $\sim P$ были бы теоремами. Ведь в противном случае P могло бы быть одновременно и ИСТИНОЙ, и ЛОЖЬЮ!

Такой подход, согласно которому можно пренебрегать смысловыми значениями математических выражений и рассматривать их лишь как строки символов некоторой формальной математической системы, в математике получил название формализма.[63] Некоторым нравится эта точка зрения, с которой математика превращается в своего рода «бессмысленную игру». Однако я сам не являюсь сторонником таких идей. Все-таки именно «смысл» – а не слепые алгоритмические вычисления – составляет сущность математики.[64] К счастью, Гёдель нанес формализму сокрушающий удар! Давайте посмотрим, как он это сделал.

---

[63] **В.Э.:** С точки зрения Веданской теории формализация является фундаментально неправильным и глубоко ошибочным направлением деятельности. Математика начиналась с первичных действий (над множествами), но расцвет свой достигла во вторичных действиях (над нотатами), которые сохраняют изоморфизм с первичными действиями и поэтому могут быть полезны. Формализация же открывает новый, третичный слой действий, опять же претендующий на некоторый изоморфизм со вторичными. Однако не нужно и не следует запутывать дело еще и третичным слоем, всё дальше уходящим от первичных начал математики; он не дает и не может дать ничего ценного. Правильные действия состоят, наоборот, в максимальном раскрытии и осознании отношений первичного и вторичного слоев математики. А (в общем-то похвальное) стремление как можно более точно осознать и фиксировать принципы мышления нужно реализовывать не в третичном слое, вдалеке от (настоящих) оснований математики, а в первичном слое непосредственно у ее истоков. С этой целью нужно осознать и строго описать те (мозговые) программы, которые на самом деле порождают математику. Для строгого описания программ в информатике придуманы алгоритмические языки. Следовательно (вместо формализации!) должны быть созданы алгоритмические языки для описания (и строгого фиксирования) оснований математики. (А для проверки, демонстрации и эмуляции – созданы компьютерные интерпретаторы этих языков). Такой подход в свое время (в 1984 г.) был назван мною «компьютерной канонизацией» {CANTO2.1253} – в противоположность «математической формализации». Была также (в 1980 г.) предпринята попытка разработки такого алгоритмического языка под названием «Эуклидол» и интерпретатора под названием «Эуклидос» (см. {NATUR2}).

[64] **В.Э.:** Здесь у Пенроуза всё оказалось перевернуто «вверх ногами». Формализацию следует отвергнуть именно потому, что она представляет собой уход от (первичных) алгоритмов математики. (Можно сказать, что она представляет собой замену настоящих алгоритмов математики другими – третичными, «шутовскими»). Нужно именно разбирать настоящие алгоритмы математики (первичные, а также вторичные). Но у Пенроуза понятие «алгоритма» оказалось связанным только с третичными, только с формализацией, только с этой «шелухой» по выражению Мориса Клайна {CANTO2.1505}.

§4.3. Теорема Гёделя

Часть доказательства, приведенного Гёделем, содержало некий очень сложный и детализированный кусок. Однако нам не обязательно разбираться во всех его тонкостях. Основная идея, в то же время, была проста, красива и глубока. И ее мы сможем оценить по достоинству. В «сложной» части (которая, впрочем, содержит много остроумных рассуждений) подробно показано, каким образом частные правила вывода и использование различных аксиом формальной процедуры могут быть представлены в виде арифметических операций. (Хотя в сложной части становится понятной плодотворность этих действий!) Для этого представления нам необходимо будет найти какой-нибудь удобный способ нумерации утверждений при помощи натуральных чисел. Один из способов мог бы заключаться в том, чтобы использовать своего рода «алфавитный» порядок для строчек символов формальной системы, имеющих одинаковую длину, упорядочить заранее строчки по длине. (Таким образом, за выстроенными в алфавитном порядке строками из одного символа будут следовать строки длиной в два символа, также упорядоченные по алфавиту; за ними идут строки из трех символов и так далее.[65]) Это называется лексикографическим порядком.[66] В действительности Гёдель использовал более сложную систему нумерации, но различия в данном случае для нас несущественны. Нас же должны в особенности интересовать функции исчисления высказываний одной переменной, наподобие введенной выше $G(w)$. Пусть n-я (из пронумерованных выбранным способом строк символов) такая функция от аргумента w обозначается[67]

$$P_n(w).$$

Мы можем допустить, чтобы наша нумерация по желанию была несколько «либеральна» в отношении синтаксически некорректных выражений. (Это позволит значительно упростить перевод системы на язык арифметических операций[68] по сравнению со случаем, когда мы будем стараться исключить из рассмотрения синтаксически некорректные выражения.) Если $P_n(w)$ синтаксически корректно, то оно будет представлять из себя некоторое совершенно определенное арифметическое выражение, в котором фигурируют два натуральных числа n и w.[69] Каков будет конкретный вид этого выражения – зависит от особенностей системы нумерации, которую мы выбрали. Но эти детали рассматриваются в «сложной» части и сейчас нас не касаются. Пусть

$$\Pi_n$$

будет n-м доказательством.[70] (Опять же мы можем использовать «либеральную нумерацию», когда для некоторых значений n выражение[71] Π_n не является синтаксически корректным и, тем самым, не доказывает никакую теорему.)

---

[65] **В.Э.:** Таким образом, если в «алфавите» s символов, то нумеруемый список состоит из $s + s^2 + s^3 + ... + s^z$ строк, где z – максимальная длина строки.

[66] Мы можем представить себе лексиграфический способ упорядочивания как обычный способ, используемый для натуральных чисел, только сделанный «по основанию $k + 1$», где для $k + 1$ чисел берутся различные символы формальной системы, вместе с новым «нулем», который никогда не используется. (Последняя сложность возникает в связи с тем, что числа, начинающиеся с нуля, и те, где он опущен – равны.) Простое лексикографическое упорядочивание в строчках из девяти символов осуществляется при помощи натуральных чисел, которые могут быть выписаны в стандартной десятичной системе без нуля: 1, 2, 3, 4, ..., 8, 9, 11, 12, ..., 19, 21, 22, ..., 99, 111, 112, ...

[67] **В.Э.:** Я как-то не очень понимаю: номер n – это в том же списке, где были все возможные строки и который состоял из $s + s^2 + s^3 + ... + s^z$ строк, или речь идет уже о другом списке, в котором находятся только лишь функции одной переменной типа $G(w)$?

[68] **В.Э.:** Я также не понимаю, какого черта сюда вообще нужно впутывать арифметику?

[69] **В.Э.:** Ну хорошо: $P_n(w)$, значит, есть некоторое формальное выражение; оно имеет номер n в некотором списке A (правда, не очень ясно, в каком) и что-то утверждает о числе w.

[70] **В.Э.:** «Доказательство» в формальной системе – это цепочка строк, по «правилам вывода» переходящих одна в другую. Так – стало быть, теперь мы (в другом списке B) перенумеровали все возможные цепочки строк. Сколько же их должно быть? Трудно даже сообразить... Тут пошла уже какая-то комбинаторика. Ясно во всяком случае, что комбинаций строк должно быть значительно больше, чем самих строк.

[71] **В.Э.:** Почему выражение?! Откуда взялось выражение!? Только что Π_n было названо доказательством! Доказательство – это цепочка выражений, ведущих к какому-нибудь одному выражению (доказанной теореме). Выражение – это одна строчка символов языка. У них что? – что цепочка строк, что одна строчка – одно и то же и никакой разницы? (Всё это делает данное рассуждение Пенроуза бессмысленным набором слов и знаков, в котором бесполезно пытаться разобраться. А в других книгах изложение доказательства «теоремы Гёделя» не лучше. Я, к сожалению, не располагаю связным и осмысленным

А теперь рассмотрим следующую функцию исчисления высказываний от натурального числа w:

$$\sim\exists\, x\, [\Pi_x \text{ доказывает } P_w(w)].$$

В выражении в квадратных скобках частично присутствуют слова, но, тем не менее, это – абсолютно точно определенное выражение. Оно говорит о том, что доказательство номер x является доказательством утверждения $P_w(\ )$, примененного к самому w. Находящийся за скобками квантор существования с отрицанием позволяет исключить из рассмотрения одну из переменных («не существует такого x, что...»), приводя нас в конечном счете к арифметической функции исчисления высказываний, зависящей только от w. В целом данное выражение утверждает, что не существует доказательства $P_w(w)$. Я буду предполагать, что оно оформлено синтаксически корректным образом (даже если $P_n(w)$ некорректно – поскольку тогда выражение было бы истинным за невозможностью существования доказательства синтаксически некорректного утверждения). На самом деле, в результате сделанного нами перевода на язык арифметики, написанное выше будет в действительности неким арифметическим выражением, включающим натуральное число w (тогда как в квадратных скобках окажется четко определенное арифметическое выражение, связывающее два натуральных числа x и w). Конечно, возможность представления этого выражения в арифметическом виде далеко не очевидна, но она существует. Рассуждения, приводящие к этому заключению, составляют наиболее трудную задачу в «сложной» части доказательства Гёделя. Как и ранее, непосредственный вид арифметического выражения будет зависеть от способа нумерации и в еще большей степени от конкретной структуры аксиом и правил вывода, принятых в нашей системе. Поскольку всё это входит в «сложную» часть доказательства, то в данном случае нас не интересует.

Мы пронумеровали все функции исчисления высказываний, зависящие от одной переменной, поэтому той, которую мы ввели выше, также должен быть приписан номер. Пусть этот номер будет k. Наша функция будет в таком случае k-й в общем списке. То есть

$$\sim\exists\, x\, [\Pi_x \text{ доказывает } P_w(w)] = P_k(w).$$

Теперь исследуем эту функцию при определенном значении: $w = k$. Мы получаем:

$$\exists\, x\, [\Pi_x \text{ доказывает } P_k(k)] = P_k(k).$$

Данное утверждение $P_k(k)$ является абсолютно точно определенным (синтаксически корректным) арифметическим выражением. Может ли оно быть доказано в рамках нашей формальной системы? А его отрицание $\sim P_k(k)$ – имеет ли оно такое доказательство? Ответ в обоих случаях будет отрицательный. Мы можем убедиться в этом путем исследования смысла, который лежит в основании процедуры Гёделя. Хотя $P_k(k)$ является просто арифметическим выражением, последнее было построено нами таким образом, что написанное в левой части утверждает следующее: «внутри системы не существует доказательства $P_k(k)$». Если мы были аккуратны в определении аксиом и процедур вывода, и не ошиблись при нумерации, то тогда в рамках системы такого доказательства найти невозможно. Если же доказательство существует, то значение утверждения, содержащегося в $P_k(k)$ – о том, что такого доказательства нет, – будет ложным, а вместе с ним будет ложным и арифметическое выражение, отвечающее $P_k(k)$. Но наша формальная система не может быть построена настолько плохо, чтобы включать в себя ложные утверждения, которые могут быть доказаны! Таким образом, в действительности, доказательство $P_k(k)$ быть не может. Но это в точности то самое, о чем говорит нам $P_k(k)$. То, что утверждает $P_k(k)$, обязано, следовательно, быть верным, а поэтому $P_k(k)$ должно быть верным как арифметическое выражение. Значит, мы нашли истинное утверждение, которое недоказуемо в рамках системы!

А как насчет $\sim P_k(k)$? Из предыдущих рассуждений видно, что доказательство этому утверждению внутри системы мы найти не сможем. Мы только что установили, что $\sim P_k(k)$ должно быть ложным (ибо $P_k(k)$ является истинным), а мы, по определению, не имеем возможности доказывать ложные утверждения в рамках системы! Таким образом, ни $P_k(k)$, ни $\sim P_k(k)$ недоказуемы в нашей формальной системе, что и составляет теорему Гёделя.[72]

изложением, по которому была бы ясна сущность происходящего. Если они сами эту сущность понимают – в чем я, впрочем, сильно сомневаюсь, – то они совершенно не в состоянии это толково и непротиворечиво изложить на бумаге).

[72] **В.Э.:** К сожалению, из-за нечеткого изложения Пенроузом (а также другими доступными мне авторами) исходных установок и хода рассуждений при доказательстве «теоремы Гёделя», я не могу в деталях проследить происходящее и проанализировать всё так, как сделал это с «теоремой Гёделя–Тьюринга» в {PENRS1}, с «теоремой Тьюринга» в {PENRO1} и с «теоремой Кантора» в §3.3 выше в этом

§4.4. Математическая интуиция

Обратите внимание, что мы здесь сталкиваемся с одной примечательной особенностью. Часто думают, что теорема Гёделя имеет, в некотором роде, отрицательный смысл, поскольку она указывает на принципиальные ограничения в применении формальных математических рассуждений. Независимо от нашего мнения об универсальности применяемого подхода, всегда найдутся утверждения, которые не попадают в сферу его действия. Но насколько, в действительности, нас могут затрагивать частные случаи типа $P_k(k)$? В ходе предыдущих рассуждений мы установили, что $P_k(k)$ – истинное утверждение! Мы смогли это сделать несмотря на то, что это утверждение формально недоказуемо в рамках системы. А вот математических формалистов это должно волновать, потому что наши рассуждения с необходимостью приводят к выводам о неполноте их понятия «истины». Какая бы (непротиворечивая) формальная система не использовалась для арифметики, в ней будут содержаться утверждения, понимаемые нами как истинные, но которым не может быть приписано значение ИСТИНА при помощи вышеописанной формальной процедуры. Способ, при помощи которого формалист сумел бы обойти подобные трудности, мог бы состоять в том, чтобы не говорить о понятии истины, а только лишь о доказуемости внутри конкретной формальной системы. Однако же, такой подход весьма ограничен. Он не позволил бы даже сформулировать утверждение Гёделя и осуществить его доказательство, как это было сделано выше, поскольку в значительной части рассуждений речь идет как раз об определении того, что есть ложь, а что – истина.[73] Некоторые формалисты встают на более «прагматическую» точку зрения, заявляя, что их не волнуют утверждения, подобные $P_k(k)$, поскольку они исключительно сложны и не интересны в качестве арифметических выражений. Отстаивают они свою точку зрения примерно так:

> «Да, есть странные утверждения, вроде $P_k(k)$, для которых мое понятие доказуемости или ИСТИНЫ расходится с вашим интуитивным понятием истинности, но подобные выражения едва ли встречаются в серьезной математике (по крайней мере не в такой, которая меня интересует), поскольку они абсурдно усложнены и неестественны для математики».

Несомненно, что утверждения вида $P_k(k)$, будучи полностью выписанными, были бы чрезвычайно громоздки и выглядели бы странно для числовых математических выражений. Однако за последнее время были выдвинуты сравнительно простые выражения приемлемого с точки зрения математики характера, которые эквивалентны утверждениям Гёделя.[74] Они

томе. Но происходящее здесь, конечно, доверия не внушает. Чувствуется тот же почерк, тот же стиль, те же методы. Опять ищется (скорее всего – несуществующее) пересечение $P_k(k)$ диагонали и строки; опять игнорируются всякие соображения о величине бесконечных множеств и над всем довлеет несокрушимый постулат $\infty/\infty \equiv 1$. Если кто-нибудь из читателей в дальнейшей переписке ответит на мои вопросы, поставленные в предыдущих сносках и тем самым объяснит, о чем, собственно, Пенроуз здесь говорит, то мы сможем проанализировать доказательство «теоремы Гёделя» до конца и оценить достоверность этого доказательства. А пока что я ограничусь лишь общей оценкой ситуации. И она заключается в следующем. Для Веданской теории не имеет никакого значения, верно или не верно доказательство «теоремы Гёделя». В любом случае это относится к третичному построению – околоматематическому (но не принадлежащему собственно математике!) и лишнему по всей своей сути. Если «теорема Гёделя» верна, то она разрушает это околоматематическое построение (и слава Богу!), но если она неверна, то всё равно ясно, что это построение никуда не годится. Никакого «вселенского» значения «теорема Гёделя» в любом случае не имеет, и ничего не говорит она ни о силе вообще логики, ни о применимости алгоритмов в мышлении или о сводимости этого мышления к алгоритмам. Там есть свои законы, свои выводы – и никакая теорема Гёделя там не нужна.

[73] В действительности ход рассуждений в теореме Гёделя может быть представлен таким образом, чтобы не зависеть от полностью привнесенного извне понятия «истины» для утверждений, подобных $P_k(k)$. Однако, он по-прежнему будет зависеть от интерпретации фактического «значения» некоторых символов: в частности, «~∃» должно означать «не существует (натурального числа) ...такого, что...».

[74] В нижеследующем прописные буквы будут представлять натуральные числа, а заглавные – конечные множества натуральных чисел. Пусть $m \to [n, k, r]$ представляет такое утверждение: «Если $X = \{0, 1, ..., m\}$, каждое из подмножеств которого длиной в k элементов приписано к r ящикам, то существует “большое” подмножество Y, принадлежащее X и имеющее по крайней мере n элементов, такое, что все подмножества Y из k элементов попадут в один ящик». Здесь «большое» означает, что число элементов, входящих в Y, больше самого маленького из натуральных чисел, принадлежащих Y. Рассмотрим теперь следующее утверждение: «При любых k, r, n существует m_0 такое, что при $m > m_0$ утверждение $m \to [n, k, r]$ всегда справедливо». Дж. Парисом и Л. Харрингтоном [1977] было доказано, что это положение

недоказуемы на основании обычных аксиом арифметики, однако же следуют из некоего свойства «самоочевидности», которым обладает сама система аксиом.

