Дневник

Quod sentimus loquamur,
quod loquimur sentiamus!

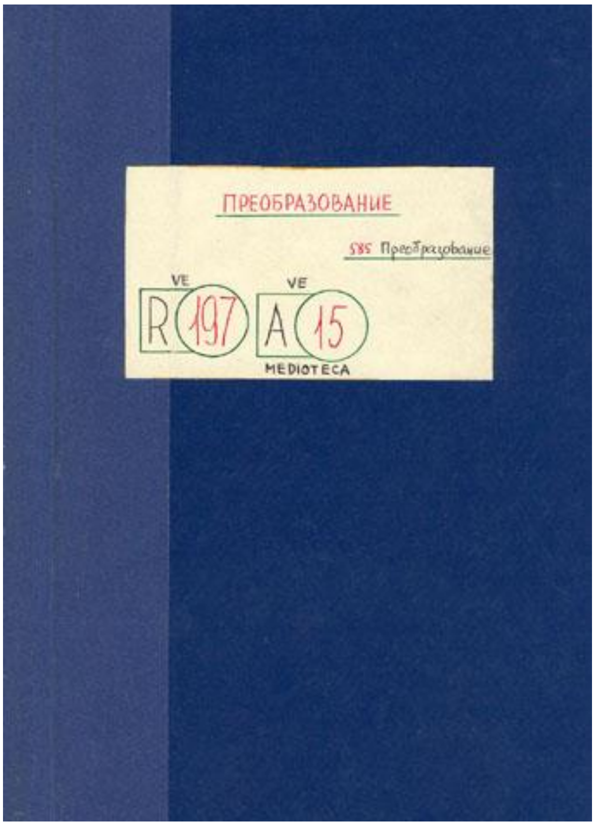
VEcordia

Извлечение R-TRANS1

Открыто: 2007.01.14 00:51
Закрыто: 2009.02.10 16:51
Версия: 2017.05.09 00:10

ISBN 9984-9395-5-3
Дневник «VECORDIA»

ISBN 9984-688-35-6
Валдис Эгле. «О природе математики»



Обложка сборника «Преобразование» в Третьей Медиотеке

Валдис Эгле

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Сборник «О природе математики»
Часть 1-я

Impositum

Grīziņkalns 2017

Talis hominis fuit oratio,
qualis vita

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
или О природе математики

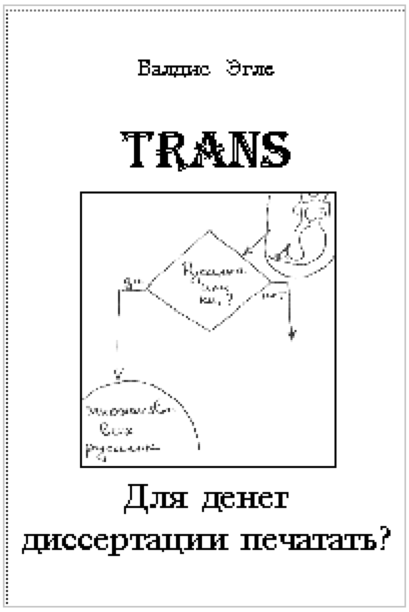
Non datur e terris ad astra via.
Lucius Annaeus Seneca

Выпущено: 1995.02.17[1]
Написано: 1978 – 1995 Рига

Сборник «Преобразование» («О природе математики») содержит лекцию Валдиса Эгле, по заказу математиков ВЦ ЛГУ подготовленную для них в 1981 году, но не прослушанную ими, а также ряд незавершенных сочинений того периода.

Предисловие сборника «Преобразование»

1994.11.16 23:21 среда



Обложка книги TRANS в Ведде или Шестой Медиотеке

§1. От издателя

.1. Настоящий сборник документов представляет собой единую книгу еще в меньшей степени, чем предыдущий {NATUR}. Здесь помещается сборник Третьей Медиотеки «Преобразование», а вслед за ним все те относящиеся к математике документы Валдиса Эгле 1978–1992 гг., которые по логике сборников «О природе чисел» и «Канториана» не могли войти в их состав. В частности, здесь помещены, например, латышские оригиналы тех писем, которые в «Канториане» даются в русском переводе.

.2. Также, как и остальные сборники Ведды, настоящее собрание документов поставляется бесплатно на компьютерных носителях всем желающим, но не делается никаких утверждений о их литературной или иной значимости. Каждый сам может решать, интересует ли его данная коллекция, или нет.

Агентство *ИВИВИ*

§2. О применяемой символике

1995.02.11 00:24 ночь на субботу
(через 2 месяца, 24 дня, 1 час, 3 минуты)

.3. В настоящей книге используется следующая символика взамен традиционной математической (в скобках дан ASCII код знака)[2]:

[1] Дата выпуска в Ведде или Шестой Медиотеке.

[2] В 1990-х годах тогда впервые сформированный сборник TRANS поставлялся читателям в виде TXT файлов в простом коде ASCII. В таком коде нельзя было отобразить традиционную математическую символику, поэтому ее приходилось заменять другими символами: частично псевдографикой, частично различными комбинациями знаков. Настоящий параграф разъясняет эту заменяющую символику. Теперь, при публикации сборника в составе Векордии, технические средства уже позволяют использовать традиционную математическую символику, и в текстах она восстановлена. Но теперь уже ненужный параграф с объяснением альтернативной символики здесь оставлен, чтобы не нарушать оригинальную нумерацию пунктов сборника и не создавать у читателя впечатление, будто от него что-то скрывают. Читателю следует просто игнорировать этот параграф, осознав, что когда-то состояние техники было таким, что подобные вещи требовались. (Этот параграф здесь выглядит опять несколько неправильно,

.4. ‘ (204) – знак принадлежности элемента множеству; a‘A означает, что элемент a принадлежит множеству A; соответствует перевернутой букве «э»;

.5. ‚ (185) – знак принадлежности элемента множеству; A‚a означает, что элемент a принадлежит множеству A; соответствует букве «э» традиционной символики;

.6. ˇ (201) – знак подмножества; BˇA означает, что B есть подмножество множества A;

.7. „ (187) – знак подмножества; A„B означает, что B есть подмножество множества A;

.8. ¸ (202) – знак тождества; соответствует традиционным трем горизонтальным черточкам; ASCII символ 240 занят латышской буквой «Ē» и не может использоваться в латышских текстах;

.9. (190) – «влечет»;

.10. ™ (212) – A ™ B означает, что A подмножество B, не равное ему;

.11. † (191) – отрицание;

.12. †‘ – «не принадлежит»;

.13. U (85) – объединение множеств;

.14. П (143) – пересечение множеств;

.15. <> – «не равно»;

.16. pi – соотношение окружности и ее диаметра;

.17. ^ – возведение в степень; a^2 означает «a в квадрате»;

.18. * – умножение; a*2 означает «a умножено на два»;

.19. @ – квантор общности; соответствует традиционной перевернутой вверх ногами букве «A»;

.20. # – квантор существования; соответствует традиционной перевернутой вверх ногами букве «E»;

.21. | – вертикальная черта;

.22. Agoth – готическая буква A;

.23. alpha – греческая буква a.

§3. Сборник «Преобразование» в Третьей Медиотеке

1982.04
(раньше на 12 лет, 10 месяцев)

.24. Место, которое настоящий сборник занимает среди других моих сборников {VIEWS.1532}, можно охарактеризовать так: эти 200 страниц должны коротко и популярно рассказать о том, чему в целой серии других сборников посвящены тысячи страниц.

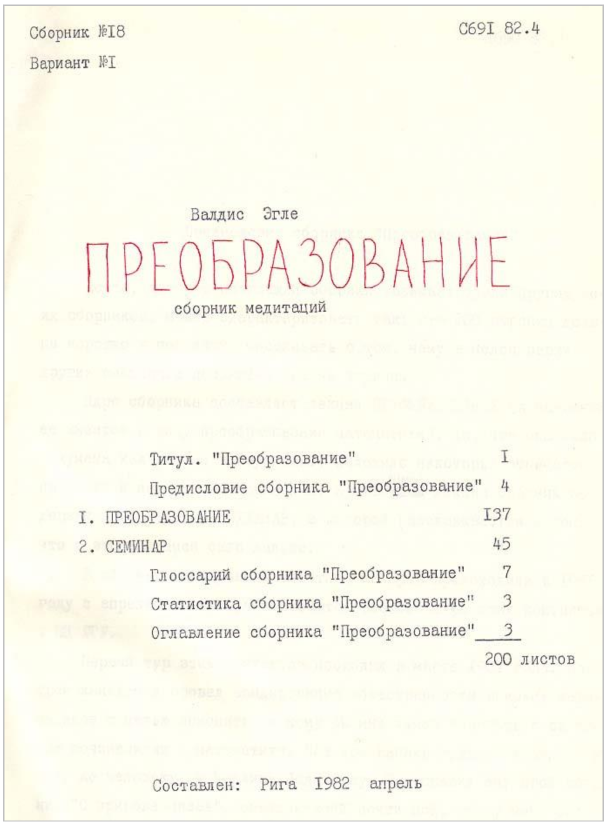
.25. Ядро сборника составляет лекция ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (в названии ее имеется в виду преобразование математики). То, что она была задумана как устное выступление, наложило некоторый отпечаток на стиль и язык этого сочинения. Кроме самой лекции, сборник содержит метамедитацию СЕМИНАР {.483}, в которой рассказывается о том, что с этой лекцией было дальше.

.26. В сборнике отображены события, которые происходили в 1981 году с апреля по октябрь и касаются второго тура моих контактов с ВЦ ЛГУ.