Отсутствие интереса к «математической истине», исповедуемое формалистами, кажется мне очень странной позицией в приложении к философии математики. Более того: она совсем не так прагматична, как представляется. Когда математики проводят свои выкладки, они не намерены постоянно проверять, могут ли они быть сформулированы посредством аксиом и правил вывода некоторой сложной формальной системы. Единственно, что необходимо – быть уверенным в правомерности использования этих рассуждений для установления истины. Доказательство Гёделя удовлетворяет этому требованию, так что $P_k(k)$ является математической истиной с таким же правом, как и любое другое утверждение, полученное более стандартным путем с использованием изначально заданных аксиом и правил вывода.

Процедура, которая напрашивается сама собой, заключается в следующем. Давайте положим, что $P_k(k)$ – совершенно верное утверждение (переобозначим его здесь как G_0). Тогда мы можем присоединить его к нашей системе в качестве дополнительной аксиомы. Естественно, что наша новая система будет, в свою очередь, содержать новое утверждение Гёделя, скажем, G_1, которое также будет истинным числовым выражением. Соответственно, мы можем и G_1 добавить в нашу систему. Это даст нам новую улучшенную систему, которая также содержит новое утверждение Гёделя G_2 (опять же совершенно справедливое); и мы сможем снова добавить его к системе, получая следующее утверждение Гёделя G_3, которое мы тоже присоединяем – и так далее, повторяя этот процесс неограниченно. Что мы можем сказать о получившейся в результате системе, где мы используем весь набор G_0, G_1, G_2, G_3, ... как дополнительные аксиомы? Может ли эта система быть полной? Поскольку мы теперь имеем неограниченную (бесконечную) систему аксиом, то возможность применения процедуры Гёделя совсем не очевидна. Однако, это последовательное включение утверждений Гёделя является в высшей степени систематичной схемой, результат применения которой может быть истолкован как обычная конечная система аксиом и правил вывода. Эта система будет иметь свое собственное утверждение Гёделя G_w, которое мы также сможем к ней присоединить, получая новую систему и с ней – еще одно утверждение Гёделя G_{w+1}. Продолжая, как и ранее, мы получаем набор утверждений G_w, G_{w+1}, G_{w+2}, G_{w+3}, ... , каждое из которых истинно и может быть включено в нашу формальную систему. Сохраняя свойство строгой систематичности, этот процесс вновь приводит нас к созданию новой системы, которая охватывает все созданные к этому моменту аксиомы. Но и эта система, в свою очередь, имеет свое собственное утверждение Гёделя, скажем, G_{w+w} – которое можно переписать как G_{w2}, и мы можем начать всю процедуру заново. В результате этого мы получим новый бесконечный, но систематический, набор аксиом G_{w2}, G_{w2+1}, G_{w2+2}, и т.д., приводящий к еще одной новой системе – и новому утверждению Гёделя G_{w3}. Воспроизводя весь процесс, мы получаем G_{w4}, потом – G_{w5} и так далее. И эта схема также будет полностью систематичной и даст свое собственное утверждение Гёделя G_{w^2}.

Есть ли логическое завершение у этого процесса? В определенном смысле – нет; но это приводит нас к ряду трудных математических рассуждений, которые здесь не могут быть нами рассмотрены во всех деталях. Вышеуказанная процедура обсуждалась Аланом Тьюрингом в статье,[75] опубликованной в 1939 году. Примечательно, что на самом деле любое истинное (в общепринятом смысле) утверждение в арифметике может быть получено путем повторения процедуры «гёделизации» такого рода (см. Феферман [1988]). Однако это может вызвать вопрос о том, как мы в действительности решаем, является ли утверждение истинным или ложным.

эквивалентно гёделевскому утверждению для стандартных (введенных Пеано) аксиом арифметики, которое не выводится из этих аксиом и которое позволяет делать утверждения о тех аксиомах, которые «очевидно верны» (в данном случае оно говорит, например, о том, что утверждения, выведенные из аксиом, сами будут справедливыми).

[75] Статья называлась «Система логики, основанная на порядковых числах», и некоторые читатели будут уже знакомы со способом записи Канторовых порядковых чисел, который я применял для субиндексов. Иерархия логических систем, которые получаются с помощью приведенной мной процедуры, описывается с помощью вычислимых порядковых чисел. Есть несколько довольно естественных и легко формулируемых математических теорем, которые, если их пытаться доказать путем использования стандартных (введенных Пеано) правил арифметики, привели бы к «гипертрофированной» гёделевской процедуре (по числу шагов многократно превосходящей ту, что я описал ранее). Математические доказательства этих теорем по природе своей не зависят от туманных и сомнительных рассуждений, выходящих за рамки аппарата нормального математического доказательства (см. Сморински [1983]).

Исключительно важным будет также понять, как на каждом этапе нужно выполнять присоединение бесконечного семейства утверждений Гёделя, чтобы они порождали единственную дополнительную аксиому (или конечное число аксиом). Для выполнения такого присоединения требуется определенная алгоритмическая систематизация нашего бесконечного семейства. Чтобы быть уверенным в том, что подобная систематизация корректна и приводит к желаемому результату, нам придется опереться на интуитивные представления, выходящие за рамки системы – точь-в-точь, как мы это сделали для установления истинности $P_k(k)$. Именно эти «прозрения» и не могут быть систематизированы, не говоря о том, что они должны лежать вне сферы действия любой алгоритмической процедуры!

Интуитивная догадка, которая позволила нам установить, что утверждение Гёделя $P_k(k)$ является на самом деле истинным, представляет собой разновидность общей процедуры, известной логикам как принцип рефлексии: посредством нее, размышляя над смыслом системы аксиом и правил вывода и убеждаясь в их способности приводить к математическим истинам, можно преобразовывать интуитивные представления в новые математические выражения, невыводимые из тех самых аксиом и правил вывода. То, как нами была выше установлена истинность $P_k(k)$, как раз базировалось на применении этого принципа. Другой принцип рефлексии, имеющий отношение к доказательству Гёделя (хотя и не упомянутый выше), опирается на вывод новых математических истин исходя из представления о том, что система аксиом, которую мы полагаем априори адекватной для получения математических истин, является непротиворечивой. Применение принципов рефлексии часто подразумевает размышления о бесконечных множествах, и при этом нужно быть всегда внимательным и остерегаться рассуждений, которые могут привести к парадоксам наподобие расселовского. Принципы рефлексии полностью противопоставляются рассуждениям формалистов. Если использовать их аккуратно, то они позволяют вырваться за жесткие рамки любой формальной системы и получить новые, основанные на интуитивных догадках, представления, которые ранее казались недостижимыми. В математической литературе могло бы быть множество приемлемых результатов, чье доказательство требует «прозрений», далеко выходящих за рамки исходных правил и аксиом стандартной формальной системы арифметики. Всё это свидетельствует о том, что деятельность ума, приводящая математиков к суждениям об истине, не опирается непосредственно на некоторую определенную формальную систему.[76] Мы убедились в истинности утверждения Гёделя $P_k(k)$, хотя мы и не можем вывести ее из аксиом системы. Этот тип «видения», используемый в принципе рефлексии, требует математической интуиции, которая не является результатом чисто алгоритмических операций, представимых в виде некоторой формальной математической системы. Мы вернемся к этому вопросу в главе 10.

Читатель может заметить определенное сходство между рассуждениями, устанавливающими, вопреки «недоказуемости», истинность $P_k(k)$, и парадоксом Рассела.[77] Помимо этого, наблюдается сходство и с доказательством Тьюринга о невозможности существования «машины Тьюринга»[78], которая могла бы решить проблему остановки. Эти сходства не случайны. Между этими тремя событиями имеется прочная историческая нить. Тьюринг пришел к своему доказательству после изучения работ Гёделя. Сам Гёдель был очень близко знаком с парадоксом Рассела и смог преобразовать те парадоксальные рассуждения, которые уводили слишком далеко в область логических абстракций, в состоятельное математическое доказательство. (Все эти утверждения уходят корнями к диагональному процессу Кантора, описанному в предыдущей главе, с. 80.)

Почему мы должны принимать доказательства Гёделя и Тьюринга и в то же время сбрасывать со счетов рассуждения, ведущие к парадоксу Рассела? Первые являются более ясными и безупречными с точки зрения математики, тогда как парадокс Рассела строится на более туманных рассуждениях об «огромных» множествах. Но нужно признать, что различия здесь не настолько очевидны, как нам хотелось бы. Попытка придать этим различиям ясность

[76] **В.Э.:** Разумеется, не опирается. Кому вообще в голову может придти такая мысль, что эта «формалистская шелуха» играет какую-то роль в реальном мышлении?! Все математические истины вытекают из бокоанализа, осуществляемого одними (мозговыми) программами над другими программами.

[77] **В.Э.:** Нет, никакого такого сходства я не вижу. Парадокс Рассела имеет сходство с Парадоксом лжеца, потому что у обоих суть одна: зацикливание мозговой программы. А при работе с $P_k(k)$ никакого зацикливания нет.

[78] **В.Э.:** Да, такое сходство есть – и именно это и подрывает доверие к тому, что доказательство теоремы Гёделя может быть состоятельным.

была лейтмотивом всей идеи формализма. Доказательство Гёделя, с одной стороны, показывает, что строгий формальный подход не выдерживает критики, но с другой стороны, оно не приводит нас к абсолютно надежной альтернативе.[79] По-моему, этот вопрос до сих пор не разрешен. Процедура, используемая в современной математике с целью избежать рассуждений, вовлекающих в рассмотрение «огромные» множества и приводящих к парадоксу Рассела, не является полностью удовлетворительной.[80] Более того, она, как правило, формулируется в чисто формалистских терминах – или же в терминах, которые не дают нам полной уверенности, что в результате их использования не возникнет противоречий.

Как бы там ни было, мне кажется, что из доказательства Гёделя следует с очевидностью, что понятие математической истины не может быть заключено ни в одну из формальных систем. Математическая истина выходит за рамки любого формализма. Возможно, это ясно даже без теоремы Гёделя. Иначе как бы мы решали, какие аксиомы и правила вывода брать в расчет при построении формальной системы? Нашим руководством в принятии такого решения должно всегда служить интуитивное понимание о том, что является «самоочевидно верным» с учетом «смысловых значений» символов системы. Как нам решить, какие формальные системы стоит использовать (в соответствии с нашим интуитивным ощущением «самоочевидности» и «смысла»), а какие – нет? Понятие «внутренней непротиворечивости» явно не подходит для этой цели. Можно иметь много внутренне непротиворечивых систем, которые «бессмысленны» с точки зрения их практического использования, в которых аксиомы и правила вывода имеют ложные в нашем понимании значения или же не имеют никаких. «Самоочевидность» и «смысл» – это понятия, которые потребовались бы даже без теоремы Гёделя.

Однако, без этой теоремы могло бы сложиться впечатление, что интуитивные понятия «самоочевидность» и «смысл» могли бы быть использованы только в самом начале раз и навсегда, просто чтобы изначально задать формальную систему, а затем мы могли бы отказаться от них при построении строгого математического доказательства для определения истины. Тогда, в соответствии с формалистскими воззрениями, эти «расплывчатые» интуитивные понятия задействовались бы только в «предварительных» размышлениях математиков, направленных на отыскание подходящего формального доказательства; а потом, когда дело дойдет до определения математической истины, они уже не играли бы никакой роли. Теорема Гёделя демонстрирует, что такой подход в действительности не является логически состоятельным в рамках фундаментальной философии математики. Понятие математической истины выходит за пределы всей теории формализма. В этом понятии есть нечто абсолютное и «данное свыше»[81]. И это как раз то, о чем трактует математический платонизм, обсуждаемый в конце предыдущей главы. Всякая формальная система имеет свойство сиюминутности и «человеко-зависимости». Такие системы, безусловно, играют очень важную роль в математических рассуждениях, но они могут указывать только частично верное (или приблизительное) направление к истине. Настоящая математическая истина выходит за пределы сотворенного человеком.

§4.5. Платонизм или интуиционизм?

Я указал две противостоящие друг другу школы математической философии, решительно причисляя себя более к платонистскому, нежели к формалистскому воззрению. В действительности же я применил довольно упрощенный подход при их разделении. Существует множество тонкостей, которые можно было бы принять в расчет. Например, в рамках платонизма можно

---

[79] **В.Э.:** Если отказаться от (фундаментально ошибочного) пути аксиоматизации математики и перейти к тому, что предлагает Веданская теория (т.е. к обоснованию математики мозговыми программами), то положение в математике станет таким же, каково оно в науке программирования. А там нет этого вечного страха противоречий, там положение обыденно и спокойно. Рассуждайте об объектах математики так, как мы, программисты, рассуждаем о продуктах своих программ – и всё будет в порядке!

[80] Делается различие между «множествами» и «классами», где «множества» могут быть собраны вместе для образования других множеств или классов; а классы не могут образовывать сколько-нибудь более крупные объединения, будучи для этого «слишком большими». Однако не существует правила, согласно которому можно было бы решать, какие объединения могут рассматриваться как множества, а какие с необходимостью должны быть только классами – если не считать «порочно» замкнутое правило, гласящее, что множествами являются те объединения, которые можно составлять вместе, чтобы получать новые объединения!

[81] **В.Э.:** А точнее – данное мозговыми программами.

поставить вопрос о том, существуют ли в реальности объекты математической мысли или это только лишь понятие «математической истины», которое является абсолютным. Я решил не обсуждать здесь подобные различия. В моем представлении абсолютность математической истины и платонистское существование математических понятий, по существу, тождественны. «Существование», которое должно быть приписано множеству Мандельброта, к примеру, есть свойство его абсолютной природы. Принадлежит ли точка плоскости Аргана множеству Мандельброта или нет – вопрос абсолютный, не зависящий от математика или компьютера, которые его исследуют. Эта «независимость-от-математика» множества Мандельброта и обеспечивает ему платонистское существование. Более того, наиболее тонкие детали этого множества лежат за пределами того, что можно достигнуть с помощью компьютера.[82] Эти устройства способны только аппроксимировать структуры, имеющие свое, более глубокое и «не зависящее-от-компьютера», существование. Я, однако, готов согласиться с тем, что имеются и прочие разумные точки зрения, с которых можно исследовать этот вопрос. Но здесь нам нет необходимости придавать значение этим различиям.

Есть также отличие в том, насколько далеко в своем платонизме готов зайти человек, провозглашающий свою принадлежность к этой школе. Сам Гёдель был глубоко убежденным платонистом. Математические выражения, которые я до сих пор рассматривал, являют собой довольно «мягкие» примеры того, что может встретиться в этом направлении.[83] Вполне возможны и более «запутанные» выражения, особенно в теории множеств. Когда рассматриваются все мыслимые ответвления этой теории, то порой возникают множества столь громадные и причудливо сконструированные,[84] что даже такой весьма убежденный платонист, как я, может начать сомневаться в абсолютности их существования (или, напротив, несуществования)[85]. Может наступить момент, когда определения множеств становятся настолько сложными и концептуально шаткими, что вопрос об истинности или ложности относящихся к ним математических выражений становится скорее субъективным и зависящим от мнения исследователя, нежели «ниспосланным свыше». Готов ли иной математик безоглядно следовать вместе с Гёделем путем платонизма, провозглашая истинность или ложность математических выражений, оперирующих подобными огромными множествами, всегда абсолютными (или «платонистскими») по своей природе; или же он, не заходя слишком далеко, будет говорить об абсолютности этих понятий лишь в том случае, если множества окажутся не слишком велики и довольно конструктивны. Ответ на этот вопрос не имеет большого отношения к нашей дискуссии. Множества (конечные или бесконечные), которые будут иметь для нас значение, по меркам вышеупомянутых множеств выглядят до смешного маленькими! Так что различия между разными платонистскими течениями нас волновать не должны.

---

[82] **В.Э.:** Говорил, говорил правильно, и – бац! – сбился. (Именно компьютеры – т.е. программы и алгоритмы – и создают множество Мандельброта).

[83] Континуум-гипотеза, которая упоминалась в главе 3, с. 81 (и из которой следует, что $C = \aleph_1$), является наиболее «экстремальным» математическим утверждением, которое здесь встречается (хотя часто рассматриваются и куда более «экстремальные» рассуждения). Континуум-гипотеза интересна еще и потому, что сам Гёдель, совместно с Полом Дж. Коэном, показал, что эта гипотеза в действительности не зависит от стандартных аксиом и правил теории множеств. Таким образом, отношение любого математика к континуум-гипотезе позволяет причислить его к сторонникам либо формалистской, либо платонистской точки зрения. Для формалиста данная гипотеза будет «недоказуемой», поскольку ее справедливость не может быть установлена или опровергнута, если опираться на стандартную (построенную Цермело и Френкелем) формальную систему, и, значит, не «имеет смысла» называть ее ни «истинной», ни «ложной». Однако, для убежденного платониста эта гипотеза является либо истинной, либо ложной, хотя какой именно – это можно установить только путем рассуждений некоторого нового типа, идущих еще дальше, чем использование гёделевских утверждений для формальной системы Цермело–Френкеля. (Коэн [1966] сам предложил принцип рефлексии, который позволяет показать, что континуум-гипотеза – «с очевидностью ложна»!)

[84] **В.Э.:** Много разных программ (рис. VE1) громоздят одну на другую. (Ничего особенного: любая компьютерная программная система, делающая сколь-нибудь приличную работу, состоит из тысяч подпрограмм; легко представить, во что превратилась бы работа программистов, если у них не было бы нормальных средств работы с программами – алгоритмических языков –, а приходилось бы – как бедным математикам – описывать всё это при помощи аксиом и правил вывода!)

[85] Живое и не слишком насыщенное техническими деталями изложение этой темы можно найти у Ракера [1984].

Имеются, однако, и иные точки зрения в математике, такие как интуиционизм (и финитизм), которые, впадая в противоположную крайность, отказываются признавать существование каких бы то ни было бесконечных множеств.[86] Интуиционизм был основан в 1924 году датским математиком[87] Лейтзеном Э. Брауэром как альтернативный ответ – отличный от предлагаемого формализмом – на парадоксы (типа расселовского), которые могут возникать там, где бесконечные множества используются слишком вольно в математических рассуждениях. Зачатки этого подхода прослеживаются еще во времена Аристотеля, который, будучи учеником Платона, тем не менее отвергал его взгляды на абсолютное существование математических сущностей и возможность рассмотрения бесконечных множеств. Согласно интуиционизму, существование множества (бесконечного, равно как, впрочем, и конечного) не может признаваться как свойство, изначально ему присущее, а только лишь как функция правил, по которым оно организовано.

Характерная черта интуиционизма Брауэра состоит в отрицании закона «исключенного третьего». Этот закон говорит о том, что отрицание ложности некоторого выражения эквивалентно утверждению истинности этого выражения. (Или в принятой символике: $\sim(\sim P) \Leftrightarrow P$, отношение, которое нам уже встречалось ранее.) Наверное, Аристотель был бы очень недоволен, столкнувшись с отрицанием настолько логически «очевидного» факта! С общепринятых позиций здравого смысла закон «исключенного третьего» может рассматриваться как самоочевидная истина: если утверждение о том, что нечто ложно, само неверно, то это нечто должно быть непременно справедливым! (На этом законе основана математическая процедура «доказательства от противного», упомянутая на с. 63.) Но интуиционисты считают допустимым отвергать справедливость этого закона. Основная причина здесь в том, что они занимают иную позицию по отношению к понятию существования, требуя, чтобы перед признанием существования математического объекта предъявлялось его конкретное (мысленное) построение. То есть, для интуиционалиста «существование» означает «конструктивное существование». В математическом доказательстве, использующем принцип «доказательства от противного», сперва выдвигается некая гипотеза, ложность которой затем устанавливается путем обнаружения противоречий, к которым приводят следствия из этой гипотезы. Эта гипотеза может принимать форму утверждения о том, что математический объект с требуемыми свойствами не существует. Когда это приводит к противоречию, то в обычной математике делается вывод о том, что данный объект да, существует. Но подобное доказательство, само по себе, не содержит руководства для построения такого объекта. Такое существование для интуициониста существованием отнюдь не является; и именно на этом основании они отказываются признавать закон «исключенного третьего» и процедуру «доказательства от противного». Сам Брауэр был совершенно неудовлетворен таким неконструктивным подходом к понятию существования.[88] Без указания реально осуществимого метода построения, говорил он, такая теория существования будет бессмысленной. В логике Брауэра нельзя сделать заключение о существовании объекта, исходя из ложности утверждения о его несуществовании!

---

[86] Интуиционизм был назван так потому, что ему предназначалось служить отражением человеческой мысли.

[87] **В.Э.:** Брауэр был голландским математиком (по-английски: *Dutch mathematician*).

[88] Сам Брауэр начал размышлять в этом направлении, в частности, потому, что очень придирчиво и болезненно относился к «неконструктивности» доказательства своей теоремы из области топологии, «теоремы Брауэра о неподвижной точке». Эта теорема утверждает, что, если вы возьмете круг – то есть окружность вместе со всеми точками внутри нее – и будете непрерывно двигать его внутри области, где он находился изначально, то найдется по крайней мере одна точка круга, – называемая неподвижной точкой, – которая окажется точно там же, откуда она начала движение. Не ясно, где именно располагается эта точка, и может ли их быть несколько – теорема говорит только о существовании такой точки. (Среди математических теорем существования, эта, на самом деле, носит довольно «конструктивный» характер. Примеры теорем существования более высокой степени неконструктивности – это теоремы, зависящие от так называемой «аксиомы выбора» или «леммы Цорна» (см. Коэн [1966], Ракер [1984]).) Трудность в случае Брауэра была аналогична той, что возникает в следующей задаче: найти точки, в которых f обращается в нуль, если известно, что f – действительная непрерывная функция действительной переменной, которая принимает как положительные, так и отрицательные значения. Стандартная процедура заключается в последовательном делении пополам отрезка, на котором функция меняет свой знак; но решение о том, какое именно промежуточное значение принимает функция (положительное, отрицательное или нулевое), может оказаться неконструктивным в том смысле, которого требует Брауэр.

По моему мнению, несмотря на похвальное стремление искать «конструктивное» решение вопроса о математическом существовании, интуиционизм, исповедуемый Брауэром, всё же является слишком радикальным. Брауэр впервые опубликовал свои идеи в 1924 году, более чем за десять лет до работ Тьюринга и Черча. Теперь, когда понятие конструктивности – в терминах теории Тьюринга о вычислимости – может изучаться в общепринятых рамках математической философии, уже нет необходимости впадать в крайности, как к тому нас призывает Брауэр. Мы можем исследовать конструктивность как самостоятельный предмет, отдельный от вопроса математического существования. Если мы последуем путем интуиционизма, то будем вынуждены отказаться от использования очень мощных приемов доказательства в математике, заметно ограничивая и лишая силы сам предмет.

Я не хочу излишне подробно останавливаться на разнообразных трудностях и кажущихся абсурдностях, к которым приводит интуиционистский подход; но упоминание некоторых проблем может оказаться полезным. Один из примеров, к которому часто обращается для иллюстрации Брауэр, касается дробной части числа π:

$$3{,}14152653589793\ldots .$$

Существует ли двадцать последовательных семерок где-нибудь в этой части, т.е.:

$$\pi = 3{,}14152653\ldots\ 77777777777777777777\ldots$$[89]

или же нет? В обычных математических терминах всё, что мы можем сказать на сегодняшний день, это то, что они либо существуют, либо нет – и мы не знаем, какая из этих возможностей верна! Казалось бы, вполне безобидное утверждение. Однако правомерность утверждения «последовательность из двадцати семерок либо существует где-то в дробной части числа π, либо нет» будет отвергаться интуиционистами до тех пор, пока не получится установить (некоторым приемлемым с точки зрения интуиционизма конструктивным образом), что такая последовательность действительно существует, или же что такой последовательности нет! Прямого подсчета было бы достаточно для того, чтобы доказать, что данная последовательность действительно существует в дробной части π, но для доказательства невозможности ее существования потребовалась бы математическая теорема. Пока ни один компьютер не в состоянии просчитать дробную часть π с такой точностью, чтобы определить наличие там искомой последовательности. Можно было бы, с вероятностной точки зрения, предположить ее существование, однако, даже если бы компьютер вычислял каждую секунду, скажем, по 10^{10} цифр, то для нахождения этой последовательности потребовалось бы предположительно от ста до тысячи лет. Мне представляется гораздо более вероятным, что существование такой последовательности будет однажды установлено скорее математически, чем путем прямых вычислений (возможно, как побочный результат более глобального и интересного исследования) – хотя не исключено, что это будет сделано неприемлемым для интуиционистов способом!

Данная проблема не имеет для математики особого значения и приведена лишь как наглядный пример. Брауэр, с позиций радикального интуиционизма, сказал бы, что в настоящее время утверждение «где-то в дробной части числа π существует двадцать последовательных семерок» не является ни справедливым, ни ложным. Если когда-либо в дальнейшем будет установлен конкретный результат – посредством вычислений или путем (интуиционистского) математического доказательства – то тогда утверждение станет «истинным» или «ложным»,

---

[89] **В.Э.:** В (моем) английском оригинале: «*Does there exist a succession of ten consecutive sevens somewhere in this expansion, i.e.* π = 3.141592653589793.....7777777777....., *or does there not*?» Откуда в русском тексте взялись <u>двадцать</u> семерок?! Или сам Пенроуз поменял в более позднем издании? Но ведь пример не Пенроуза, а Брауэра, но Брауэр давно умер (2 декабря 1966 года) и не мог изменить свой пример! (Число π тоже в русской книге неверно в пятом знаке после запятой... Причем два раза... (А в других местах правильно: см. §2.5 в первом томе и §3.2 в этом)). **P.S. (Через два часа)**. Похоже, Пенроуз все-таки исказил пример Брауэра, потому что его оценка вероятности встречи ряда семерок в десятичном представлении числа π в моем оригинале (копия главы из книги Академической библиотеки Латвии) звучит так: «*One's expectation on probabilistic grounds would be that such a succession does actually exist, but that even if a computer were to produce digits consistently at the rate of, say, one per second, it would be likely to take something of the order of between one hundred and one thousand years to find the sequence*!» Как видим, здесь он говорит о генерации одного знака в секунду, а в более позднем издании – уже о 10^{10} знаках в секунду; чтобы при этом те 100–1000 лет сохранились в силе, Пенроуз поменял 10 семерок на 20 семерок. Но у Брауэра было 10 семерок! Пример ведь известный – я его помню еще по книгам, которые читал 30 лет назад. Потому и стал исследовать, откуда же здесь взялись 20 семерок...

соответственно.[90] Сходный пример представляет собой и «последняя теорема Ферма». Вновь, согласно крайнему интуиционизму Брауэра, это утверждение не может быть сегодня признано ни ложным, ни истинным, но возможно, что его значение будет определено в будущем. По-моему, такая субъективность и «конъюнктурность» понятия математической истины просто неприемлема. Действительно, вопрос, будет ли – а если будет, то когда – официально признана «доказанность» некоторого математического результата, является весьма субъективным. Математическая истина не должна подчиняться такому «общественно-зависимому» критерию. Помимо этого, опираться на понятие математической истины, зависящее от времени – это, мягко говоря, наиболее неудобный и неудовлетворительный подход для математики, которую предполагается использовать для достоверного описания физического мира. Не все интуиционисты придерживаются таких радикальных взглядов, как Брауэр. И всё же точка зрения интуиционистов является, бесспорно, крайне неудобной, даже когда она родственна идеям конструктивизма. Немногие современные математики строго исповедуют чистый интуиционизм, даже если бы единственной причиной этого была бы его ограниченность относительно типов математических рассуждений, которые он позволяет использовать.

Я коротко описал три основных направления в современной математической философии: формализм, платонизм и интуиционизм.[91] Я не скрываю, что практически целиком отдаю предпочтение платонистской точке зрения, согласно которой математическая истина абсолютна и вечна, является внешней по отношению к любой теории и не базируется ни на каком «рукотворном» критерии; а математические объекты обладают свойством собственного вечного существования, не зависящего ни от человеческого общества, ни от конкретного физического объекта. Я попытался привести аргументы в пользу этой точки зрения в этом и предыдущем разделах, а также в конце третьей главы. Я надеюсь, что читатель готов следовать за мной и далее в этих рассуждениях, которые будут очень важны для понимания многих положений в дальнейшем.

§4.6. Теоремы гёделевского типа как следствие результатов, полученных Тьюрингом

В моем изложении теоремы Гёделя я опустил многие детали и к тому же оставил в стороне то, что относилось к неразрешимости вопроса о непротиворечивости системы аксиом и было исторически наиболее важной частью его доказательства. Моя задача состояла не в том, чтобы акцентировать внимание на «проблеме доказуемости непротиворечивости аксиом», столь важной для Гильберта и его современников; я стремился показать, что специфическое утверждение Гёделя – которое нельзя ни подтвердить, ни опровергнуть исходя из аксиом и правил вывода рассматриваемой формальной системы – оказывается с очевидностью верным, если опираться в наших рассуждениях на интуитивное понимание смысла применяемых процедур.

Я уже упоминал, что Тьюринг разработал свое доказательство неразрешимости проблемы остановки после изучения работ Гёделя. Оба доказательства имеют много общего и, естественно, основные положения из результатов Гёделя могут быть непосредственно получены путем использования процедуры Тьюринга. Давайте посмотрим, как это происходит, и как при этом можно несколько иным образом взглянуть на то, что осталось за кулисами теоремы Гёделя.

Непременное свойство формальной математической системы заключается в существовании вычислимого способа решить, является ли некоторая строка символов доказательством соответствующего математического утверждения или нет. Весь смысл формализации понятия математического доказательства в конечном счете сводится к тому, чтобы не требовалось

---

[90] **В.Э.:** Вообще не суть важно, характеризовать ли ситуацию словами «*утверждение «где-то в дробной части числа π существует десять последовательных семерок» не является ни справедливым, ни ложным*» или словами «*это утверждение истинно или ложно, только мы не знаем, каково именно оно*». Гораздо важнее просто представлять себе точно и ясно саму ситуацию, а именно: что речь идет о потенциальном продукте алгоритма, что после того, как этот алгоритм задан, его свойства объективны и не зависят от воли человека, но в то же время это всего лишь потенциальный продукт, не существующий нигде как физическая реальность. Человек, который (подобно мне) всё это ясно осознает, не чувствует никакой необходимости выбирать между мнением Брауэра и мнением платонистов (они оба правы).

[91] **В.Э.:** Из этих трех направлений самым слабым, бесперспективным и безнадежным, конечно, является формализм. Это вообще не математика, а искусственное третичное построение рядом со зданием математики. А платонизм и интуиционизм фактически объединяются Веданской теорией, которая, раскрыв подлинную сущность математики, стирает между ними границу.

никакого дополнительного суждения о состоятельности того или иного типа рассуждений. Необходимо обеспечить возможность проверять полностью механическим и заранее определенным способом, что предполагаемое доказательство и в самом деле является таковым – то есть должен существовать алгоритм для проверки доказательств. С другой стороны, мы не требуем существования алгоритмической процедуры нахождения доказательств истинности (или ложности) предлагаемых математических утверждений.

Как оказывается, алгоритм отыскания доказательства внутри произвольной формальной системы присутствует всегда, если только система допускает какое-нибудь доказательство. Действительно, мы прежде всего должны предполагать, что наша система формулируется на некотором языке символов, который можно выразить в терминах некоторого конечного «алфавита» символов. Как и ранее, давайте упорядочим наши строки символов лексикографически, что, как мы помним, означает расставление в алфавитном порядке строк каждой определенной длины, где все строчки единичной длины идут первыми, за ними следуют (также упорядоченные) строки из двух символов, потом – из трех, и так далее (с. 96).

Тогда мы будем иметь корректно построенные и пронумерованные в соответствии с лексикографической схемой доказательства.[92] Располагая нашим списком доказательств, мы одновременно имеем и перечень всех теорем нашей формальной системы, поскольку теорема – это утверждение, которое стоит в последней строчке списка корректно построенных доказательств.[93] Подобный перечень полностью проверяется непосредственными вычислениями: ведь мы можем рассматривать все строки символов системы – независимо от того, имеют они смысл как доказательства или нет – и начать тестировать нашим алгоритмом первую строчку, чтобы понять, является ли она доказательством, и отбросить ее, если нет; затем мы подобным же образом тестируем вторую строчку и исключаем ее, если и она не является доказательством; потом следует третья строчка, четвертая и так далее. Посредством этого мы в конце концов достигнем строки, содержащей доказательство, если таковая имеется в нашем списке.

Таким образом, если бы Гильберту удалось отыскать свою математическую систему – систему аксиом и правил вывода, достаточно мощную, чтобы позволить решать, путем формального доказательства, вопрос о справедливости или ложности любого математического утверждения, корректно сформулированного в рамках системы, – то тогда существовал бы общий алгоритмический метод выяснения истинности любого такого рассуждения. Почему это так? Потому что, если мы при помощи процедуры, описанной выше, находим искомое утверждение как последнюю строчку некоторого доказательства, то это утверждение автоматически считается доказанным. Если же, напротив, мы находим последнюю строчку, содержащую отрицание нашего утверждения, то мы тем самым доказываем его ложность. Если бы схема Гильберта была полной, то либо одна, либо другая возможность обязательно имела бы место (и если бы система была непротиворечивой, то обе возможности никогда бы не могли быть реализованы одновременно). То есть наша механическая процедура всегда бы прерывалась на некотором шаге и мы бы имели универсальный алгоритм для доказательства истинности или ложности всех утверждений системы. Это находилось бы в противоречии с результатами Тьюринга, изложенными во второй главе, согласно которым не существует общего алгоритма для доказательства математических утверждений. И, как следствие, мы доказали теорему Гёделя о том, что ни одна система наподобие задуманной Гильбертом не может быть полной в обсуждаемом нами смысле.