.27. Первый тур этих контактов проходил в марте 1981 года. По трем каналам я провел зондирование общественности рижских математиков с целью выяснить, к кому бы мне лучше обратиться со своими сочинениями о математике. Все три канала привели к одному и тому же человеку: к Карлису Подниексу. Я отправил ему свой сборник «О природе чисел» {NATUR}, объединявший почти всё, что у меня было тогда написано о математике. Это был вообще мой первый выход за пределы своего Института. Подниекс, сохраняя (как мне это передавал потом Кикуст) в общем «неотрицательное отношение», всё же воздержался от каких-либо комментариев, ссылаясь на занятость и невозможность глубоко изучить мое сочинение. Он передал этот сборник Кикусту, с которым я и имел честь поддерживать основные контакты как в этом первом туре, так и позже.

.28. Как это говорится в главе 26 самой лекции ПРЕОБРАЗОВАНИЕ {.469}, Кикуст в характерной для него эмоциональной манере признав интересным и ценным то, что касается моделирования интеллектуальных процессов на ЭВМ, назвал ерундой всё то, что касается преобразования науки математики. (Разумеется, я бы не стал об этом упоминать так часто и с таким почти что удовольствием, если бы сомневался в том, что эти слова бумерангом летят обратно в самого Кикуста, и что в конце концов они ему обойдутся намного дороже, чем мне).

потому что знаки псевдографики в этой книге нельзя отобразить без привлечения специальных фонтов, но их привлечение нежелательно, т.к. у читателя может не оказаться этих фонтов, и тогда параграф приобретет еще третий, почти непредсказуемый вид; поэтому вместо псевдографики здесь сохранены те знаки, в которые псевдографику превратил конвертор при импорте текста в *Word*).


Сборник №I8 С69I 82.4
Вариант №I

Валдис Эгле
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
сборник медитаций

Составлен: Рига I982 апрель

Титульный лист сборника «Преобразование» в Третьей Медиотеке

.29. Когда первый тур контактов был закончен с описанным выше исходом, в конце апреля мне еще раз позвонил Кикуст и предложил провести в ВЦ ЛГУ устный семинар. Это предложение в конце концов и породило к жизни настоящий сборник. В мае и июне, оторвавшись от текущих работ по Диспетчеру, я подготовил текст выступления. Кикуст, предлагая мне провести семинар в ВЦ ЛГУ, наверно думал, что после его уничтожающей рецензии я не стану больше поднимать вопрос о предмете математики, и ограничусь рассказом о своих моделирующих программах. Но я не только не отказался от претензий сборника «О природе чисел», но и расширил тему разговора переходом от природы одних только чисел к материалистическому пониманию всей математики.

.30. 21–27 июля 1981 года выступление было впервые зачитано на семинарах в ИЭВТ у зав.лаб. Я. Кикуста. Мои коллеги прослушали его полностью и, как мне кажется, с достаточным для первого раза пониманием, но воздержались от каких-либо комментариев, оставив это право за основным адресатом. В сентябре 1981 года основной адресат (сотрудники ВЦ ЛГУ) выступление не прослушали, но его содержание отвергли, не выдвигая никаких контраргументов. На этом и закончился второй тур контактов с ВЦ ЛГУ, материалы которого составляют настоящий сборник.

.31. Здесь помещен сам текст моего выступления (лекция ПРЕОБРАЗОВАНИЕ) и описание семинара (метамедитация СЕМИНАР). Возможно, что сотрудники ВЦ ЛГУ в этих описаниях предстают перед читателем не в лучшем свете. Но что поделаешь, как любил говорить сам Кикуст: «Kāds darbs, tāda alga»[3] {NATUR.2629}.

.32. Разумеется, этот сборник представляет интерес не только и не столько как хроника событий 1981 года. Лекция ПРЕОБРАЗОВАНИЕ представляет собой общее, панорамное изложение моих взглядов на математику в таком виде, какой они имели в 1981 году. Никакой другой сборник этого периода не дает столь общего вида, все они посвящены более или менее узким вопросам.

.33. Понятно, что подобная работа, охватывающая широкий круг вопросов, не может быть детальной. Задумка была такой: если вам нужна общая картина, читайте ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, если же вам нужны подробности, то берите другие сборники!

.34. Вообще в природе действует странный закон зависимости между длиной текста и доступностью: Короткое сочинение непонятно из-за отсутствия деталей, в результате чего не видно, что скрывается за общими фразами. Чем больше сочинение пополняется подробностями и длиннее становится, тем труднее уловить главную мысль, вообще дочитать до конца и хоть что-то понять. Таким образом, по этому закону все произведения делятся на две категории: те, что не понятны из-за отсутствия деталей и те, которые не понятны из-за обилия деталей. Лекция ПРЕОБРАЗОВАНИЕ принадлежит к тем сочинениям, которые не понятны из-за отсутствия деталей.

.35. Хотя главной целью лекции ПРЕОБРАЗОВАНИЕ было: дать общую панораму вещей, уже изложенных в других местах, некоторые вопросы здесь рассматриваются вообще впервые (впервые в моей медиотеке, имеется, конечно, в виду). Это, например, анализ решения математических задач на примере задачки о курах и собаках, сущность аксиоматик, доказательства в

[3] Каков труд, такое вознаграждение (*латышский язык*).

Эуклидосе. Хотя представление о решении этих вопросов у меня было и до того, как я взялся за данную лекцию, но описано это нигде не было.

.36. Особое развитие, благодаря возражениям слушателей как в ИЭВТ, так и в ВЦ ЛГУ, получил в этом сборнике вопрос о теореме Кантора. Хотя мое общее мнение об этой знаменитой теореме после бурного ее обсуждения осталось в точности таким же, как и до этого, но всё же возражения заставили меня разработать четкую логическую схему защиты и нападения в этом вопросе.

.37. Итак, мой читатель, в этом сборнике перед Вами открывается панорама моих взглядов на математику, воплощенная в форму лекции для ВЦ ЛГУ и описания семинара, состоявшегося в сентябре 1981 года.

1. Тетрадь TRANS

Преобразование математики
Лекция для ВЦ ЛГУ

Kad Eiropā iesāka tupeņus dēstīt,
Daudz ļaudis tad zināja ļaunu tik vēstīt.
Un kāpēc? Nu tāpēc, ka muļķi tie bija,
Ka neēda augļus, bet lakstus vien rija.
Tā tagad nereti par krietnāko darbu
Daudz ļaudis prot izsacīt spriedumu skarbu –
Tik tādēļ, ka, apcerot nopietnus rakstus,
Tie nebauda kodola, bauda tik lakstus...[4]

Edvards Treimanis-Zvārgulis (1892)

Написано: 1981.05, 1981.07 Рига

Медия TRANS содержит собственно текст лекции Валдиса Эгле о природе математики, подготовленной им по заказу ВЦ ЛГУ, но прочитанной только в ИЭВТ Академии Наук Латвии.

1. Об этой лекции

1981.05
(раньше на 11 месяцев)

.38.

Всегда приходит время, когда на вопрос «может ли это машина» мы должны отвечать «да».

(Во время семинара, на котором настоящий доклад был впервые зачитан, один из участников семинара – Леонард Рогов – предложил эти слова сделать эпиграфом доклада).

.39. В конце апреля 1981 года Паулис Кикуст, первый человек, который познакомился с моими воззрениями о математике полностью (согласно их тогдашнему состоянию) и который в основных чертах одобрил их, предложил мне выступить с устным коротким изложением этих взглядов в ВЦ ЛГУ.

[4] Когда в Европе стали картофель сажать, Многие люди умели лишь беды вещать. И почему? Да потому, что глупы они были: Не ели плоды, а лишь ботву пожирали. Так часто теперь о достойнейшем деле Много людей выражают сужденье сурово Лишь потому, что, серьезнейший труд созерцая, Они упиваются одной лишь ботвой, не ядром (*латышский язык*).

.40. Я вообще-то не люблю устные выступления и предпочитаю излагать свои мысли письменно. Но и до предложения Кикуста я уже считал, что в ознакомлении других людей с этими воззрениями мне не удастся избежать устных выступлений, как бы мне они не нравились.

.41. Поэтому я принял предложение Кикуста и подготовил настоящее выступление.

.42. Оно предназначено для прочтения в ВЦ ЛГУ, но я могу познакомить с ним и другую аудиторию.

.43. Тему моего выступления можно было бы назвать так: «О материалистическом подходе к математике». Я буду рассказывать о своих взглядах на вообще науку математику.

.44. Изложение упомянутых взглядов можно построить по-разному. Я положил в его основу два принципа.

.45. Первый принцип – это популярность. Я буду стараться говорить просто и популярно. Во-первых, я считаю, что простота и популярность не могут вредить содержанию, его серьезности и значимости (если таковые имеются), даже если я выступаю перед искушенной аудиторией. Во-вторых, это выступление предназначено и для неискушенных слушателей, и мне хотелось бы, чтобы меня поняли все слушатели, кем бы они ни были.

.46. Второй принцип – это эволюционистский подход. То есть, я буду говорить не только о конкретных результатах своих размышлений, но и о том пути, который привел к этим конечным результатам, об эволюции этих воззрений. Я сам, знакомясь с какими-нибудь взглядами, всегда стараюсь узнать побольше о том, как они создавались, и мне кажется естественным, что такое же желание будете иметь и вы.

.47. Таковы два принципа, которыми я руководствовался при подготовке своего выступления.

.48. Теперь относительно вопросов. Вопросы, относящиеся прямо к тому, о чем я рассказываю, лучше задавать сразу. Мне бы не хотелось, чтобы вы слушали дальше, не поняв предыдущее. Вопросы, расширяющие тему выступления, лучше в конце. Если это мелкие вопросы, то я отвечу сразу, но если затрагивают какие-то большие области, то я оставляю за собой право ответить только после предварительной подготовки и, скорее всего, письменно.

2. Общий план выступления

1981.07
(через 2 месяца)

.49. Ознакомимся сначала коротко с общим планом моего выступления.