В действительности теорема Гёделя носит более частный характер, поскольку от формальной системы того типа, который рассматривал Гёдель, требовалась адекватность по отношению к арифметическим утверждениям, а не математическим утверждениям вообще. Можем ли мы устроить так, чтобы все необходимые операции машины Тьюринга выполнялись только при помощи арифметики? Или, иными словами, могут ли все вычислимые функции натуральных чисел (т.е. рекурсивные, или алгоритмические функции – результаты действия

---

[92] **В.Э.:** Пенроуз только что упорядочивал строки символов; тем самым у него оказались упорядоченными в этом же списке и все доказательства! Стало быть, они действительно рассматривают всё доказательство (т.е. цепочку «высказываний») просто как одну строку! Боже, – если это так, то уж тут с бесконечностями будет каша неимоверная!

[93] **В.Э.:** Теперь доказательство опять не одна строка, а целое множество строк, в котором имеется последняя строка – теорема! Да черт побери, – вы вообще в состоянии хоть как-то разобраться со своими понятиями и терминами, или нет? (И вот эта белиберда еще будет претендовать на то, что она – вершина логики!)

машины Тьюринга) быть выражены в терминах обычной арифметики? На самом деле это так, хотя и не совсем. Нам понадобится одна дополнительная операция, которую мы добавим в систему стандартных правил арифметики и логики (включая кванторы ∃ и ∀). Эта операция просто выбирает «наименьшее натуральное число такое, что $K(x)$ имеет значение “истина”», где К( ) – заданная арифметически вычислимая функция исчисления высказываний, для которой предполагается существование такого числа, т.е. что $\exists\ x\ [K(x)]$ является истинным. (Если бы такого числа не было, то наша операция повторялась бы «бесконечно»[94] стараясь обнаружить несуществующее x.) В любом случае, предшествующие рассуждения показывают, что, исходя из результатов Тьюринга, программа Гильберта по сведению целых разделов математики к вычислениям в рамках некоторой формальной системы – невыполнима.

Как оказывается, эта процедура не может с очевидностью установить, что мы имеем утверждение Гёделя (наподобие $P_k(k)$), которое верно, но внутри системы недоказуемо. Однако, если вспомнить доказательство, приведенное в главе 2 и показывающее, «как “перехитрить” алгоритм» (с. 66), то мы увидим, что можно сделать нечто похожее и в этом случае. В том доказательстве мы смогли выяснить, что для любого алгоритма, определяющего момент остановки машины Тьюринга, можно придумать такое действие машины, которое не прекращается, хотя алгоритм – в отличие от нас – «увидеть» это не способен. (Вспомните, что мы требовали от алгоритма корректно информировать нас о моменте, когда машина Тьюринга действительно остановится, хотя мы допускаем, что он может не оповестить нас, если машина на самом деле не прекратит свое действие, продолжая работать вечно.) Таким образом, как и в ситуации с теоремой Гёделя, у нас есть утверждение (безостановочное действие машины Тьюринга), истинность которого мы можем установить при помощи интуитивного понимания, хотя определенная алгоритмическая процедура нам такой возможности и не дает.

§4.7. Рекурсивно нумеруемые множества

Существует способ для описания основных результатов, полученных Гёделем и Тьюрингом, в графическом виде, на языке теории множеств. Это позволит нам избежать произвольности описания в терминах конкретного символизма или в рамках формальной системы и выделить наиболее существенное. Мы будем рассматривать только множества натуральных чисел (конечные или бесконечные), такие как {4, 5, 8}, {0, 57, 100003}, {6}, {0}, {1, 2, 3, 4, ..., 9999}, {1, 2, 3, 4, ...}, {0, 2, 4, 6, 8, ...} и т.п.; или даже всё множество N = {0, 1, 2, 3, 4, ...}, равно как и пустое множество ∅ = {}. Нас будут интересовать только вопросы вычислимости, скажем: «Какие множества натуральных чисел могут быть сгенерированы с помощью алгоритма, а какие – нет?»

Чтобы сформулировать такой вопрос, мы можем считать, что каждое отдельное число n обозначает определенную строчку символов некоторой формальной системы. Это будет n-я строка символов, скажем, Q_n, согласно заданному в системе лексикографическому порядку («синтаксически корректных») утверждений. Тогда каждое натуральное число будет представлять некое утверждение. При этом множество всех утверждений формальной системы соответствует всему множеству натуральных чисел; а, допустим, теоремы этой системы будут составлять некоторое меньшее множество натуральных чисел, скажем, множество P. Однако детали произвольной системы нумерации утверждений для нас несущественны. Всё, что нам потребуется для установления соответствия между натуральными числами и утверждениями – это заданный алгоритм получения каждого утверждения Q_n (записанного должным образом в символических обозначениях) из отвечающего ему натурального числа n; и другой алгоритм для получения n из Q_n. Имея эти алгоритмы в своем распоряжении, мы вольны идентифицировать множество натуральных чисел с множеством утверждений конкретной формальной системы.

Давайте выберем формальную систему достаточно непротиворечивую и широкую для того, чтобы включать в себя все действия всех машин Тьюринга – и, более того, «имеющую смысл» с учетом требования «самоочевидной справедливости» ее аксиом и правил вывода. Далее, пусть ряд утверждений Q_0, Q_1, Q_2, ... формальной системы имеет доказательства внутри системы. Эти

---

[94] Вообще говоря, для нас является существенным, чтобы такие неудачные варианты могли реализоваться, тем самым гарантируя нам потенциальную возможность описывать любую алгоритмическую операцию. Вспомните, что для описания машин Тьюринга в общем мы должны допустить существование, в частности, машин, которые никогда не останавливаются.

«доказуемые» утверждения будут иметь номера, которые составляют некоторое множество в N – по сути, это множество *P* «теорем», рассмотренных выше. Мы уже видели, что существует алгоритм для последовательного построения всех утверждений произвольно заданной формальной системы, имеющих доказательства. (Как отмечено ранее, «*n*-е доказательство» Π_n получается из *n* алгоритмически. Всё, что нам надо – это посмотреть на последнюю строчку *n*-го доказательства, чтобы найти «*n*-е утверждение, доказуемое в рамках системы», т.е. *n*-ю «теорему».) Следовательно, мы имеем алгоритм последовательной генерации элементов *P* (при которой возможны и повторения, что для нас не важно).

Множество типа *P*, которое может быть построено с помощью некоторого алгоритма, называется рекурсивно нумеруемым. Заметьте, что множество утверждений, ложность которых может быть установлена в рамках системы – т.е. утверждений, чьи отрицания являются справедливыми – точно так же рекурсивно нумеруемо, поэтому мы можем просто нумеровать доказуемые утверждения по мере продвижения, учитывая и их отрицания. Есть большое число других, тоже рекурсивно нумеруемых, подмножеств N, для определения которых нам вовсе необязательно ссылаться на нашу формальную систему. Простыми примерами рекурсивно нумеруемых множеств могут служить множество четных чисел

$$\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\},$$

множество квадратов

$$\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$$

и множество простых чисел

$$\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}.$$

Очевидно, мы можем построить любое из этих множеств при помощи алгоритма. Для каждого из этих трех примеров будет справедливо следующее свойство: дополнительное по отношению к рассматриваемому множество (состоящее из всех натуральных чисел, не входящих в исходное множество) является также рекурсивно нумеруемым. Дополнительными по отношению к вышеприведенным множествам будут, соответственно:

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\},\ \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, \ldots\} \text{ и } \{0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots\}.$$

Было бы достаточно просто указать алгоритм и для этих дополнительных множеств. Конечно же, мы можем выяснить алгоритмическим путем, является ли произвольное натуральное число *n* четным, квадратом натурального числа или простым числом, соответственно. Это дает нам алгоритм для построения обоих множеств, поскольку мы можем перебирать все натуральные числа и для каждого из них решать, принадлежит ли оно к определенному множеству или же к его дополнению. Множество, которое обладает свойством рекурсивной нумеруемости вместе со своим дополнением, называется рекурсивным. Очевидно, что дополнительное по отношению к рекурсивному множество также будет рекурсивным.

А существуют ли множества, которые рекурсивно нумеруемы, но рекурсивными, тем не менее, не являются? Давайте на минутку задумаемся над тем, какие следствия могут вытекать из подобного свойства. Поскольку элементы такого множества могут быть получены алгоритмическим путем, мы имели бы способ решить, принадлежит ли некоторый элемент – который, мы предполагаем, да, принадлежит множеству, – рассматриваемому множеству или нет. Всё, что от нас требуется, – это запустить алгоритм и прогонять его через все элементы множества до тех пор, пока он не найдет элемент, который мы ищем. Теперь давайте предположим, что искомый элемент не принадлежит данному множеству. В таком случае использование нашего алгоритма ничего не даст: он будет работать вечно, будучи не в состоянии прийти к решению. В этом случае нам потребуется алгоритм для построения дополнительного по отношению к исходному множества. Если этот алгоритм сможет обнаружить искомый элемент, то мы будем точно знать, что он не входит в состав исследуемого множества. Имея на вооружении оба алгоритма, мы так или иначе найдем данный элемент путем поочередного применения этих алгоритмов. Однако, такой благоприятный исход будет иметь место только в случае рекурсивного множества. Мы же предполагаем, что мы рассматриваем множество рекурсивно нумеруемое, но при этом не рекурсивное, т.е. наш предполагаемый алгоритм для построения дополнительного множества просто не существует! Таким образом, мы имеем курьезную ситуацию, когда можно определить, включен ли элемент в множество при условии, что он ему наверняка принадлежит; но в то же время нельзя гарантировать, что мы сможем это сделать посредством какого бы то ни было алгоритма для элементов, которые множеству не принадлежат.

Может ли возникнуть такая ситуация в реальности? Есть ли и вправду рекурсивно нумеруемые множества, не являющиеся рекурсивными? А как насчет множества *P*? Имеет ли это множество свойство рекурсивности? Мы знаем, что оно рекурсивно нумеруемо, так что нам остается только выяснить, будет ли также дополнительное к нему множество обладать этим свойством. Оказывается, что нет! Как мы можем сделать такой вывод? А давайте вспомним, что наряду с остальными операциями в нашей формальной системе разрешены и действия машин Тьюринга. Если мы обозначим n-ю машину Тьюринга через T_n, то выражение

«$T_n(n)$ останавливается»

– это утверждение – запишем его как $S(n)$, – которое мы можем сформулировать в рамках нашей системы для любого n. Утверждение $S(n)$ будет справедливым для одних значений n, и ложным – для остальных. Множество всех $S(n)$, образованное перебором натуральных чисел 0, 1, 2, 3, ..., будет представлено некоторым подмножеством N – скажем, S. Теперь учтем фундаментальный результат Тьюринга (глава 2, с. 63), который говорит о том, что не существует алгоритма, способного установить факт «$T_n(n)$ не останавливается» как раз в тех случаях, когда она действительно не останавливается. Это означает, что множество, состоящее из отрицаний $S(n)$, не является рекурсивно нумеруемым.

Мы видим, что часть S, принадлежащая P, состоит только из истинных $S(n)$. Почему это так? Понятно, что если любое конкретное $S(n)$ доказуемо, то оно должно быть верным (ведь наша формальная система была выбрана так, чтобы иметь «смысл»!), и поэтому часть S, лежащая в P, должна состоять исключительно из справедливых утверждений $S(n)$. Более того, ни одно верное утверждение $S(n)$ не должно лежать вне P, ибо, если $T_n(n)$ останавливается, то мы можем отыскать доказательство этому в рамках нашей системы.[95]

Теперь предположим, что дополнение P рекурсивно нумеруемо. Тогда у нас был бы алгоритм для построения элементов этого дополнительного множества. И мы смогли бы запустить его и пометить каждое утверждение $S(n)$, которое попадает в поле его действия. Это все будут ложные утверждения $S(n)$, так что наша процедура, по сути, обеспечит нам рекурсивную нумерацию множества таких утверждений. Но выше мы установили, что это множество не нумеруемо таким образом. Это противоречие показывает, что дополнение P все-таки не может быть рекурсивно пронумеровано; а P, следовательно, не является рекурсивным, что и требовалось доказать.

Эти свойства с очевидностью демонстрируют, что наша формальная система не может быть полной: то есть всегда будут существовать утверждения, чью справедливость (или ложность) невозможно доказать в рамках системы. Ведь если предположить, что такие «неразрешимые» утверждения не существуют, то дополнение множества P с необходимостью было бы множеством опровергаемых утверждений (всё, что недоказуемо, обязано быть опровергаемо). Но мы уже знаем, что опровергаемые утверждения составляют рекурсивно нумеруемое множество, что делает P рекурсивным. Однако, P не рекурсивно – противоречие, которое доказывает требуемую неполноту. Это основное утверждение теоремы Гёделя.

А как насчет подмножества T множества N, которое состоит из истинных утверждений нашей формальной системы? Рекурсивно ли T? Или оно только рекурсивно нумеруемо? А его дополнение? Оказывается, что ответ на все эти вопросы – отрицательный. Один из способов установить это – воспользоваться сделанным ранее выводом о невозможности алгоритмически сгенерировать ложные утверждения вида «$T_n(n)$ останавливается». Как следствие, ложные утверждения в целом не могут быть получены с помощью алгоритма, поскольку такой алгоритм, в частности, пронумеровал бы все вышеупомянутые ложные «$T_n(n)$ останавливается»-утверждения. Аналогично, и множество всех истинных утверждений не может быть построено при помощи алгоритма (так как любой подобный алгоритм легко модифицируется для нахождения ложных утверждений путем отрицания каждого из генерируемых им утверждений). Поскольку, тем самым, истинные утверждения не являются (равно как и ложные) рекурсивно нумеруемыми, то они образуют гораздо более глубокий и сложноорганизованный массив, чем утверждения, имеющие доказательство внутри системы. И это иллюстрирует еще один аспект теоремы Гёделя: что понятие математической истины только частично досягаемо в рамках любой формальной системы.

[95] Доказательство могло бы, в действительности, состоять из последовательности шагов, которые отражали бы действие машины, продолжающееся до ее остановки. Доказательство завершалось бы, как только машина остановится.

Существуют некоторые простые классы истинных арифметических утверждений, которые всё же образуют рекурсивно нумеруемые множества. Например, как это нетрудно видеть, истинные утверждения вида

$$\exists\, w, x, ..., z\, [f\,(w, x, ..., z) = 0],$$

где f ( ) – некоторая функция, построенная из обычных арифметических операций сложения, вычитания, умножения и возведения в степень, составляют рекурсивно нумеруемые множества[96] (которые я обозначу через A). Пример утверждения такого рода – хотя мы не знаем, верно ли оно – это отрицание последней теоремы Ферма,[97] для которой мы можем взять за f ( ) функцию

$$f\,(w, x, y, z) = (x + 1)^{w+3} + (y + 1)^{w+3} – (z + 1)^{w+3}.$$

Однако, множество A не является рекурсивным (факт, который не так легко установить, хотя он и вытекает из оригинального доказательства Гёделя). Значит, мы не имеем никаких алгоритмических средств для выяснения – хотя бы в принципе – истинности или ложности последней теоремы Ферма.

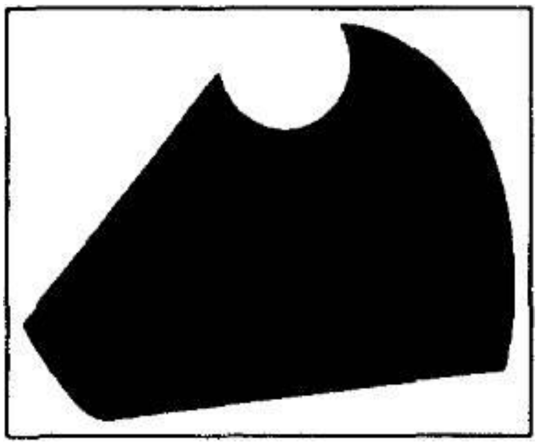


Рис. 4.1. Очень схематичное представление рекурсивного множества

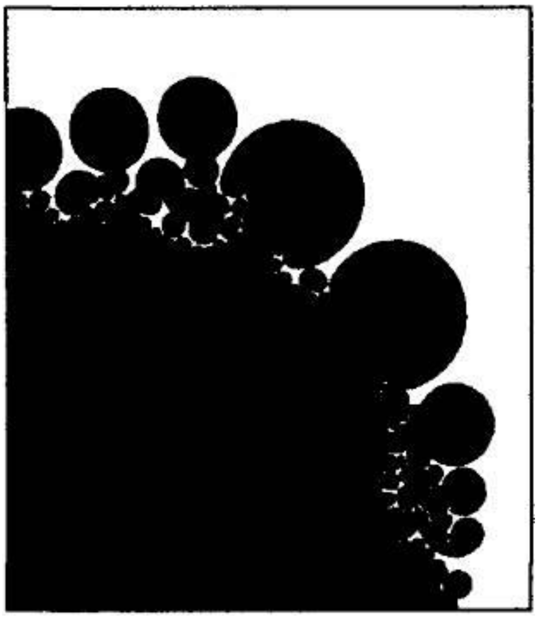


Рис. 4.2. Очень схематичное представление рекурсивно нумеруемого множества (темная область), которое не является рекурсивным. Здесь светлая область определяется только по «остаточному принципу», когда удаляется темная часть, построенная при помощи вычислений; а установить путем прямых вычислений, принадлежит ли заданная точка белой области, нельзя

На рис. 4.1 я попытался схематически представить рекурсивное множество как фигуру с простой и изящной границей, так что кажется, что определить непосредственно принадлежность произвольной точки этому множеству – дело несложное. Каждая точка на рисунке соответствует некоторому натуральному числу. При этом дополнительное множество также представлено в виде просто выглядящей области на плоскости.

На рис. 4.2 я постарался изобразить рекурсивно нумеруемое, но не рекурсивное множество в виде области со сложной границей, где подразумевается, что множество с одной стороны границы, – той, что рекурсивно нумеруема – должно выглядеть проще, чем с другой. Фигуры очень схематичны и не претендуют на какую бы то ни было «геометрическую аккуратность». И конечно же, не стоит придавать большого значения тому, что эти рисунки изображены так, как если бы они были расположены на двумерной плоскости!

На рис. 4.3 я схематично обозначил, как расположены области P, T и A внутри множества N.

---

[96] Мы нумеруем множества {v, w, x, ... , z}, где v представляет функцию f в согласии с некоторой лексикографической схемой. Мы (рекурсивно) проверяем на каждом этапе справедливость равенства

$$f\,(w, x, ..., z) = 0$$

и оставляем утверждение

$$\exists\, w, x, ..., z\, [(w, x, ..., z) = 0]$$

только в том случае, если это равенство выполняется.

[97] См. сноску 5 на с. 62. – *Прим. ред.*

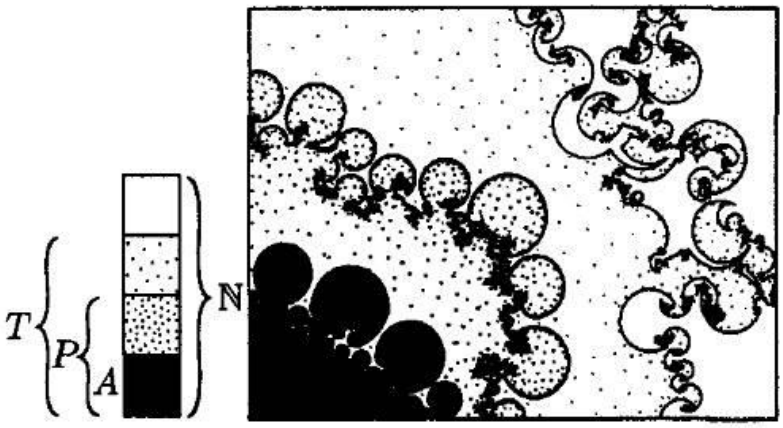


Рис. 4.3. Очень схематичное представление различных множеств утверждений. Множество P утверждений, доказуемых в рамках системы, является, как и A, рекурсивно нумеруемым, но не рекурсивным. Множество T истинных утверждений даже не рекурсивно нумеруемо

§4.8. Является ли множество Мандельброта рекурсивным?

Существенной характеристикой нерекурсивных множеств является их сложноорганизованность. Это свойство должно, в некотором смысле, препятствовать любым попыткам систематизации, которая, в противном случае, привела бы к некоторой «работающей» алгоритмической процедуре. Для нерекурсивного множества не существует общего алгоритмического пути к решению вопроса о принадлежности ему произвольного элемента (или «точки»). В начале третьей главы мы встретились с неким чрезвычайно сложно выглядящим множеством – с множеством Мандельброта. Хотя правила, по которым оно строится, поразительно просты, само множество представляет собой бесконечное разнообразие в высшей степени замысловатых структур. Может ли это быть примером настоящего нерекурсивного множества, явленного глазам смертных?

Читателю, однако, не понадобится много времени, чтобы сообразить, что эта парадигма сложности была создана специально для наших глаз волшебством вычислительных технологий с использованием современных быстродействующих компьютеров. А не являются ли компьютеры истинным воплощением алгоритмических действий? Конечно, это так, но всё же мы должны принимать во внимание способ, с помощью которого компьютеры, в действительности, создают эти картинки. Чтобы проверить, принадлежит точка плоскости Аргана – комплексное число c – множеству Мандельброта (закрашено черным) или его дополнению (светлая область), компьютер, начиная с нуля, применит отображение

$$z \to z^2 + c$$

сначала к $z = 0$, чтобы получить c; потом к $z = c$, чтобы получить $c^2 + c$; затем к $z = c^2 + c$, чтобы получить $c^4 + 2c^3 + c^2 + c$; и так далее. Если эта последовательность $0, c, c^2 + c, c^4 + 2c^3 + c^2 + c, \ldots$ остается ограниченной, то соответствующая точка c будет черной; в противном случае – белой. Как машина определяет, что такая последовательность остается ограниченной? В принципе, этот вопрос предполагает наличие информации о том, что происходит после бесконечного числа ее элементов! Сама по себе эта задача вычислительными методами не решается. К счастью, существуют способы предсказать исходя уже из конечного числа членов, когда последовательность станет неограниченной. (На самом деле, если последовательность достигает окружности радиуса $1 + \sqrt{2}$ с центром в начале координат, можно с уверенностью сказать, что она будет неограниченной.)

Таким образом, дополнение к множеству Мандельброта является, в некотором смысле, рекурсивно нумеруемым. Если комплексное число c расположено в светлой области, то существует алгоритм, подтверждающий этот факт. А как насчет самого множества Мандельброта – темного участка рисунка? Существует ли алгоритм, способный точно установить, что точка, принадлежащая предположительно темному участку, действительно ему принадлежит? Ответ на этот вопрос в настоящее время, похоже, отсутствует.[98] Я справлялся у многих коллег и экспертов, но ни один из них не слышал о подобном алгоритме. Равно как и никто из них не сталкивался с указанием на то, что такого алгоритма не существует. По крайней мере, насколько можно об этом судить, алгоритм для темной области на сегодняшний день неизвестен. Возможно, множество, дополнительное по отношению к множеству Мандельброта, действительно является примером рекурсивно нумеруемого, но не рекурсивного множества!

Прежде чем исследовать дальше это предположение, необходимо будет обсудить некоторые моменты, которые я ранее опускал. Эти вопросы будут довольно важны для нас в дальнейших рассуждениях по поводу вычислимости в физике. Я хотел бы заметить, что, на самом деле, я был несколько неточен в предшествующем изложении. Я применял такие понятия, как «рекурсивно нумеруемый» и «рекурсивный», к множествам точек в плоскости Аргана, т.е. множествам комплексных чисел. Но эти термины могут применяться только лишь для натуральных чисел и других счетных множеств. Мы видели в третьей главе (с. 80), что действительные числа не могут быть счетным множеством, равно как, следовательно, и комплексные – ведь любое действительное число может быть рассмотрено как частный случай некоторого комплексного числа с нулевой мнимой частью (с. 83). В действительности существует такое же «количество» комплексных чисел, как и действительных, а именно «C». (Чтобы установить взаимнооднозначное соответствие между комплексными и действительными числами, можно, грубо говоря, просто взять действительную и мнимую части комплексного числа (записанные в десятичной форме) и перемешать через одну поразрядно цифры из мнимой части с цифрами из вещественной, образуя, тем самым, действительное число: тогда, например, 3,6781... + i512,975... будет соответствовать действительному числу 50132,6977851....)

Дабы избежать этой проблемы, можно было бы ограничиться только вычислимыми комплексными числами, так как мы еще в третьей главе видели, что вычислимые действительные числа – а значит, и соответствующие им комплексные – являются счетными. Однако здесь кроется одна принципиальная трудность: не существует алгоритма, с помощью которого можно было бы сравнивать два вычислимых числа, полученных алгоритмически! (Мы можем алгоритмическим образом составить их разность, но мы не в состоянии будем выяснить, равна она нулю или нет. Представьте себе два алгоритма, которые генерируют цифры 0,99999... и 1,00000..., соответственно; мы никогда не узнаем, продолжаются ли нули и девятки в них до бесконечности – так, что числа оказываются равными – или же где-то в дробной части того или другого числа могут появиться иные цифры, делая эти числа неравными.) Таким образом, мы, возможно, никогда не сможем определить, равны ли между собой такие числа. Как следствие этого – наша неспособность решить даже в таком простом случае как единичный круг в плоскости Аргана (множество точек, лежащих на расстоянии не большем единицы от начала координат – черная фигура на рис. 4.4), лежит ли комплексное число в этом круге или нет. Трудность возникает не с точками, лежащими внутри или снаружи, а именно с точками на самой границе круга – то есть на самой единичной окружности. Эта окружность рассматривается по условию как часть круга. Предположим, что нам уже предоставлен в распоряжение алгоритм для получения цифр вещественной и мнимой частей некоторого комплексного числа. Если мы предполагаем, что это комплексное число лежит на единичной окружности, то мы не можем с необходимостью подтвердить этот факт. Не существует алгоритма, чтобы установить, является ли вычислимое число

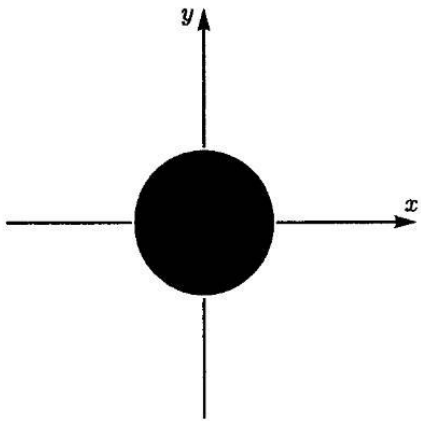


Рис. 4.4. Единичный круг, безусловно, должен рассматриваться как рекурсивное множество, но это требует определенных соглашений

$$x^2 + y^2$$

[98] Недавно я узнал от Леоноры Блюм, что (заинтересовавшись моими комментариями в первом издании этой книги) она установила, что множество Мандельброта (и его дополнение) на самом деле являются, как я и предполагал, нерекурсивными в том смысле, который описан в десятом примечании. **В.Э.:** *У меня помечено ниже как* *10.

равным единице, что служит критерием для принадлежности комплексного числа $x + iy$ данной единичной окружности.

Очевидно, это совсем не то, что нам нужно. Единичный круг, безусловно, должен рассматриваться как рекурсивное множество. Едва ли найдется сколь-нибудь значительное число множеств, более простых, чем единичный круг! Чтобы обойти эту проблему, одним из способов может быть игнорирование границы. Ведь для точек, лежащих внутри (или снаружи), безусловно существует алгоритм, устанавливающий этот факт. (Можно просто последовательно генерировать цифры числа $x^2 + y^2$, и, в конце концов, мы найдем цифру, отличную от 9 в дробной части 0,9999... или отличную от 0 – в дробной части 1,00000... .) В этом смысле единичный круг является рекурсивным. Но этот подход чрезвычайно неудобен для математики, поскольку там часто возникает необходимость ссылаться в рассуждениях на то, что происходит именно на границах. С другой стороны, вполне возможно, что такая точка зрения окажется применимой в области физики. Позднее нам еще придется вернуться к этому вопросу.

Существует другой метод, имеющий непосредственное отношение к данному вопросу, который не предполагает вообще обращения к вычислимым комплексным числам. Вместо того, чтобы пытаться пронумеровать комплексные числа внутри или снаружи рассматриваемого множества, мы просто будем вызывать алгоритм, который для любого наперед заданного комплексного числа будет определять, принадлежит оно нашему множеству или же его дополнению. Говоря «наперед заданный», я подразумеваю, что для каждого числа, которое мы рассматриваем, нам некоторым – быть может, «волшебным» – образом известны цифры мнимой и вещественной части, одна за другой, и в таком количестве, сколько нам нужно. Я не требую, чтобы существовал алгоритм, известный или неизвестный, для нахождения этих цифр. Множество комплексных чисел считалось бы «рекурсивно нумеруемым», если бы существовал хотя бы единственный алгоритм такой, что для любой заданной ему вышеуказанным образом последовательности цифр он бы говорил «да» после конечного числа шагов тогда и только тогда, когда комплексное число действительно принадлежит этому множеству. Оказывается, что как и в случае подхода, предложенного выше, эта точка зрения также «игнорирует» границы. Следовательно, внутренняя и внешняя области единичного диска будут каждая по отдельности считаться рекурсивно нумеруемыми в указанном смысле, тогда как сама граница – нет.

Для меня совершенно не очевидно, что какой-либо из этих методов дает то, что нам нужно.[99] Философия «игнорирования границ», будучи приложенной к множеству Мандельброта, может привести к потере большого числа тонких моментов. Одна часть этого множества состоит из «клякс» – внутренних областей, а другая – из «усиков». Наибольшие сложности при этом связаны, видимо, с «усиками», которые могут «извиваться» самым причудливым образом. Однако, «усики» не принадлежат внутренней части множества, и, тем самым, они были бы проигнорированы, используй мы любой из двух вышеприведенных подходов. Но даже при таком допущении остается неясность, можно ли считать множество Мандельброта рекурсивным в том случае, когда рассматриваются только «кляксы». Похоже, что вопрос этот связан с некоторым недоказанным предположением, касающимся самого множества, а именно: является ли оно, что называется, «локально связным»? Я не собираюсь здесь разбирать значение этого понятия или его важность для данного вопроса. Я хочу просто показать, что существует ряд трудностей, которые вызывают неразрешенные на сегодняшний день вопросы, касающиеся множества Мандельброта, чье решение – первоочередная задача для некоторых современных математических исследований.

Существуют также и другие подходы, которые могут использоваться с тем, чтобы обойти проблему несчетности комплексных чисел. Вместо того, чтобы рассматривать все вычислимые комплексные числа, можно ограничиться только подмножеством таких чисел, для любой пары которых можно вычислительным путем установить их равенство. Простым примером такого подмножества могут служить «рациональные» комплексные числа, у которых как мнимая, так и вещественная части могут быть представлены рациональными числами. Я не думаю, однако, что это дало бы многое в случае «усиков» множества Мандельброта, поскольку такая точка зрения накладывает очень значительные ограничения. Более удовлетворительным могло бы оказаться

---

[99] (*10) Блюмом (**В.Э.:** *может ошибка перевода и это Леонора Блюм*? *См.* Лит.), Шубом и Смэйлом [1989] была разработана новая теория вычислимости для действительных функций от действительных переменных (в отличие от общепринятых функций натуральных чисел, принимающих натуральные значения), подробности которой я узнал лишь совсем недавно. Эта теория применима и к комплексным функциям, а кроме того, может сыграть заметную роль в упомянутых мной вопросах.

рассмотрение алгебраических чисел – тех комплексных чисел, которые являются алгебраическими решениями уравнений с целыми коэффициентами. Например, все решения z уравнения

$$129z^7 - 33z^5 + 725z^4 + 16z^3 - 2z - 3 = 0$$

– это алгебраические числа. Такие числа будут счетными и вычислимыми, и задача проверки двух из них на равенство будет решаться путем прямого вычисления. (Как выясняется, многие из них будут лежать на границе единичного круга и «усиков» множества Мандельброта.) И мы можем по желанию рассматривать вопрос о рекурсивности множества Мандельброта в терминах этих чисел.

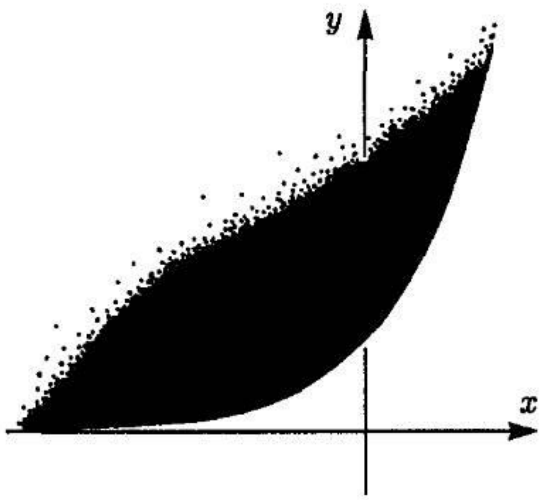


Рис. 4.5. Множество, определенное экспоненциальным соотношением $y \geq e^x$, должно также рассматриваться как рекурсивное

Возможно, что алгебраические числа оказались бы подходящим инструментом для двух обсуждаемых нами множеств, но они не снимают все наши трудности в общем случае. Пусть мы рассматриваем множество (темная область на рис. 4.5), определяемое неравенством

$$y \geq e^x,$$

где $x + iy(= z)$ – точка в плоскости Аргана. Внутренняя часть множества, равно как и внутренняя часть его дополнения, будут рекурсивно нумеруемыми в соответствии с любой из вышеизложенных точек зрения, но (как следует из знаменитой теоремы Ф. Линдеманна, доказанной в 1882 году) граница, $y = e^x$, содержит только одну алгебраическую точку, а именно точку $z = i$. В этом случае алгебраические числа никак не могут нам помочь при исследовании алгоритмической по своей природе границы! Несложно определить другой подкласс вычислимых чисел, которые будут подходить в данном конкретном случае, но при этом всё равно останется ощущение, что правильный подход нами до сих пор так и не был найден.

§4.9. Некоторые примеры нерекурсивной математики

Существует немало областей математики, где возникают проблемы нерекурсивного характера. Это означает, что мы можем сталкиваться с задачами, ответ к которым в каждом случае либо «да», либо «нет», но определить, какой из них верен, – нельзя из-за отсутствия соответствующего общего алгоритма. Некоторые из этих классов задач выглядят на удивление просто.