.50. Как я уже говорил, тема наших разговоров: «о материалистическом подходе к математике», причем по форме они построены как рассказ об эволюции моих воззрений на математику. Я начал с попытки объяснить возникновение у людей понятия натурального числа, исходя из таких взглядов, согласно которым человеческий мозг – это система обработки информации о внешнем мире. В конце концов я пришел к убеждению, что весь предмет науки математики в настоящее время определяется неточно или неверно, и из-за этого многое в математике сделано не так, как следовало бы делать.

.51. Итак, я буду рассказывать о последовательных этапах, через которые я в свое время шел от философской теории отражения к убеждению, что математику надо преобразовать.

.52. Сначала мы рассмотрим, как 15 лет тому назад я пытался объяснить возникновение в человеческом мозге обобщенных понятий вообще и понятия натурального числа в частности.

.53. Потом я расскажу, как я пытался по той же схеме объяснить возникновение отрицательных, рациональных и комплексных чисел. Эта попытка привела меня к системе чисел иной, чем та, построение которой было завершено Гауссом. Мы рассмотрим эту отличающуюся систему чисел.

.54. Попытка описать эту новую систему чисел в понятиях математики привела меня к убеждению, что это невозможно из-за расплывчатости понятия множества. Мне пришлось разработать свою концепцию множества, и мы ее рассмотрим.

.55. Чтобы рассуждения о множествах приобрели достаточную четкость, я разработал проект системы программ, моделирующих эти вещи на ЭВМ. Дальше мы познакомимся с этим проектом системы программ.

.56. С излагаемой точки зрения различные системы чисел окажутся системами потенциальных продуктов различных алгоритмов мозга (моделируемых на ЭВМ), а наука о числах окажется наукой об этих алгоритмах.

.57. Такой исход побудил меня попытаться экстраполировать этот вывод на всю математику и посмотреть, нельзя ли считать, что вообще весь предмет математики – это алгоритмы мозга. Я пришел к выводу, что так оно и есть.

.58. Мы разберем арифметическое и алгебраическое решения небольшой задачи в свете таких представлений, и я попытаюсь на этом примере сформулировать выводы о сущности науки математики. Потом мы рассмотрим небольшие примеры алгоритмической интерпретации анализа и геометрии.

.59. Дальше мы перейдем к рассмотрению аксиоматического метода в свете таких представлений. Там мы опять познакомимся с проектом моделирования аксиоматик и доказательств на ЭВМ.

.60. Дальше мы задумаемся о том, чем отличается формальное и содержательное доказательство в математике, о роли аксиоматического метода, и я буду вам говорить о том, что аксиоматический метод допустим, но это второстепенный и ненадежный метод, что нашло свое выражение в теореме Геделя, и что формализацию математики не следует считать главным средством достижения точности и строгости рассуждений.

.61. Потом я буду говорить, что те концепции, о которых я вам рассказываю, иногда приводят к расхождениям с традиционной математикой в выводах. В качестве такого примера я приведу знаменитую теорему Кантора и буду утверждать, что никакой разницы между мощностью счетного множества и мощностью континуума не существует.

.62. Потом я попытаюсь оградить свои представления о математике от конструктивизма и теории алгоритмов, указав их отличие от последних.

.63. И всё закончится призывом к математикам переосмыслить свою науку в свете материалистических концепций о том, что возникает математика все-таки в результате деятельности мозга, который предназначен для обработки информации о внешнем мире.

.64. Таков общий план моего выступления.

3. Может ли машина мыслить?

1981.05
(раньше на 2 месяца)

.65. Начнем с предыстории всего этого. Я до 1978 года не собирался заниматься какими бы то ни было математическими вопросами и не интересовался математикой больше, чем требовала учебная программа технических вузов. Мне и в голову не приходило, что придет время, когда я буду обсуждать с профессиональными математиками сущность математических объектов.

.66. Зато я со студенческих лет интересовался философией несколько больше, чем это требовала учебная программа.

.67. В то время, когда я был студентом, то есть – в конце 60-тых годов, еще не стихла всем известная дискуссия: «Может ли машина мыслить?». Я уже тогда занял в этом вопросе совершенно однозначную позицию.

.68. Я считал, что человек – это автономная биологическая система, управляемая чрезвычайно мощным компьютером (или, точнее: комплексом компьютеров), каким является мозг, а вся мыслительная деятельность человека, какой бы непохожей на работу ЭВМ она порой не выглядела, всегда только работа этого компьютера.

.69. Я считал, что работа мозга не отличается принципиально от работы современных ЭВМ, что уже на современных ЭВМ (или, вернее, на их комплексе) можно было бы построить искусственный интеллект, не только равносильный человеческому, но и превосходящий его, если только удалось бы решить такие в общем-то технические вопросы, как колоссальная емкость памяти, неимоверное ее быстродействие и иногда чрезвычайная сложность программного обеспечения.

.70. Так, например, если до сих пор никак не удается решить задачу распознавания образов, то, как я думаю, причина здесь в том, что глаза человека способны очень быстро вводить в мозг такое грандиозное количество информации, которое на много порядков превосходит возможности современных ЭВМ, мозг способен обработать эту информацию с такой скоростью, которая намного превосходит быстродействие ЭВМ и по таким сложным программам, которые не удалось еще написать ни одному программисту, кроме Естественного Отбора.

.71. Но, если удалось бы решить эти исключительно количественные проблемы, то уже современные компьютеры, или, точнее, компьютеры, построенные по типу современных, могли бы и распознавать образы, и совершать все другие действия мозга, в реализации которых они пока еще отстают.

.72. Вот такую позицию по вопросу о мыслящих машинах я занял почти 15 лет назад, будучи еще студентом, и продолжаю придерживаться этих взглядов и сейчас.

.73. Единого мнения по этому вопросу в мире нет и по сей день, хотя бурные споры уже стихли. Я не собираюсь возобновлять с вами эту дискуссию о том, может ли машина мыслить. Я только хочу, чтобы вы как можно яснее понимали ту исходную точку, в которой я стоял еще 15 лет тому назад: это совершенно ясное и недвусмысленное убеждение: мозг – это компьютер и ничего больше. И всему, что происходит в мозге, можно найти аналоги в ЭВМ, всё можно смоделировать на ЭВМ (хотя бы в принципе), все проявления мыслительной деятельности можно объяснить в понятиях компьютеров.

4. Возникновение обобщенных понятий

1981.05

.74. Это была общая установка, которая, однако, не была еще более детализирована. Возникновение абстрактных понятий я тогда представлял в общих чертах так: например, человек видит собаку.

(см. рис.1 {.89})

.75. Это значит, что его глаза вводят в мозг картину внешнего мира, а программы мозга выделяют в этой картине объект «собака» и запоминают ряд характерных признаков этого объекта. Теперь, допустим, через несколько дней человек опять видит собаку и опять его программы выделяют в общей картине, введенной глазами, объект «собака». Другие программы обнаруживают сходство этого нового объекта с тем объектом, который человек видел несколько дней назад. Это может повторяться много раз, и у человека информация о признаках этого объекта всё уточняется и накапливается всё больше запомненных сведений об этом объекте. В принципе наличие этих запомненных сведений и алгоритмов обнаружения сходства между первой, второй, третьей и т.д. собаками и означает, что у человека имеется понятие о «собаках вообще».

(см. рис.2 {.90})

.76. Так я представлял себе возникновение у человека понятия «собака вообще». Этой схемы я придерживаюсь до сих пор.

.77. Возникновение понятия «два» я представлял себе совершенно аналогично.

(см. рис.3 {.91})

.78. Человек однажды видит объект, в котором он выделил две части. Потом он опять видит объект из двух частей. Теперь он обнаруживает сходство между новым объектом и тем, который он видел раньше. Это сходство состоит в том, что у этих объектов две части, хотя во всем остальном они могут быть разными. Например, это объекты «гора с двумя вершинами» и «ноги человека».

.79. Так тем же путем, как создавалось понятие «собака вообще», у человека появляется понятие «два вообще». Аналогично создается понятие «три вообще» и т.д.

.80. Потом программы мозга в принципе так же, как они обнаруживали сходство между отдельными изображениями собаки на сетчатке глаза, обнаруживают, что и между объектами «собака», «заяц», «лошадь» и т.д. существует определенное сходство: они двигаются, дышат и т.д. Так возникает более обобщенное понятие: «животные вообще».

.81. Совершенно аналогично программы мозга обнаруживают сходство между понятиями «один», «два», «три» и т.д. Это сходство состоит в том, что здесь везде измеряется количество частей в объекте или, что то же самое, количество элементов в множестве. Так в принципе всё тем же путем возникает понятие «число вообще», или точнее, понятие натурального числа.

.82. Такими были мои воззрения на природу обобщенных понятий вообще и натуральных чисел в частности почти 15 лет назад в конце 60-тых годов, когда я еще был студентом. Как видите, специально числами я особо не занимался. Скорее я размышлял о человеческих программах вообще и особо выделял роль программ обнаружения сходства или изоморфизма, как я говорил.

.83. Второй этап в моих занятиях числами наступил летом 1978 года. Тогда я захотел аналогичным образом объяснить не только возникновение (а тем самым и природу) натуральных чисел, но и отрицательных, рациональных, иррациональных, комплексных и т.д.

.84. Но сначала вернемся к возникновению понятия «собака вообще».

(см. рис.4 {.92})

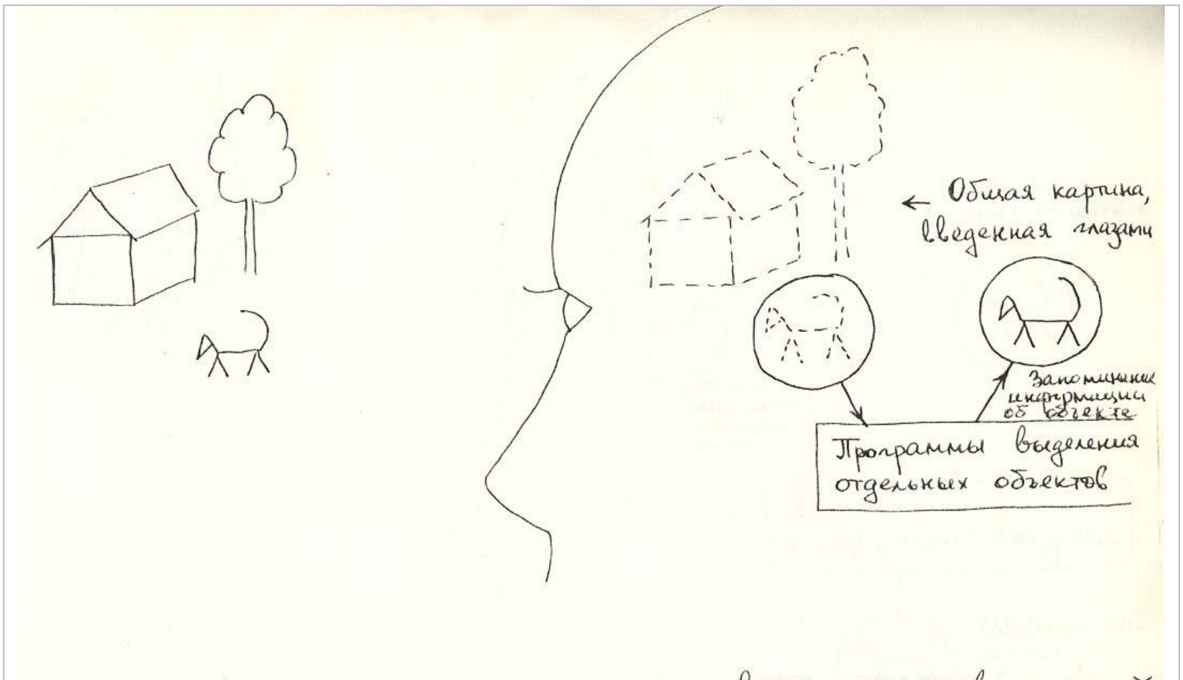
.85. На это можно смотреть и так: во внешнем мире существует множество собак, реальных, материальных собак. Когда человек научился находить общее между отдельными собаками, он, значит, выработал у себя алгоритмы, позволяющие, с одной стороны, обнаружить общее между отдельными собаками, а, с другой стороны, отличить собаки от всех других объектов, он составил и запомнил некоторую таблицу признаков собаки или что-то в этом роде. Иными словами, он множеству материальных собак, существующих в реальном мире, сопоставил некоторые объекты в своей голове, в своем компьютере.

.86. Аналогично на возникновение понятия «два» можно смотреть и так: во внешнем мире существует множество реальных, материальных объектов, состоящих из двух частей, а человек, вырабатывая у себя общее понятие «два», создал у себя алгоритм обнаружения того, что частей именно две или вообще сопоставил этому внешнему множеству «объектов из двух частей» свои внутренние объекты, «таблицы» и т.д.

.87. Когда человек вырабатывает у себя понятие «собака породы сеттер», он, очевидно, будет искать сходство по большему числу признаков. Чтобы он признал объект «собакой породы сеттер», он будет искать все признаки собак вообще, и, кроме того, специфические для сеттера признаки. И, наоборот, для понятия «животные» он будет искать лишь часть признаков собаки, а именно: те, которые общие у всех животных.

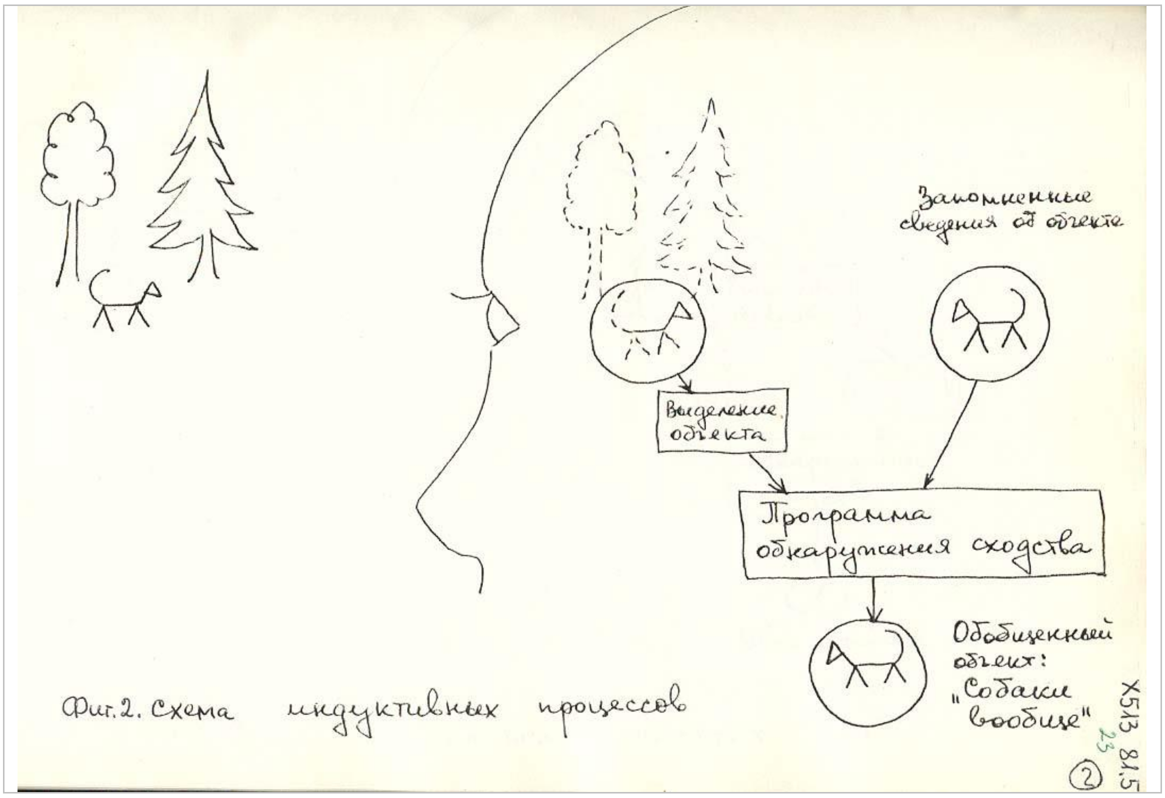
.88. Таким образом, при создании понятия, которое является подмножеством данного, поиск сходства осуществляется по более «строгому» алгоритму, чем при создании исходного понятия. А при создании понятия-надмножества, наоборот, – по более «слабому» алгоритму.

.89. Фиг.1. Схема сенсорных и перцептивных процессов:



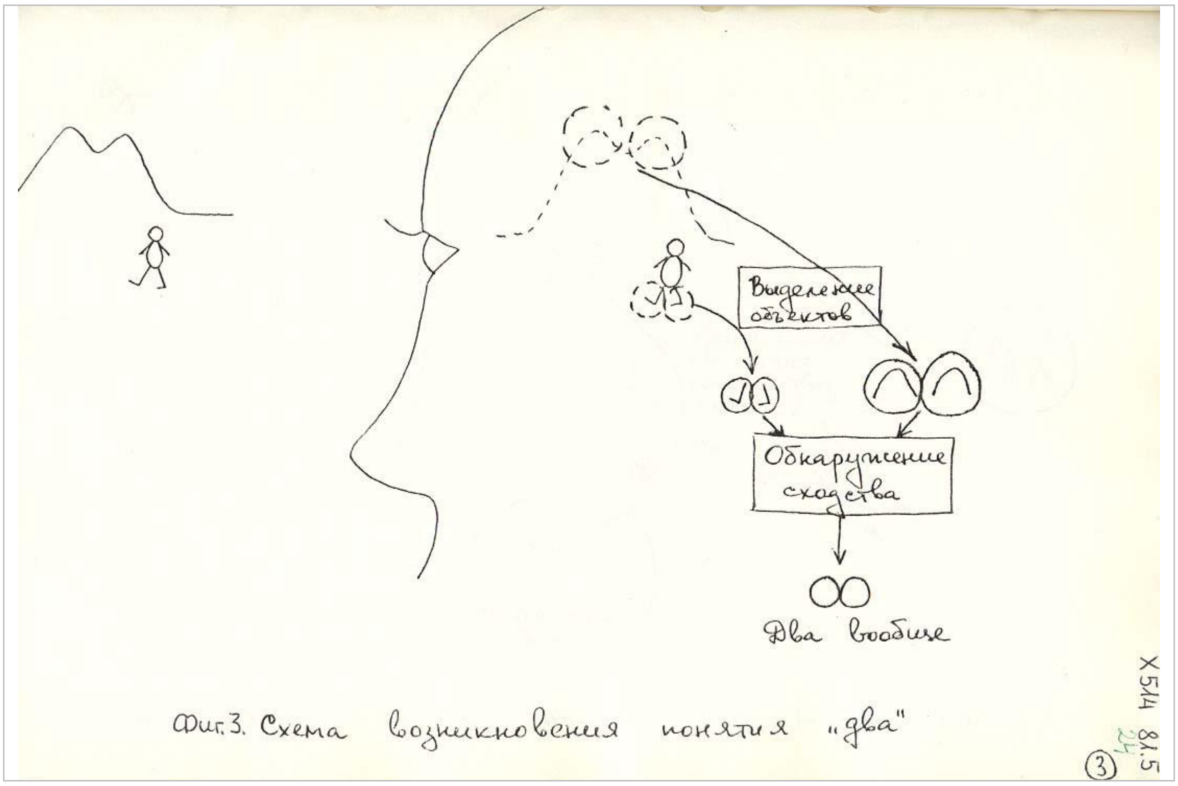
Фиг.1. Схема сенсорных и перцептивных процессов