Например, рассмотрим задачу об отыскании целочисленных решений системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами. Эти уравнения известны под именем диофантовых (в честь греческого математика Диофанта, который жил в третьем веке до нашей эры и изучал уравнения такого типа). Подобные уравнения выглядят, например, как

$$z^3 - y - 1 = 0,$$
$$yz^2 - 2x - 2 = 0,$$
$$y^2 - 2xz + z + 1 = 0,$$

и задача состоит в том, чтобы определить, могут ли они быть решены в целых x, y, z. Оказывается, что в этом конкретном случае существует тройка целых чисел, дающая решение этой системы:

$$x = 13, y = 7, z = 2.$$

Но для произвольной системы диофантовых уравнений никакого алгоритма не существует.[100] Арифметика Диофанта, несмотря на простоту входящих в нее выражений, является частью неалгоритмической математики!

(Несколько менее тривиальным является пример топологической эквивалентности многообразий. Я упоминаю об этом только вкратце, ибо в главе 8 будут рассматриваться вопросы, имеющие к данному определенное отношение. Чтобы понять, что такое «многообразие», представьте для начала петлю, которая является многообразием в одном измерении; затем представьте замкнутую поверхность – многообразие в двух измерениях. Далее попробуйте представить некую «поверхность», имеющую три и более измерений. «Топологическая эквивалентность» двух многообразий означает, что одно из них может быть деформировано в другое путем непрерывных преобразований – без разрывов и склеек. Так, сфера и поверхность куба являются топологически эквивалентными, хотя они не эквивалентны поверхности кольца или чашки с ручкой – хотя последние топологически эквивалентны друг другу. При этом для двумерных многообразий существует алгоритм, позволяющий определить, эквивалентны ли произвольные два многообразия друг другу или нет – в сущности, заключающийся в подсчете «ручек», которые имеет каждая из поверхностей. Для случая трех измерений вопрос о существовании такого алгоритма на момент написания книги остается без ответа; однако для четырех и более измерений уже известно, что такого алгоритма быть не может. Возможно, четырехмерный случай имеет некое отношение к физике, поскольку согласно теории общей относительности Эйнштейна пространство и время совместно образуют четырехмерное многообразие (см. главу 5, с. 163). Герох и Хартли в 1986 году высказали предположение о том, что свойство неалгоритмичности может иметь отношение к «квантовой гравитации» (см. также главу 8).)

Давайте теперь рассмотрим иной тип задач, называемых задачами со словами.[101] Допустим, у нас есть некий алфавит символов, и мы рассматриваем различные строки этих символов, трактуя их как слова. Слова могут сами по себе не иметь никакого значения, но мы должны иметь некоторый (конечный) список «равенств» между ними, которые мы сможем использовать для дальнейшего построения таких «равенств». Это делается путем подстановки слов из исходного списка в другие (как правило, более длинные) слова, которые содержат их в виде составных частей. Каждая такая часть может быть заменена на равную ей в соответствии с используемым списком. Тогда для любой данной пары слов мы должны решить задачу об их равенстве согласно этим правилам.

В качестве примера мы можем взять для нашего исходного списка, скажем, такие равенства:

EAT = AT
ATE = A
LATER = LOW
PAN = PILLOW
CARP = ME.

Отсюда мы можем, например, вывести

LAP = LEAP,

используя последовательные замены из второго, первого и снова второго соотношения из нашего исходного листа:

LAP = LATEP = LEATEP = LEAP.

Проблема теперь заключается в том, чтобы выяснить, сможем ли мы для любой наперед заданной пары слов осуществить вышеописанным образом переход от одного из них к другому? Можем мы перейти от CATERPILLAR к MAN, или, скажем, от CARPET – к MEAT? Ответ в первом случае оказывается утвердительным, тогда как во втором – отрицательным. Когда ответ утвердителен, стандартный путь показать его справедливость заключается в построении цепочки равенств, где каждое из слов получается из предыдущего с учетом допустимых соотношений.

[100] Это дает (отрицательный) ответ на десятую проблему Гильберта, упомянутую на с. 44 (см., например, Дэвлин [1988]). Здесь количество переменных неограниченно. Однако, известно, что для выполнения свойства неалгоритмичности достаточно и девяти.

[101] Эта конкретная задача называется (если быть более точным) «задачей со словами для полугрупп». Существуют также и другие разновидности этой задачи, в которых действуют несколько отличные правила. Но нас это сейчас волновать не должно.

Итак, имеем (обозначая буквы, назначенные к замене, жирным шрифтом, а только что измененные – курсивом)[102]:

C**ATE**RPILLAR = C*A*RPILL**A**R = CARPIL**L*ATE*R** = CAR**PIL*LOW*** = **CAR*P****AN* = *ME***A**N = M**E*ATE***EN = M***AT*E**N = M*A*N.

Как мы можем утверждать, что посредством разрешенных подстановок невозможно получить MEAT из CARPET? Для демонстрации этого факта придется подумать чуть больше, однако показать это не так уж сложно, причем множеством разных способов. Простейшим представляется следующий: в каждом «равенстве» из нашего списка число букв A плюс число букв W плюс число букв M с каждой стороны одинаково. Значит, общая сумма указанных букв не может меняться в процессе преобразования по допустимым нашим списком правилам. Однако, для CARPET эта сумма равна 1, а для MEAT – 2. Следовательно, не существует способа получить из первого слова второе при помощи вышеприведенного списка равенств.[103]

Заметьте, что когда два слова «равны», мы можем показать это, просто приведя допустимую формальную строчку символов, построенную с помощью заданных нами правил; тогда как в случае их «неравенства» мы должны прибегать к рассуждениям об этих самых правилах. Существует четкий алгоритм, который мы можем использовать для установления «равенства» между двумя словами в том случае, когда они действительно «равны». Всё, что нам требуется, это составить лексикографический перечень всех возможных последовательностей слов, и потом вычеркнуть из этого списка любую строчку, где имеется пара слов, в которой последующее нельзя получить из предыдущего при помощи какого бы то ни было правила из исходного списка. Оставшиеся последовательности дадут нам набор всех искомых «равенств» между словами. Однако, в общем случае нет такого явного алгоритма для случая, когда два слова «неравны», и нам, возможно, пришлось бы применить «интеллект» для установления этого факта. (Конечно же, мне потребовалось некоторое время, прежде чем я заметил описанный выше «трюк»[104], при помощи которого доказал, что CARPET и MEAT «неравны». А для другого примера «трюк» мог бы понадобиться совершенно иной. Кстати, интеллект помогает – хотя и не обязательно – и в случае, когда необходимо установить существование некоторого «равенства».)

В действительности, для нашего конкретного списка из пяти «равенств», которые составляют исходный список в рассмотренном выше примере, привести алгоритм, устанавливающий «неравенство» в случае, когда два слова и вправду «неравны» – не так уж сложно. Однако, чтобы отыскать алгоритм в этом случае, потребовалась изрядная работа интеллекта! И, конечно, оказывается, что не существует единого универсального алгоритма для всех возможных вариантов исходного списка. Общая задача со словами принадлежит области нерекурсивной математики![105]

Существуют даже определенные варианты выбора исходного списка, для которых нет алгоритма решения задачи сравнения двух слов. Один из них дается таким набором:

AH = HA
OH = HO
AT = TA
OT = TO
TAI = IT
HOI = IH
THAT = ITHT.

(Этот список взят из списка, предложенного Григорием Цейтиным и Даной Скотт в 1955 году (см. Гарднер [1958]).) Таким образом, эта частная задача со словами служит примером нерекурсивной математики в том смысле, что, используя такой исходный список, мы не можем алгоритмическим путем решить, «равны» два наперед заданных слова или нет.

Общая задача со словами возникает как следствие рассмотрения формализованной математической логики («формальных систем» и т.п., в соответствии с обсуждаемым ранее). Исходный

---

[102] **В.Э.:** Я болды усилил еще и подчеркиванием, а курсивы – красным цветом. В русской книге действительные болды и курсивы не соответствовали установкам Пенроуза и являли собой полную бессмыслицу. Я восстановил всё, как надо.

[103] **В.Э.:** Однако этот факт был установлен алгоритмом, примененным Пенроузом.

[104] **В.Э.:** Нашел алгоритм.

[105] **В.Э.:** Так что такое «нерекурсивная математика»? Просто набор задач, для которых нет общего алгоритма решения и приходится обходиться частными случаями?

список выполняет роль системы аксиом, а правила замены слов – правил вывода. Доказательство нерекурсивности задачи со словами вытекает из подобных рассуждений.

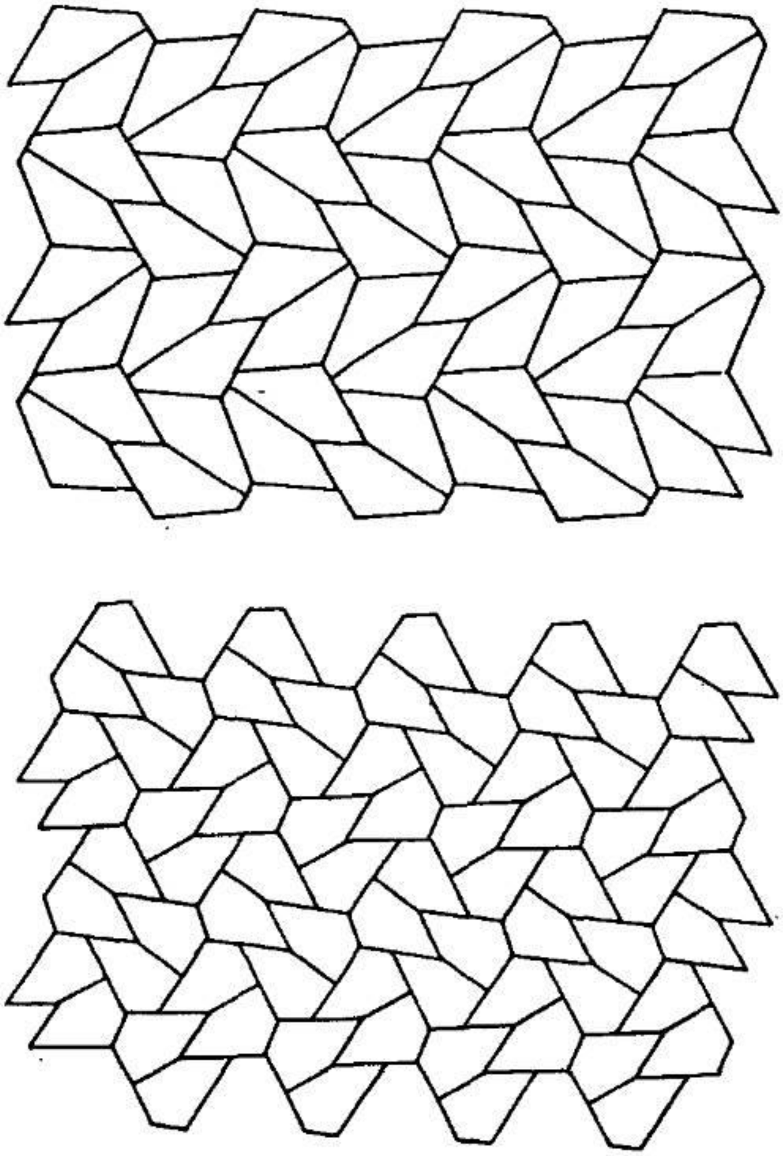


Рис. 4.6. Два примера периодического замощения плоскости фигурой одной формы (предложены Марджори Райс (Marjorie Rice) в 1976 году)

В качестве последнего примера задачи из области нерекурсивной математики давайте рассмотрим вопрос о покрытии Евклидовой плоскости многоугольниками, разнообразие форм которых ограничено, а сам вопрос при этом ставится так: можем ли мы выложить всю плоскость полностью, без разрывов и нахлестов, используя фигуры только данных нам форм? Такая укладка фигур называется замощением плоскости. Мы знаем, что такое замощение возможно при помощи только квадратов, только равнобедренных треугольников или только правильными шестиугольниками (как изображено на рис. 10.2 на с. 351), но невозможно, если использовать только правильные пятиугольники. Многими иными фигурами, такими, как два неправильных пятиугольника на рис. 4.6, также можно выложить плоскость. Замощение фигурами двух форм может стать более хитроумной задачей. Два простых примера даны на рис. 4.7. Все эти замощения являются периодическими; это означает, что они в точности повторяются по всей плоскости в двух независимых направлениях. На языке математики мы бы сказали, что существует параллелограмм периодов – параллелограмм, который, будучи неким образом выделен и затем повторен снова и снова в двух направлениях, параллельных его сторонам, даст в результате заданный узор покрытия. На рис. 4.8 представлен пример, где периодическое покрытие слева состоит из «плиток» в форме шипов, а справа указан соответствующий параллелограмм периодов.

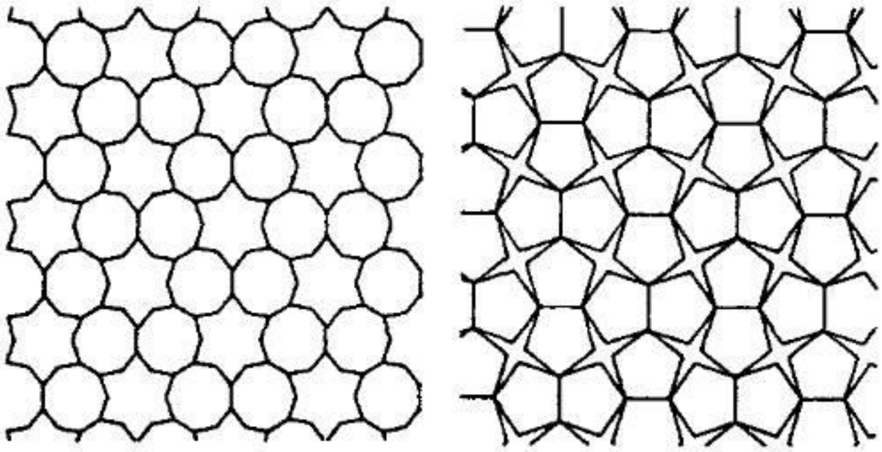


Рис. 4.7. Два примера периодического замощения плоскости фигурами двух форм

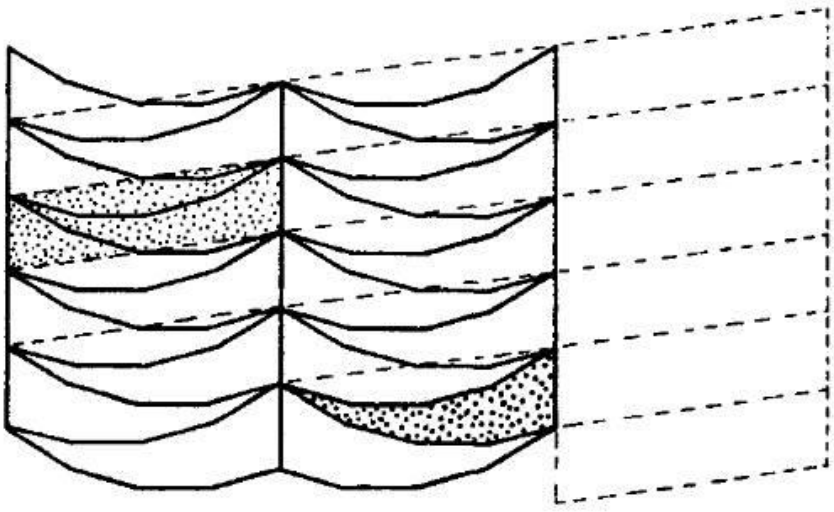


Рис. 4.8. Периодическое замощение и его параллелограмм периодов

С другой стороны, существует множество типов замощений плоскости, которые не являются периодическими. Рис. 4.9 изображает три непериодических «спиральных» замощения из таких же шиловидных «плиток», как и на рис. 4.8. Эта форма «плиток», известная как «универсальная» (по вполне понятным причинам!), была предложена Б. Грюнбаумом и Дж.К. Шепардом [1981, 1987] на основании форм, изученных Х. Фодербергом. Обратите внимание, что универсальная форма позволяет замостить плоскость как периодически, так и непериодически. Это свойство характерно и для многих других форм единичных «плиток» и наборов «плиток». А могут ли существовать «плитки» (или конечные наборы «плиток»), которые бы покрывали плоскость только непериодически? Ответ на этот вопрос будет «да». На рис. 4.10 я изобразил сконструированный американским математиком Рафаэлем Робинсоном набор из фигур шести различных форм, которым можно замостить всю плоскость, но только непериодическим образом.