.90. Фиг.2. Схема индуктивных процессов:



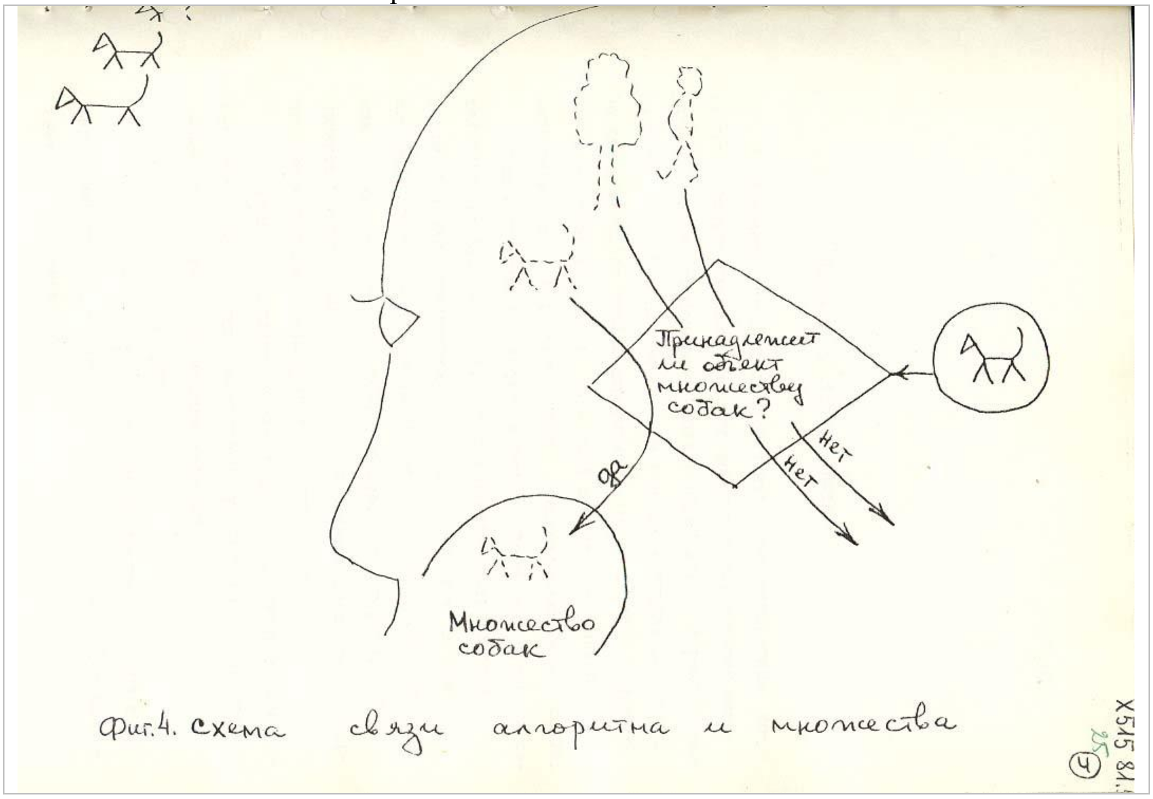
Фиг.2. Схема индуктивных процессов

.91. Фиг.3. Схема возникновения понятия «два»:



Фиг.3. Схема возникновения понятия „два"

.92. Фиг.4. Схема связи алгоритма и множества:



5. Путь к паритерной системе

1981.05

.93. Если теперь это правило применить к тем алгоритмам, которыми я только что вам объяснял возникновение понятия натурального числа, то понятие «число вообще» должно формироваться по более «слабому» алгоритму, чем понятие натурального числа. Но каким же более слабым алгоритмом, чем тот, который проверяет всего лишь количество элементов в множестве, можно объяснять такие числа, как отрицательные, рациональные, комплексные?

.94. Таким образом я оказался в тупике. Но в этом тупике я сидел всего несколько часов. Я решил переработать алгоритм, которым объясняю возникновение понятия чисел. Тот алгоритм, о котором я рассказывал вам только что {.81} и которым объяснял возникновение чисел с конца 60-тых годов, тот алгоритм, как вы помните, искал сходство между горой с двумя вершинами и человеческими ногами по числу частей в этих объектах.

.95. Я решил: не сходство между самими множествами должен искать алгоритм, которому мы обязаны существованию у нас понятия чисел, а сходство между парами множеств.

(см. рис.5 {.108})

.96. Так, например, пара «гора с одной вершиной и гора с двумя вершинами» похожа на пару «одна нога – обе ноги». Так возникает понятие «число вообще».

.97. Теперь объяснить возникновение положительных рациональных чисел уже не было никаких трудностей: пара «три шарика красные, а всего четыре шарика» похожа на пару множеств «три мужчины, а всего четыре человека». Здесь мы имеем дело в первом случае с парой множеств «красные шарики» и «все шарики», а во втором случае с парой множеств «мужчины в какой-то группе людей» и «множество людей этой группы». Более того, эти пары чем-то похожи на пару «6 исправных лодок, а всего 8 лодок». Существованию во внешнем мире таких похожих пар мы и обязаны за наличие у нас понятия о числе 3/4.

.98. Дальше всё пошло как по маслу. Не было никаких трудностей в объяснении по этой же схеме ни возникновения понятия отрицательных чисел, ни комплексных.

.99. Сравним две пары отрезков или, что то же самое, ориентированных множеств, которые помимо характеристики мощности имеют и характеристику ориентации в пространстве:

(см. рис.6а {.109})

.100. Эти две пары похожи тем, что нижний отрезок (нижнее множество) ровно в три раза короче верхнего. Такие пары, если следовать тому, о чем я говорил выше, порождают число 3.

.101. Но теперь сравним следующие две пары множеств:

(см. рис.6б {.110})

.102. Если, как и раньше, сравнивать эти пары только по мощности, то они похожи между собой, так как нижнее множество в три раза короче верхнего.

.103. Но если помимо мощности учитывать еще и ориентацию, то они уже не похожи.

.104. Теперь вернемся еще раз к началу моего рассказа. Когда мы создавали понятие «собака вообще» {.75}, мы считали, что во внешнем мире существует множество реальных, материальных собак. Создание у человека обобщенного понятия «собака вообще» означало в первую очередь то, что человек научился с одной стороны обнаруживать, что все отдельные собаки чем-то похожи, и, с другой стороны, отличать собак от всех других объектов. Если исходить из идеи, что мозг – компьютер, то это значит, что этот компьютер имеет программу или алгоритм, которые могут найти сходство между отдельными собаками и отличить собак от других объектов. Создание понятия «сеттеры – подмножество собак» означало, что используется алгоритм, учитывающий большее количество признаков.

(см. рис.7 {.111})

.105. Аналогично в случае числа «три» можно считать, что во внешнем мире существует множество пар, количество элементов в которых соотносится как 3:1, а человек, выработав у себя алгоритм, позволяющий обнаружить сходство между этими парами и отличить пары этого типа от всех других, создал у себя понятие «число три».

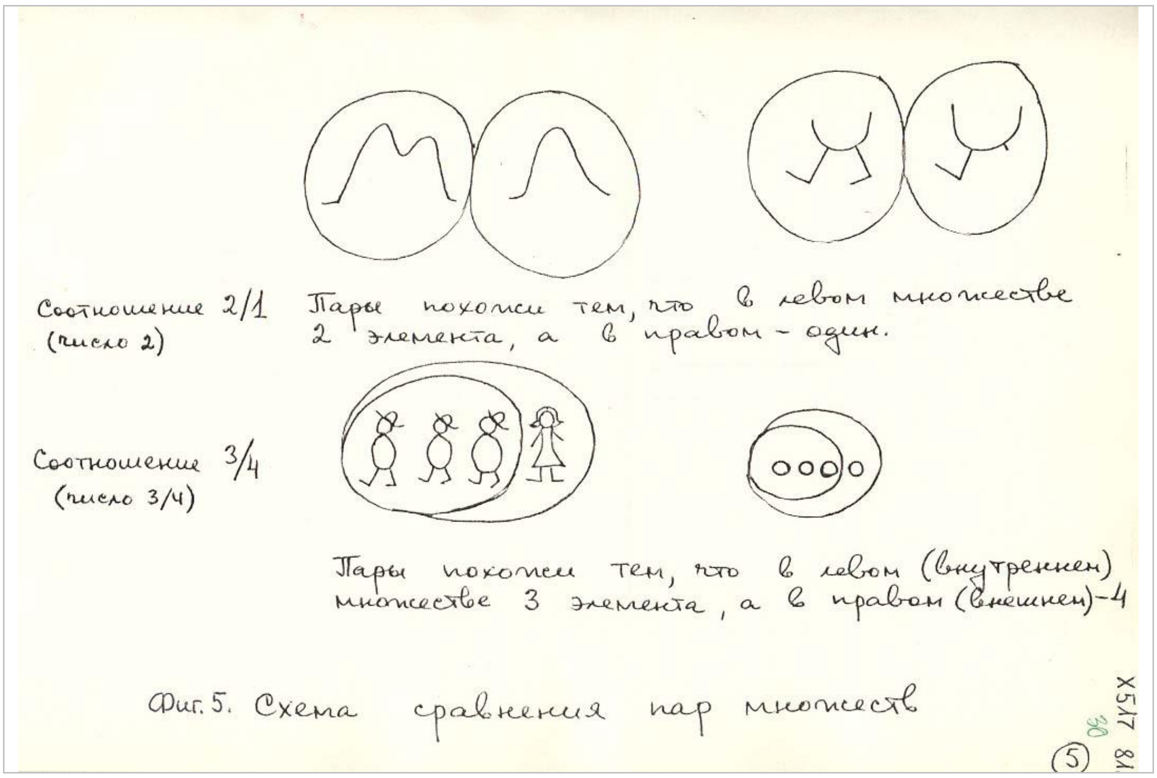
.106. Но, как множество собак распадается на подмножества пород, если алгоритм, ищущий сходство, учитывает больше признаков, так и множество «число 3» (то есть, множество похожих пар) распадается на два подмножества одинаково и противоположно ориентированных пар, если алгоритм, ищущий сходство, учитывает не только мощность, но и ориентацию на прямой.