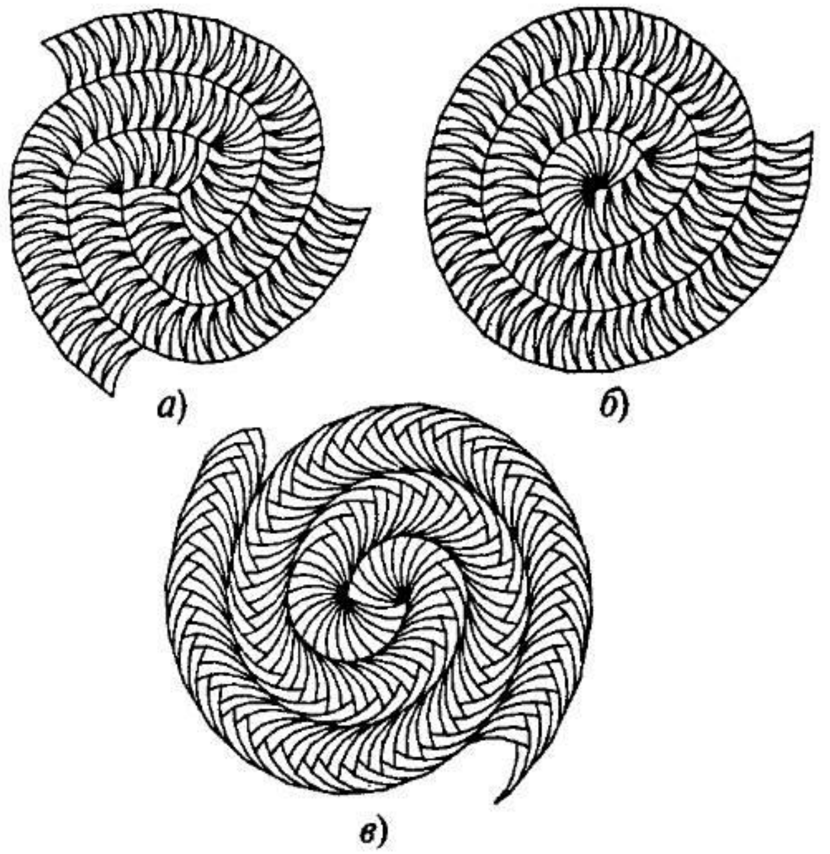


Рис. 4.9. Три непериодических «спиральных» замощения из таких же «универсальных» плиток, как и на рис.4.8

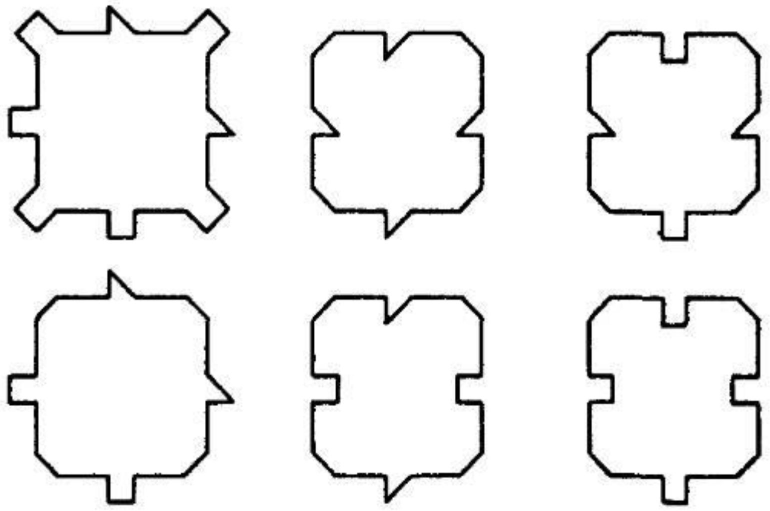


Рис. 4.10. Набор Рафаэля Робинсона из шести плиток, который покрывает плоскость только непериодически

Небесполезно было бы сделать историческое отступление и посмотреть, как появился этот непериодический набор (см. Грюнбаум, Шепард [1987]). В 1961 году американский логик китайского происхождения Хао Ванг поставил вопрос о существовании процедуры для решения задачи замощения, или, иными словами, о нахождении алгоритма, который позволил бы выяснить возможность замощения всей плоскости с помощью конечного набора многоугольников различной формы![106] Ему удалось показать, что такая процедура могла бы существовать,

[106] В действительности Хао Ванг занимался несколько иной проблемой – с квадратными «плитками», не вращаемыми и с совпадающими по цвету сторонами, – но эти особенности для нас здесь не важны.

если бы получилось доказать следующую гипотезу: любой конечный набор разных «плиток», с помощью которого можно каким-нибудь способом выполнить замощение плоскости, пригоден также и для ее периодического замощения. Мне думается, в то время интуитивно казалось, что не может существовать набор «плиток», нарушающий это условие (т.е. не может существовать «непериодический» набор плиток). Однако в 1966 году, следуя в указанном Хао Вангом направлении, Роберт Бергер смог показать, что, на самом деле, процедуры решения задачи покрытия не существует: эта задача также принадлежит области нерекурсивной математики![107]

С учетом доказанного Хао Вангом это означало, что хотя бы один непериодический набор «плиток» должен существовать; и Бергер смог построить первый такой набор. Однако, из-за сложности выбранного им способа рассуждений, его набор состоял из ненормально большого числа «плиток» разной формы – изначально их насчитывалось 20˙426. Использовав некоторый дополнительный искусный прием, Бергеру удалось сократить это число до 104. А в 1971 году Рафаэль Робинсон довел его до шести, которые изображены на рис. 4.10.

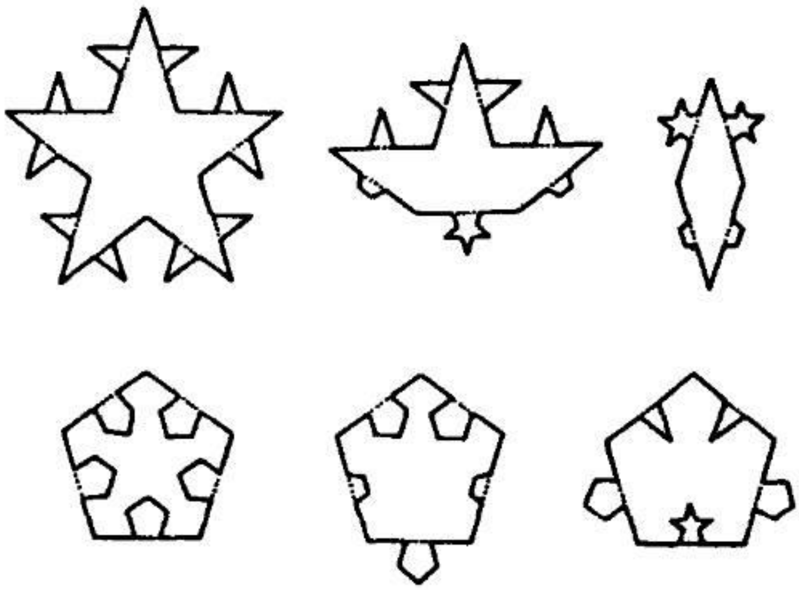


Рис. 4.11. Другой набор из шести плиток, который покрывает плоскость только непериодически

Другой непериодический набор из шести «плиток» представлен на рис. 4.11. Это множество я придумал сам в 1973 году, следуя в своих рассуждениях несколько отличным путем. (Я вернусь к этой теме в главе 10, где на рис. 10.3, с. 351, изображен массив, покрытый такими «плитками».) После того, как я познакомился с «шестиплиточным» набором Робинсона, я начал думать о том, как сократить их число; и путем различных манипуляций с разрезаниями и склеиванием я, в конечном счете, смог довести количество «плиток» до двух. Две альтернативные схемы представлены на рис. 4.12. Узоры, которые получаются в результате полного замощения и имеющие с необходимостью непериодическую структуру, обладают рядом замечательных свойств, в том числе – кажущейся невозможной с точки зрения кристаллографии квазипериодической симметрией с осью пятого порядка. К этому вопросу я вернусь позднее.

Вероятно, это покажется удивительным, что такая очевидно «тривиальная» область математики, как замощение плоскости конгруэнтными «плитками», которая выглядит не более серьезно, чем «детская игра», на самом деле является частью нерекурсивной математики. В действительности эта область содержит множество трудных и не решенных пока задач. Пока неизвестно, например, есть ли единственная «плитка» такой формы, которая бы покрывала всю плоскость непериодически.

[107] Более того, Ханф [1974] и Майерс [1974] показали, что существует отдельное множество (из большого числа «плиток»), которое покрывает плоскость только невычислимым образом.

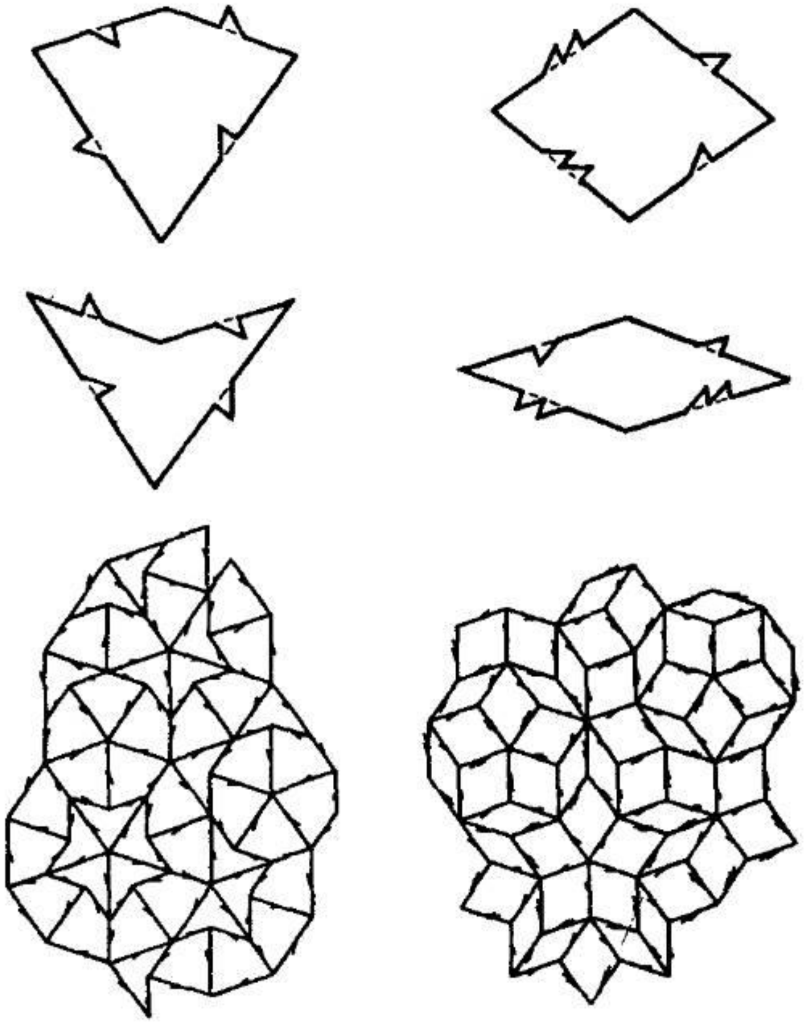


Рис. 4.12. Две пары плиток, которые покрывают плоскость только непериодически («плитки Пенроуза»). Также показано замощение плоскости каждой из этих пар

Задача замощения, в том виде, как она исследовалась Вангом, Бергером и Робинсоном, формулируется для «плиток», построенных на квадратах. Я же здесь допускаю рассмотрение многоугольников произвольной формы, и поэтому необходимо наличие какого-нибудь способа изображения каждой из «плиток», поддающегося адекватному вычислению. Одним из таких путей могло бы быть представление вершин «плиток» точками плоскости Аргана, которые превосходно задаются алгебраическими числами.

§4.10. Похоже ли множество Мандельброта на нерекурсивную математику?

Давайте теперь вернемся к нашей предшествующей дискуссии о множестве Мандельброта. Я буду для наглядности предполагать, что это множество является в некотором смысле нерекурсивным. Поскольку его дополнение рекурсивно нумеруемо, то, как следствие, само оно таковым быть не может. Я думаю, что форма множества Мандельброта может кое-чему научить нас о том, что касается природы нерекурсивных множеств и нерекурсивной математики.

Посмотрим еще раз на рис. 3.2, с которым мы встретились в третьей главе. Заметьте, что бóльшая часть множества вписывается в сердцевидную фигуру, которую я обозначил на рис. 4.13 через *A*. Эта фигура называется кардиоида, и ее внутренняя область может быть определена математически как множество точек с плоскости Аргана, которые удовлетворяют равенству

$$c = z - z^2$$

где z – комплексное число, чье расстояние до центра координат меньше 1/2. Это множество является, с очевидностью, рекурсивно нумеруемым в смысле существования алгоритма, который для произвольной точки внутренней области фигуры умеет подтверждать ее принадлежность этой самой области. Этот алгоритм легко получается из указанной выше формулы.

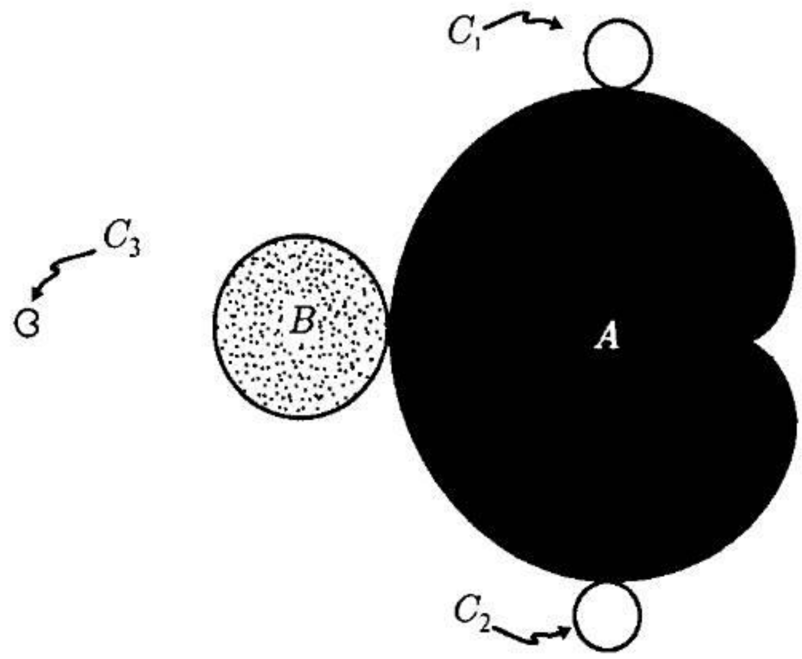


Рис. 4.13. Бóльшая часть внутренней области множества Мандельброта может быть определена простыми алгоритмическими уравнениями

Теперь рассмотрим дисковидную фигуру слева от основной кардиоиды (область B на рис. 4.13). Ее внутренняя часть представляет собой множество точек

$$c = z - 1,$$

где z – удалено от начала координат на расстояние меньше 1/4. Эта область, несомненно, является внутренностью диска, так как представляет собой множество точек, лежащих внутри правильной окружности. И, опять же, эта область является рекурсивно нумеруемой в принятом нами смысле. А как насчет других «бородавок» на кардиоиде? Возьмем две следующие по величине «бородавки». Это практически круглые «кляксы», располагающиеся примерно наверху и внизу кардиоиды на рис. 3.2 и которые на рис. 4.13 обозначены через C_1 и C_2. Они могут быть описаны как множество

$$c^3 + 2c^2 + (1 - z)c + (1 - z)^2$$

где z изменяется в пределах круга радиуса 1/8 с центром в начале координат. Фактически, это уравнение дает нам не только обе эти «кляксы», но и «дочернюю» фигуру диоидной формы (основную часть рис. 3.1), которая находится слева на рис. 3.2 и которая обозначена как C_3 на рис. 4.13. И, аналогично, эти области (как порознь, так и вместе) составляют рекурсивно нумеруемые множества благодаря существованию вышеприведенной формулы.

Несмотря на предположение о нерекурсивности множества Мандельброта, сделанное мной вначале, мы смогли разобраться с его наиболее значительными частями с помощью вполне определенного и достаточно простого алгоритма. Кажется, что такой процесс можно продолжать и дальше. Все наиболее очевидные области множества – и, конечно же, подавляющая часть множества (если не всё оно целиком) в процентном выражении – поддаются алгоритмическому анализу. Если, как я предполагаю, всё множество все-таки нерекурсивно, то те области, которые недоступны для действия алгоритма, должны быть с необходимостью очень «тонкими» и почти «невидимыми». Более того: когда мы найдем такую область, то вероятнее всего мы смогли бы понять, как нам изменить наш алгоритм, чтобы эта область также оказалась в зоне его действия. Однако, после этого найдутся другие области (если мое предположение о нерекурсивности справедливо), еще более труднодоступные из-за тонкости и сложности своей структуры, перед которыми будет бессилен даже наш усовершенствованный алгоритм. И вновь «волшебство» интуиции, искусства и техники,[108] наверное, позволит нам вычленить эту область; но другие в очередной раз ускользнут от нас; и так будет повторяться снова и снова.

Я полагаю, что этот путь не слишком отличается от того, который часто используется в математике для решения трудных и, предположительно, нерекурсивных задач. Многие задачи, с которыми сталкиваются в некоторых специфических областях, часто решаются с помощью простых алгоритмических процедур – процедур, известных, быть может, на протяжении веков. Но некоторые из этих задач могут не поддаться таким методам, и тогда приходится искать более сложные пути к их решению. Такие задачи будут, конечно, сильнее всего интриговать математиков и подталкивать их к развитию всё более мощных методов, в основу которых будет закладываться всё более и более глубокое интуитивное понимание природы используемых математических объектов. Возможно, в этом есть что-то от того, как мы познаем окружающий нас физический мир.

В задачах покрытия и задачах со словами, рассмотренных выше, можно уже уловить, как применяется подобный подход (хотя это не те области математики, где аппарат развит в достаточной степени). Мы смогли привести очень простое доказательство для того, чтобы показать невозможность трансформации одного слова в другое при помощи установленных правил. Нетрудно вообразить, что более «продвинутые» методы доказательства способны помочь в более сложных случаях. Не исключена вероятность, что эти новые подходы могут быть превращены в алгоритмические процедуры. Мы знаем, что ни одна процедура не может удовлетворять всем примерам задачи со словами, но те из них, которые ускользают из «алгоритмических сетей», должны быть очень тонко и аккуратно сконструированы. Конечно, как только мы узнаем принцип построения таких примеров – как только мы будем уверены, что в неком конкретном случае произошла «осечка» алгоритма, – мы сможем усовершенствовать наш алгоритм так, чтобы он включал и этот частный пример. Ускользать могут только пары «неравных» слов, так что, как только мы находим такую «ускользающую» пару, мы можем быть уверены в их «неравенстве» и присовокупить этот критерий к нашему алгоритму. Так наше более глубокое понимание ведет ко всё более совершенным алгоритмам![109]

§4.11. Теория сложности

Рассуждения о природе, возможности построения, существования и ограничениях алгоритмов, которые я привел в предыдущих главах, были по большей части «нестрогими». Я совсем не касался вопроса о возможности практического применения упоминавшихся алгоритмов. Даже в тех задачах, где существование алгоритмов и возможные способы их построения очевидны, всё же может потребоваться довольно много труда для их воплощения в нечто полезное с точки зрения практического использования. Иной раз небольшая догадка или искусный ход могут в значительной степени упростить алгоритм или же многократно увеличить его быстродействие. Техническая сторона этих вопросов часто бывает очень сложна, и в последние годы в различных направлениях прилагалось много усилий в области построения, понимания и совершенствования алгоритмов – быстро растущем и развивающемся поле деятельности для пытливых умов. Мне представляется не слишком уместным углубляться здесь в тонкости подобных вопросов. Однако, существует довольно много абсолютных ограничений общего характера (известных или предполагаемых) на возможное повышение быстродействия алгоритма. Оказывается, что среди алгоритмических по своей природе задач существуют определенные классы проблем, решать которые с помощью алгоритмов несоизмеримо труднее, чем остальные. Такие задачи можно решать только с помощью очень медленных алгоритмов (или, допустим, алгоритмов, требующих чрезмерно больших ресурсов для хранения информации, и т.п.). Теория, в которой рассматриваются подобные вопросы, носит название теории сложности.

Теория сложности занимается не столько изучением трудностей, связанных с решением отдельных задач, сколько с бесконечными семействами задач, в каждом из которых любая задача может быть решена с помощью одного и того же алгоритма. Различные задачи такого семейства будут отличаться по «размеру», который выражается некоторым натуральным числом *n*. (Чуть

[108] **В.Э.:** То есть – другие алгоритмы.

[109] **В.Э.:** Весь процесс эволюции жизни на Земле от первой молекулы ДНК до Роджера Пенроуза есть такой процесс усовершенствования алгоритмов.

позднее я объясню более подробно, как фактически этот номер n характеризует размер задачи.) Время, требуемое для решения конкретной задачи из рассматриваемого класса, – а вернее, количество элементарных шагов, – дается некоторым числом N, зависящим от n. Для определенности договоримся, что N – это наибольшее число шагов среди всех задач данного размера n, которое может понадобиться алгоритму для решения. При этом, с ростом n увеличивается также и N. На самом деле, N скорее всего будет расти гораздо быстрее n. Например, N может быть примерно пропорционально n^2, или n^3, или, скажем, 2^n (которое при больших n значительно превосходит n^2, n^3, n^4, n^5 и, вообще, n^r для любого фиксированного n), или даже 2^{2^n} (которое, в свою очередь, растет еще быстрее).

Конечно, число «шагов» зависит от типа вычислительной машины, на которой применяется алгоритм. Если эта машина принадлежит классу машин Тьюринга, описанному в главе 2, у которых есть только одна лента – что довольно неэффективно – то число N может расти еще быстрее (или, эквивалентно, машина будет работать медленнее), чем в случае с двумя и более лентами. Чтобы избежать этих неопределенностей, вводится широкая классификация всех возможных зависимостей $N(n)$, так что, независимо от типа используемой машины Тьюринга, величина темпов роста N будет всегда попадать в одну и ту же категорию. Одна из таких категорий, известная как **P** (от названия «полиномиальное время»), включает все темпы роста, которые являются фиксированными кратными n или n^2, n^3, n^4, n^5, ...[110] Это означает, что для любой задачи, попадающей в эту категорию **P** (под «задачей» здесь фактически понимается семейство задач, решаемых с помощью единого алгоритма), будет справедлива оценка

$$N \leq K \times n^r$$

где K и r – константы, не зависящие от n. То есть N не может быть больше, чем число, кратное n в некоторой фиксированной степени.

Простой пример задачи, безусловно относящейся к **P**, – перемножение двух чисел. Чтобы объяснить это, я должен сначала описать, как число n характеризует размер двух чисел, которые надо перемножить. Мы можем принять, что оба числа представлены в двоичной записи и что $n/2$ – это просто количество бинарных разрядов в каждом из чисел, так что общее число цифр (то есть битов) у обоих равно n. (Если одно из чисел длиннее другого, то мы можем записать более короткое, начав с дополнительной последовательности нулей, тем самым выровняв их по длине.) Например, если $n = 14$, мы бы могли рассмотреть произведение

$$1011010 \times 0011011,$$

которое является, на самом деле, произведением 1011010×11011, но с добавленными перед более коротким числом нулями. Выполнить требуемое действие проще всего путем умножения «в столбик»:

```
       1011010
     × 0011011
     ---------
       1011010
      1011010
     0000000
    1011010
   1011010
  1000000
 0000000
--------------
01001011111110
```

учитывая, что в двоичной системе $0 \times 0 = 0$, $0 \times 1 = 0$, $1 \times 0 = 0$, $1 \times 1 = 1$, $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$. Число отдельных двоичных перемножений равно $(n/2) \times (n/2) = n^2/4$, а число отдельных двоичных сложений может доходить до $n^2/4 - n/2$ (включая перенос). Это дает $n^2/2 - n/2$ отдельных арифметических операций – и мы должны еще учесть несколько дополнительных логических шагов, которые задействованы в операциях переноса. Тогда общее число шагов,

[110] Понятие «полиномиальный» применяется на самом деле к выражениям более общего вида, скажем, $7n^4 - 3n^3 + 6n + 15$, но это никак не изменит общности наших рассуждений. В любом таком выражении все члены младших степеней n теряют значимость по мере увеличения n (так что в данном примере можно игнорировать все слагаемые, кроме $7n^4$).

игнорируя члены более низкого порядка, равно по существу $N = n^2/2$, что, очевидно, является полиномом.[111]

В общем случае, мы полагаем «размер» n задачи из некоторого класса равным полному количеству двоичных цифр (или битов), необходимых для задания свободных входных данных в задаче указанного размера. Другими словами, для произвольного размера n задача может иметь до 2^n различных вариантов (ибо для каждой из цифр имеется две возможности – 0 или 1, – а общее количество цифр равно n), и все они должны одинаково обрабатываться алгоритмом не более, чем за N шагов.

Существует масса примеров (классов) задач, которые не «принадлежат» множеству P. Например, чтобы вычислить 2^{2^r} для заданного натурального r, нам только для записи конечного ответа потребуется около 2^n шагов (где n – число цифр в двоичной записи r), не говоря даже о самом вычислении. Операция по вычислению $2^{2^{2^r}}$ потребует уже 2^{2^n} шагов для записи и так далее. Значения этих выражений намного превосходят те, которые дают полиномы для тех же n, и, следовательно, не могут принадлежать **P**.

Больший интерес представляют задачи, в которых ответ может быть записан и даже проверен на верность за «полиномиальное» время. Есть очень важная категория (алгоритмически решаемых классов) проблем, обладающих таким свойством. Их называют **NP**-задачами (классом задач). Точнее, если некоторая задача из класса **NP** имеет решение, то алгоритм позволит получить это решение, которое затем может быть проверено за «полиномиальное» время. Если же задача не имеет решения, то алгоритм сообщит об этом, но при этом не оговаривается необходимость проверки этого факта за «полиномиальное» или какое бы то ни было время.[112]

NP-задачи встречаются во многих областях, причем как в математике, так и в повседневной практике. Я приведу здесь только один простой математический пример: задачу нахождения так называемого «гамильтонова цикла» на графе (довольно устрашающее название для чрезвычайно простой идеи). Под графом подразумевается конечный набор точек, или «вершин», некоторое количество пар которых соединено между собой линиями – «сторонами» графа. (Нас не интересуют сейчас геометрические или линейные свойства, а только то, какие вершины соединяются друг с другом. Поэтому не имеет значения, лежат ли все вершины в одной плоскости – если нас не волнует возможность пересечения двух сторон – или же в трехмерном пространстве.) Гамильтонов цикл – это замкнутый маршрут (петля), состоящий только из сторон графа и проходящий не более одного раза через любую из вершин. Пример графа с изображенным на нем гамильтоновым циклом показан на рис. 4.14. Задача нахождения гамильтонова цикла заключается в том, чтобы определить, существует ли гамильтонов цикл на рассматриваемом графе, и если существует, то явным образом указать его.

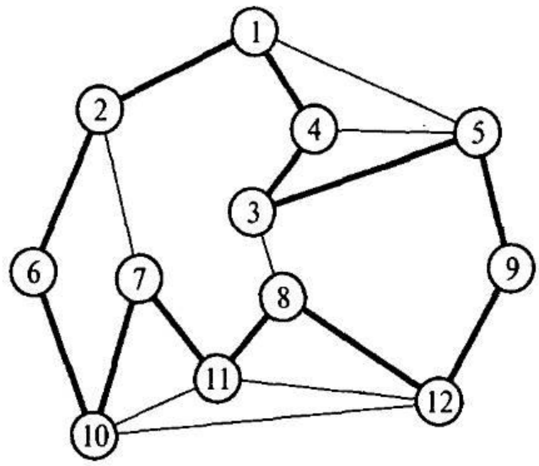


Рис. 4.14. Граф с гамильтоновым циклом (изображен зачерненными линиями). Существует только один гамильтонов цикл, как читатель может сам убедиться

Есть разные способы представления графов на языке двоичных чисел. Неважно, какой из этих способов применяется в том или ином случае. Один из методов заключается в том, чтобы пронумеровать вершины 1, 2, 3, 4, 5, ... , а потом перечислить пары в некотором подходящем фиксированном порядке:

$$(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (1, 6), \dots .$$

[111] В действительности, путем применения некоторых тонких ходов, можно сократить число шагов до величины порядка

$$n \log n \log (\log n)$$

для больших n – которая, конечно, всё еще принадлежит P. За подробностями я отсылаю читателя к Кнуту [1981].

[112] Если быть точным, классы **P**, **NP** и **NP**-полный (см. с. 123) определены только для задач типа «да или нет» (скажем, когда заданы a, b, c и спрашивается, выполняется ли для них $a \times b = c$); но описания, приведенные в тексте, вполне подходят для наших целей.

Затем мы на место каждой пары помещаем «1», если пара соединена стороной графа, и «0» – в противном случае. Тогда двоичная последовательность

10010110110...

будет означать, что вершина 1 соединяется с вершинами 2, 4 и 5; вершина 3 с вершинами 4 и 5; вершина 4 – с вершиной 5, и т.д. (в соответствии с рис. 4.14). Гамильтонов цикл может быть задан по желанию просто как подмножество этих сторон, которое было бы описано такой же двоичной последовательностью, как и ранее, но со значительно бо́льшим числом нулей. Процедура проверки в этом случае проходит несравненно быстрее, чем процесс непосредственного построения гамильтонова цикла. Всё, что нужно выяснить, – это является ли построенный цикл действительно циклом, т.е. принадлежат ли его стороны исходному графу, и что каждая вершина графа используется ровно два раза – по одному разу на концах каждой из входящих в нее двух сторон. Такую процедуру проверки можно легко завершить за «полиномиальное» время.

На самом деле эта задача относится не только к **NP**, но к так называемой категории **NP**-полных задач. Это означает, что любая другая **NP**-задача может быть сведена к данной за «полиномиальное» время – так что, если бы кому-нибудь удалось отыскать алгоритм для решения задачи нахождения гамильтонова цикла за «полиномиальное» время (т.е. показать, что задача гамильтонова цикла действительно принадлежит **P**), то это будет означать, что все **NP**-задачи будут лежать в **P**! Это имело бы очень важные следствия. В широком смысле, задачи из **P** считаются «податливыми» (иначе говоря, «решаемыми за приемлемое время») для относительно больших *n*, на быстром современном компьютере; тогда как задачи из **NP**, но не лежащие в **P**, считаются «неподатливыми» (т.е. решаемыми в принципе, но «нерешаемыми практически») для тех же *n* – независимо от того, на какое разумно предсказуемое увеличение быстродействия компьютеров рассчитывать в будущем. (Реальное время, которое бы потребовалось для достаточно больших *n* при решении «неподатливой» задачи, легко превосходит возраст вселенной, что никак не предполагает практическое использование такого подхода!) Любой «умный» алгоритм для решения задачи о нахождении гамильтонова цикла за «полиномиальное» время мог бы быть превращен в алгоритм для решения всех прочих **NP**-задач, и тоже за «полиномиальное» время!

Другая задача, также являющаяся **NP**-полной[113] – «задача коммивояжера», которая во многом похожа на гамильтонов цикл, если не считать того, что разным сторонам приписаны числа и ставится цель отыскать гамильтонов цикл с минимальной суммой этих чисел (минимальной «длиной» пути, проделанного коммивояжером). Аналогично, «полиномиальное» время решения, достигнутое в «задаче коммивояжера», привело бы к возможности решать все **NP**-задачи за «полиномиальное» время. (Если такое решение когда-нибудь найдется, то новость об этом сразу попала бы на первые страницы! Ведь к **NP**-задачам относится, в частности, факторизация больших целых чисел, которая применяется в секретных шифровальных системах, представленных за последние несколько лет. Если эта задача окажется решаемой за «полиномиальное» время, то, возможно, такие шифры могли бы быть взломаны при помощи мощных современных компьютеров; если же нет – эти шифры останутся неприступными. См. Гарднер [1989].)

Эксперты, как правило, полагают, что используя устройство, работающее по принципу машины Тьюринга, невозможно за «полиномиальное» время решить **NP**-полную задачу; и что, следовательно, **P** и **NP** – неэквивалентны. Это мнение, похоже, верно, хотя пока его никто не смог доказать. И это остается наиболее важной и на сегодняшний день нерешенной задачей теории сложности.

§4.12. Сложность и вычислимость в физических объектах

Теория сложности является важной для наших рассуждений в этой книге не только потому, что она касается вопроса возможности алгоритмизации, но и потому, что она позволяет для заведомо алгоритмизуемых объектов решать вопрос о том, могут ли использоваться соответствующие алгоритмы на практике. В последующих главах я буду больше говорить о вычисли-

[113] Строго говоря, нам нужно переформулировать эту задачу под ответ «да или нет», например: существует ли маршрут для коммивояжера, длина которого меньше чем столько-то? (См. предыдущее примечание.)

мости, чем о теории сложности, поскольку я склонен думать (хотя, конечно, и не имея для этого достаточных оснований), что, в отличие от фундаментального вопроса вычислимости, положения теории сложности не настолько значимы для феномена мышления. Более того, мне представляется, что теория сложности сегодня лишь слегка затрагивает вопросы практичности алгоритмов.

Однако, я могу кардинально ошибаться по поводу важности той роли, которую играет сложность. Как будет показано позднее (глава 9, с. 323), теория сложности для реальных физических объектов, вероятно, может существенно отличаться от теории, изложенной мной ранее. Чтобы с уверенностью констатировать эту возможную разницу, необходимо будет использовать некоторые волшебные свойства квантовой механики – мистической, но всё же поразительно точной теории, описывающей поведение атомов и молекул, а также и другие явления, многие из которых представляют интерес и на макромасштабах. Мы познакомимся с этой теорией в главе 6. Согласно ряду идей, предложенных Давидом Дойчем [1985], существует принципиальная возможность построить «квантовый компьютер», на котором за «полиномиальное» время могут быть решены некоторые задачи (или классы задач), не принадлежащих **P**. Пока совершенно неясно, как на практике сконструировать такое физическое устройство, которое бы (надежно) функционировало по принципу «квантового компьютера» – и, более того, рассматриваемый до сих пор класс задач носил заведомо искусственный характер, – но теоретически понятно, что квантовое физическое устройство могло бы улучшить работу машины Тьюринга.

А есть ли вероятность, что человеческий мозг, который в рамках данного обсуждения я рассматриваю как физическое устройство, хотя и имеющее чрезвычайно тонкую и сложную структуру – может неким образом использовать волшебство квантовой теории? Понимаем ли мы сегодня, как именно квантовые эффекты могут с пользой применяться для решения задач или формирования суждений? Можем ли мы представить, что для использования этих возможных преимуществ нам придется выйти «за нынешние пределы» квантовой теории? Насколько вероятно усовершенствование реальных физических устройств с учетом теории сложности для машин Тьюринга? И что говорит о таких устройствах теория вычислимости?

Чтобы рассматривать эти вопросы, нам надо будет отойти на время от математических абстракций и задаться целью выяснить в следующих главах, как же, в действительности, ведет себя окружающий нас мир!

(Продолжение в книге {PENRO3})

Оглавление