(см. рис.8 {.112}, {.113})

.107. Если этот алгоритм будет учитывать не только ориентацию на прямой, но и ориентацию на плоскости, то число 3 будет распадаться не на два подмножества, а на столько подмножеств, сколько возможно иметь различных углов между отрезками (то есть, на бесконечно много подмножеств).

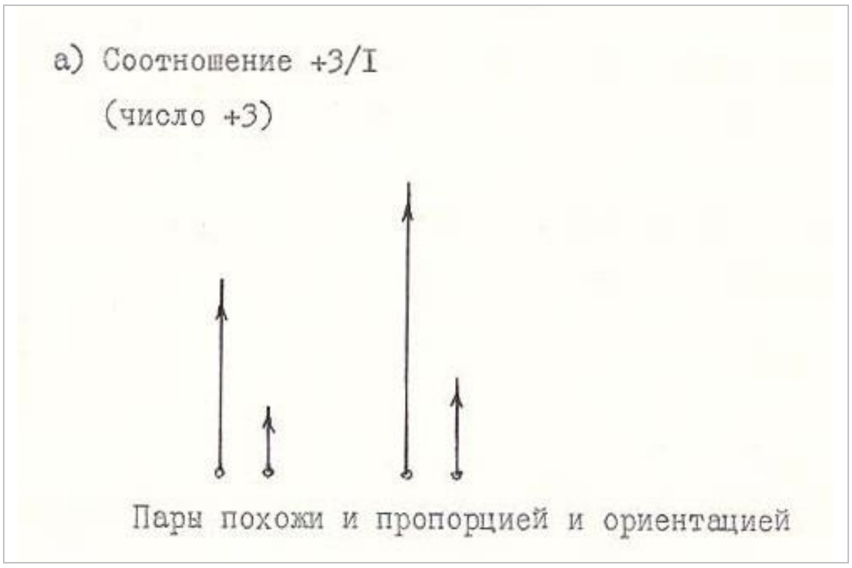
(см. рис.9 {.114})

.108. Фиг.5. Схема сравнения пар множеств:

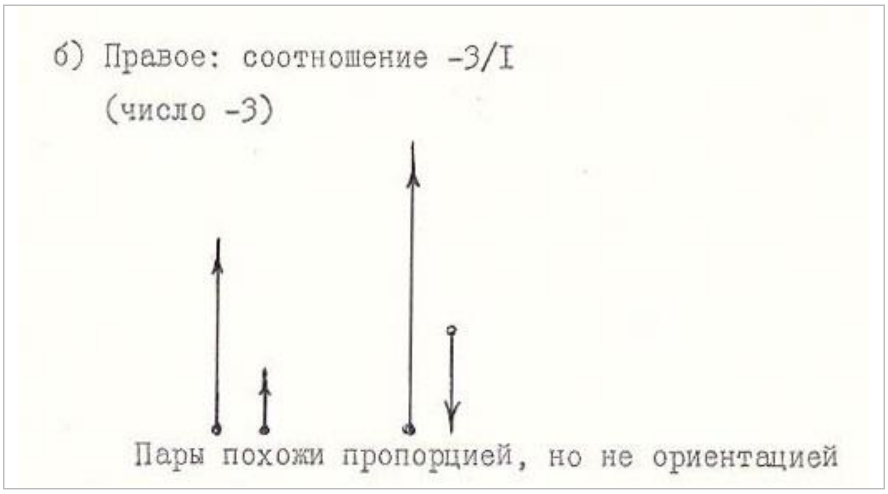


Фиг. 5. Схема сравнения пар множеств

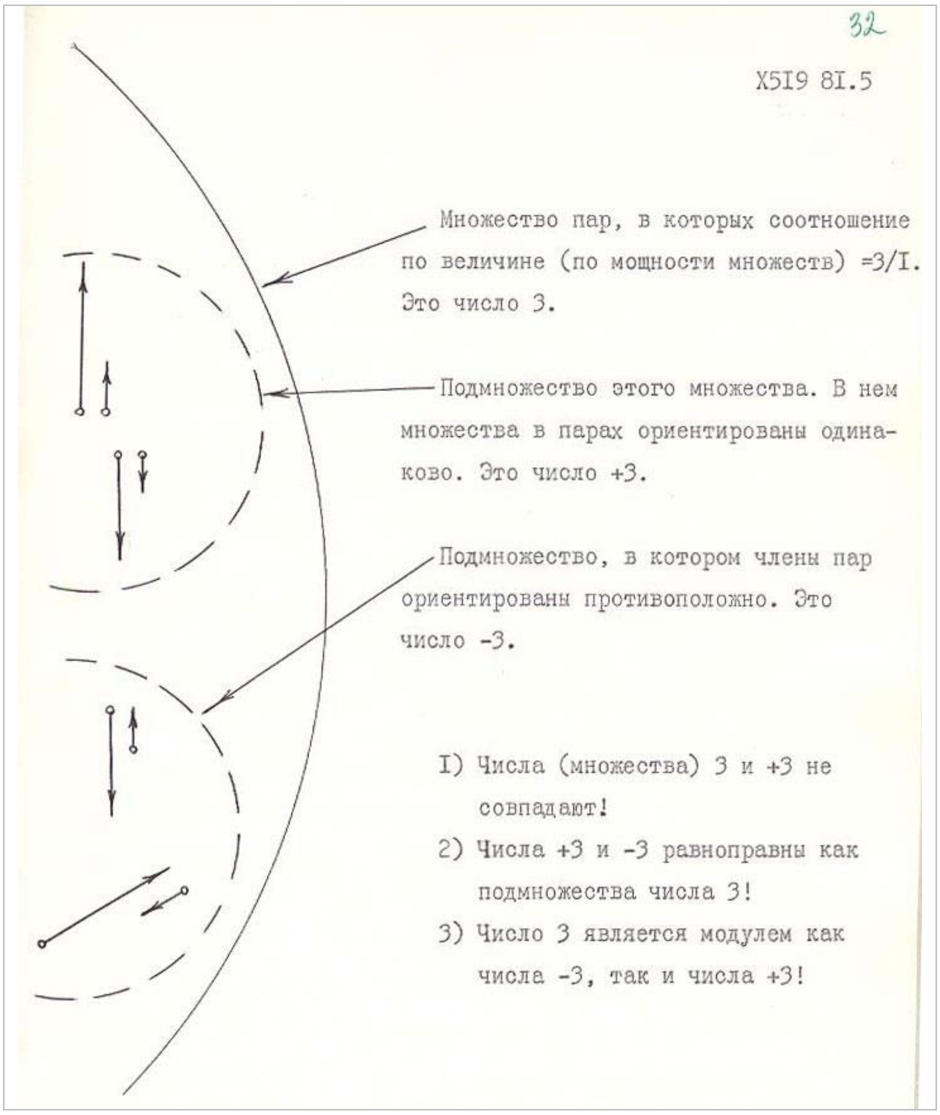
.109. Фиг.6. Схема сравнения линейно ориентированных пар (а):



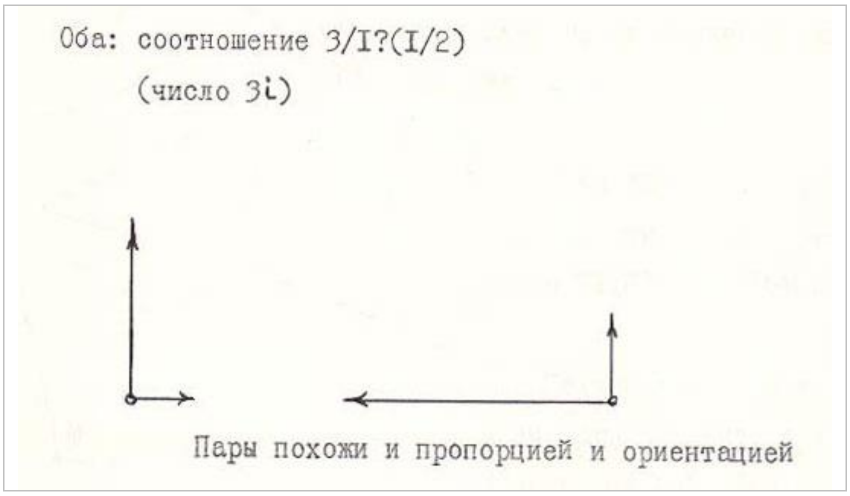
.110. Фиг.6. Схема сравнения линейно ориентированных пар (б):



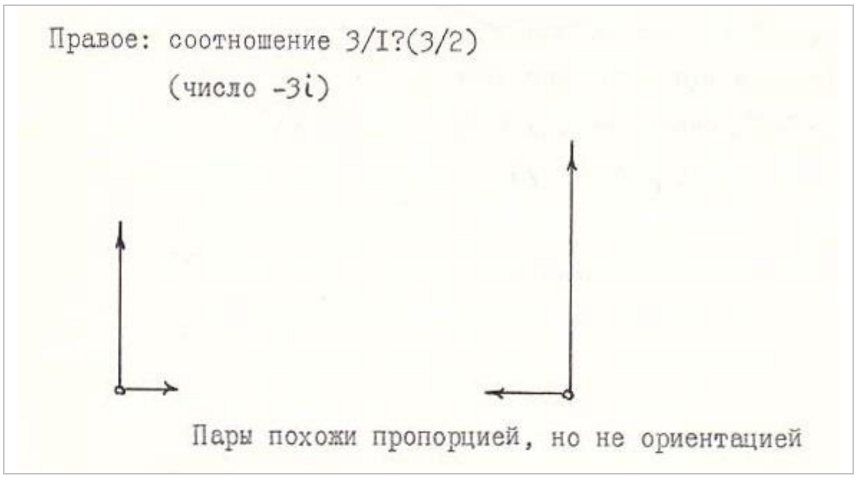
.111. Фиг.7. Схема образования линейно ориентированных чисел:



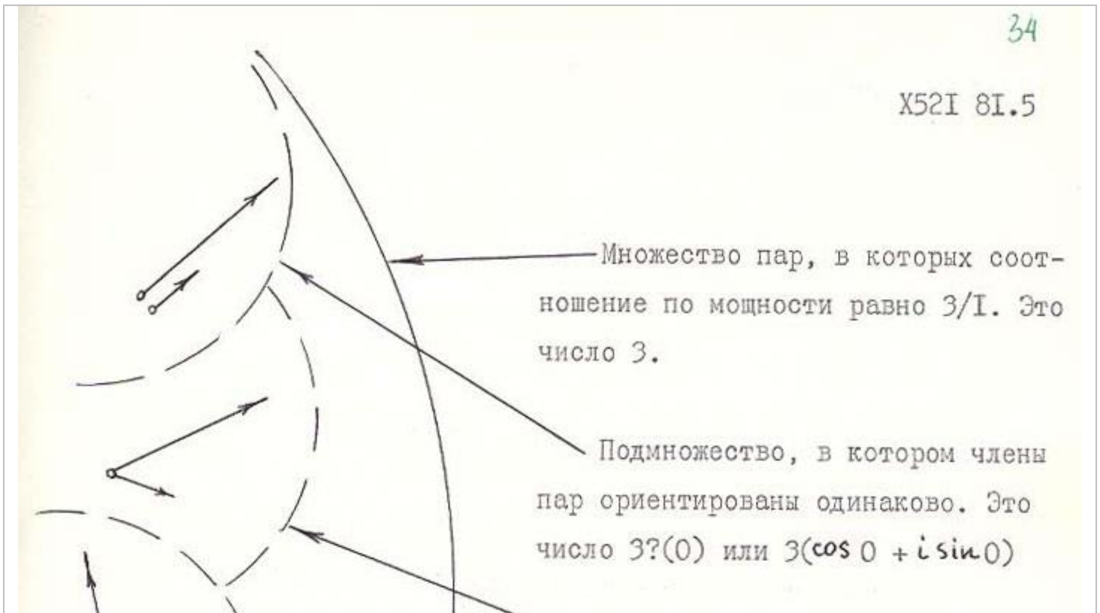
.112. Фиг.8 (а). Схема сравнения планарно ориентированных пар:



.113. Фиг.8 (б). Схема сравнения планарно ориентированных пар:



.114. Фиг.9. Схема образования планарно ориентированных чисел:



6. Сравнение обеих систем чисел

1981.05

.115. Итак, теперь я мог объяснить возникновение понятий всех чисел от натуральных до комплексных по той же схеме, что и возникновение понятия «собака вообще».

.116. Но картина, которая при этом получилась, абсолютно расходилась с мнением традиционной математики по этому вопросу. Как известно, по мнению традиционной математики имеется множество комплексных чисел, в нем вложено множество вещественных, в нем множество рациональных, далее целых и, наконец, натуральных:

(см. рис.10 {.129})

.117. У меня же получилась совершенно иная картина:

(см. рис.11 {.130})

.118. Сначала имеется множество всех возможных пар или соотношений между множествами. Оно распадается на подмножества таких пар, которые получаются похожими (или на подмножества одинаковых соотношений), полученных, если учитывать только мощность множеств. Эти подмножества соответствуют положительным рациональным числам. Я эти числа назвал метрическими. Натуральные числа – это подмножества метрических, а именно: те подмножества, в которые входят пары, в которых одно множество входит в другое целое число раз.

.119. Дальше каждое метрическое число распадается на два линейно ориентированных числа, а потом на бесконечно много планарно ориентированных чисел.

.120. В общем-то имелось почти полное соответствие между различными классами традиционных чисел и тех, что получились у меня, но отношения между различными числами у меня были совершенно иными, чем в традиционной системе чисел. Так, например, натуральные числа никак не являлись подмножеством комплексных и даже не подмножеством целых; число +3 никак не было идентично числу 3 и отличалось от него столь же сильно, как и число -3, и т.д.

.121. Сначала я подумал, что открыл «настоящую природу чисел» или «настоящие числа», а мнение традиционной математики считал всего лишь результатом путаницы. Но потом я свое мнение изменил. Я подумал, что нет никаких оснований отдавать предпочтение алгоритму, сравнивающему пары множеств, перед алгоритмом, который сравнивал собственно множества и о котором я рассказывал в начале этого выступления {.86}. Это два равноправных алгоритма, следовательно, уже натуральные числа можно вводить двумя различными путями. Наметились и пути введения остальных традиционных чисел, исходя из алгоритмов работы мозга.

.122. Итак, теперь я считаю, что в лице традиционных чисел и тех чисел, которые получились у меня, мы имеем две логически равноправные системы чисел и что в принципе можно построить еще и другие системы чисел.

.123. Но я всё же считаю, что мои числа имеют перед традиционными существенные преимущества в основном по трем причинам:

.124. 1) Первое: алгоритмы, которыми вводятся мои числа, значительно проще тех алгоритмов, по которым вводятся традиционные.

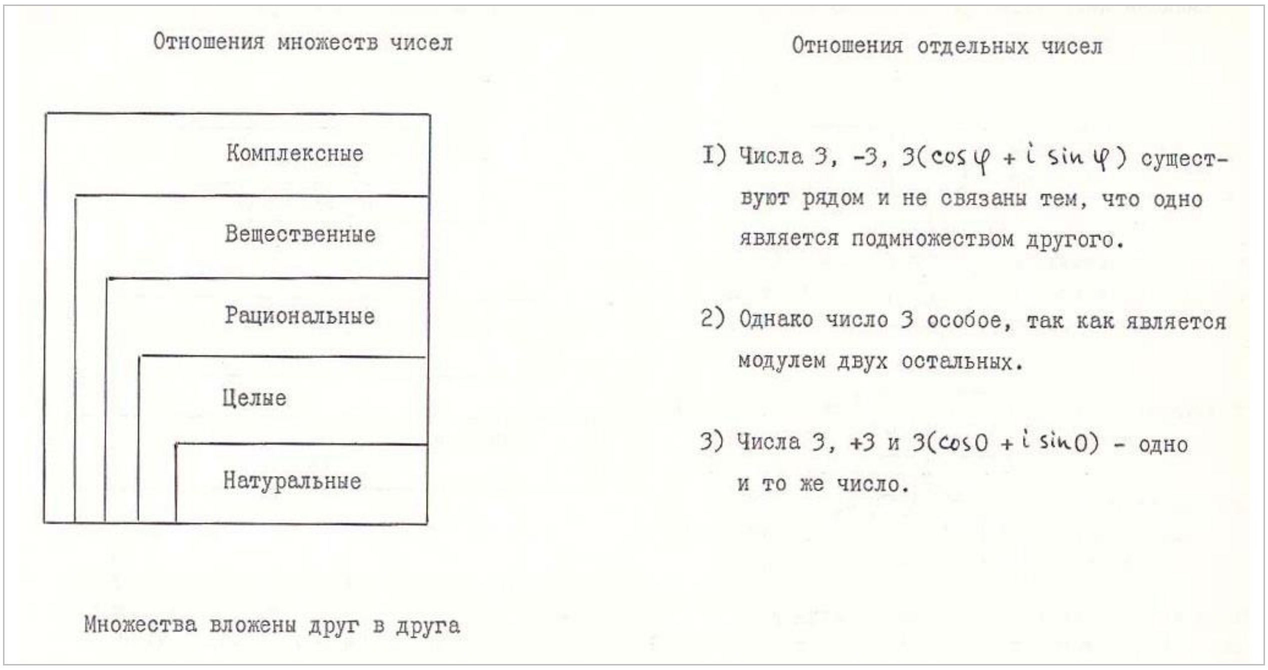
.125. 2) Второе: все классы моих чисел вводятся по единому принципу – как классы «похожих» пар или «одинаковых» соотношений, в то время, как каждый новый класс традиционных чисел вводится по другому принципу: то как классы равномощных множеств (натуральные числа), то в результате арифметических операций (отрицательные и дробные), то как пары вещественных (комплексные числа).

.126. 3) Третье: классификация моих чисел соответствует историческому пути развития у человечества понятия о числах: у меня сначала идут натуральные, – и человечество сначала ввело натуральные числа. У меня дальше идут метрические, то есть, положительные дробные – и человечество сначала создало понятие дроби, а не понятие целого отрицательного числа, которые в традиционной математике вводятся раньше дробных. У меня после дробных идут положительные и отрицательные – и человечество только после дробей выработало понятия положительного и отрицательного. У меня после отрицательных идут комплексные рациональные – и человечество сначала пришло к комплексным, и только позже к иррациональным. А традиционная математика иррациональные числа вводит раньше комплексных.

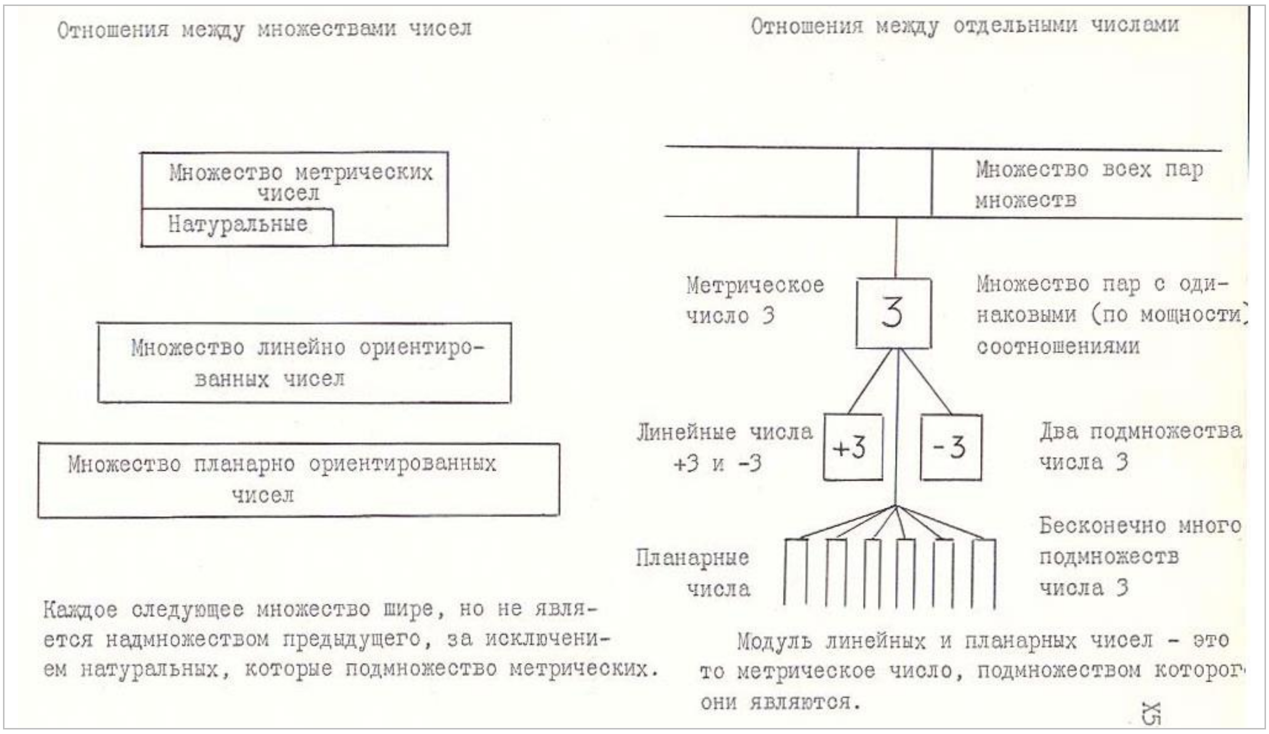
.127. В этом совпадении этапов классификации моих чисел и исторических этапов создания человечеством чисел, я вижу свидетельство того, что мои числа ближе к людским интуитивным, нежели традиционные.

.128. Всю эту систему чисел, построенную при помощи классификации пар множеств, я назвал паритерными числами.

.129. Фиг.10. Традиционный взгляд на числа:



.130. Фиг.11. Мой взгляд на числа:



7. Разногласия с математикой

1981.05

.131. Пока я просто объяснял возникновение понятия натурального числа по образцу возникновения обобщенного понятия собаки, как я это рассказывал в начале этого выступления, я не придавал этому объяснению никакого значения, по крайней мере значения с точки зрения математики. Теперь же, когда я построил новую систему чисел, причем, как считал, более логичную и стройную, чем традиционная, я начал думать, что это должно же иметь какое-то значение и для собственно математики как науки.

.132. Это, естественно, побудило меня попытаться описать свои представления о числах. Я пробовал это сделать при помощи традиционной математической системы понятий. Так, например, я пытался определить натуральное число 3 как «множество всех множеств, содержащих три элемента». Но скоро я убедился, что, пользуясь традиционной системой понятий, совершенно невозможно высказать то, что я действительно имею в виду.

.133. Так, например, определение «число 3 – это множество всех множеств, имеющих три элемента» становилось совершенно бессмысленным. И не из-за того, что оно выглядело как тавтология, хоть и не является тавтологией. А потому, что за «множеством всех множеств» я видел целый ряд различных объектов, и было совершенно невозможно объяснить в понятиях математики, что же я имею в виду.

.134. Итак, первое, что меня не устроило в системе понятий математики – это понятие множества. В математике оно фундаментально и не требует никаких объяснений. Для меня оно выглядело чрезвычайно расплывчатым и требующим очень много пояснений.

.135. Потом у меня получился конфликт с аксиоматическим методом. В математике он считается наиболее точным и хорошим, в моих же глазах он стал выглядеть всё более второстепенным и вспомогательным. Потом с формализмом теорий, с канторовым учением о бесконечных множествах и т.д., пока в конце концов всё здание современной математики стало выглядеть для меня удивительно причудливым.

.136. Я понимаю, что сегодня это выглядит просто смешно, когда никому не известный я говорю такие вещи вопреки трудам тысячей великолепнейших умов человечества. И если я всё же произношу это вслух, то только потому, что уверен в своей правоте и в том, что математика рано или поздно будет преобразована, и преобразована в том направлении, как я думаю.

.137. Мне бы хотелось, чтобы вы хотя бы поверили в то, что я никогда не старался во что бы то ни стало придумать что-то оригинальное, что-то новое. Наоборот, начиная с объяснения чисел и кончая последними разногласиями с формализмом и аксиоматическим методом, я всегда старался придерживаться традиционного пути, пока не убеждался, что это невозможно, что невозможно согласовать концепции традиционной математики с тем исходным положением, которое я принял еще студентом 15 лет тому назад: с положением о том, что мозг – компьютер, и любая мыслительная деятельность, в том числе та, которая порождает математику, – это работа компьютера.

.138. Я считаю, что эта концепция человека (мозг – это компьютер, и математические факты – это факты с одной стороны внешнего мира, а, с другой стороны, это факты работы компьютера, обрабатывающего информацию об этом внешнем мире), я считаю, что эта концепция не была учтена в древней Вавилонии, когда создавались истоки математики, что эта концепция не учитывалась ни в древней Греции, ни в средние века, и ни в прошлом столетии. Эту концепцию вообще можно было начинать учитывать только в наши дни, что вы и наблюдаете.

.139. А я вовсе не сумасшедший, а просто человек, который может быть первым, может быть и не первым, но по крайней мере самостоятельно и независимо от других, учел ее в своем отношении к математике.

.140. В последней части своего выступления я попытаюсь в основных чертах обрисовать то, как я представляю преобразование математики согласно концепции о том, что мозг – компьютер, обрабатывающий информацию о внешнем мире.

8. Различные множества

1981.05

.141. Рассмотрим теперь понятие множества. Как я уже говорил, за словом «множество» я вижу несколько принципиально различающихся объектов, которые в традиционной математике безнадежно перепутаны.

.142. Первый, так сказать, исходный тип множеств – это множество реальных, материальных объектов, существующих в пространстве и времени. Вернемся опять к нашим собакам. Это, например, множество двух собак, играющих на берегу речки.

(см. рис.12 {.155})

.143. В число таких множеств входит и, например, множество каких-то существ на какой-то планете какой-то звезды, о которой мы ничего не знаем. Но такие множества нас не будут интересовать. Нас будут интересовать только такие материальные множества, информация о которых поступает в мозг и там обрабатывается. Таким образом, исходной точкой нашего разговора о множествах я буду считать такую ситуацию, когда во внешнем мире существует множество каких-то материальных объектов, а в мозг вводится отображение этого множества или информация о нем.

.144. Итак, в исходной ситуации во внешнем мире существует материальное множество, а в мозге – отображающий его объект. Эта ситуация предполагает наличие двух сопоставленных объектов: например – две собаки у речки во внешнем мире и какая-то структура нейронов, их кодирующая в мозге. Внешний объект я называю реалией, а внутренний – номиналией, а множеством ради удобства могу назвать и тот, и другой.

.145. Понятно, что такие множества могут быть только конечными.

.146. Но это только исходная ситуация. Я уже говорил {.92}, что, согласно моим представлениям, отображения объектов в мозге подвергаются обработке по каким-то алгоритмам, например, на предмет выяснения: собака это или нет. Если результат этой проверки положителен, то объект причисляется к множеству собак, иначе он относится к множеству не собак.

(см. рис.13 {.156})

.147. Теперь мы опять наблюдаем, что во внешнем мире имеется материальное множество реальных собак, а в голове человека имеется номиналия, то есть, структура нейронов, их отображающая, им сопоставленная.

.148. Но это множество принципиально отличается от предыдущего. Там все элементы множества имели свои номиналии в мозге, свои отображения. Здесь же такого нет, так как никому, видимо, не удалось увидеть всех собак мира, существующих, существовавших и еще не родившихся. Тем не менее, благодаря наличию алгоритма проверки и наличию «таблицы» признаков собаки, имеется возможность для любого объекта по необходимости определить, принадлежит ли объект «множеству всех собак», или нет.

.149. Таким образом, мы имеем два принципиально различных типа множеств в мозге человека. Одни имеют номиналии для всех элементов. Такие множества я называю конкретными. Другие множества номиналий всех элементов не имеют, но заданы некоторым алгоритмом проверки или построения. Такие множества я называю абстрактными. (А кроме этих двух типов множеств, имеющих отображения в голове человека, имеется и третий тип множеств, которые существуют во внешнем мире, но отображений не имеют, и которыми мы договорились не интересоваться).

.150. Конкретные множества примерно соответствуют экстенсионально заданным множествам в математике, а абстрактные – интенсионально. Но соответствуют только приблизительно.

(см. рис.14 {.157})

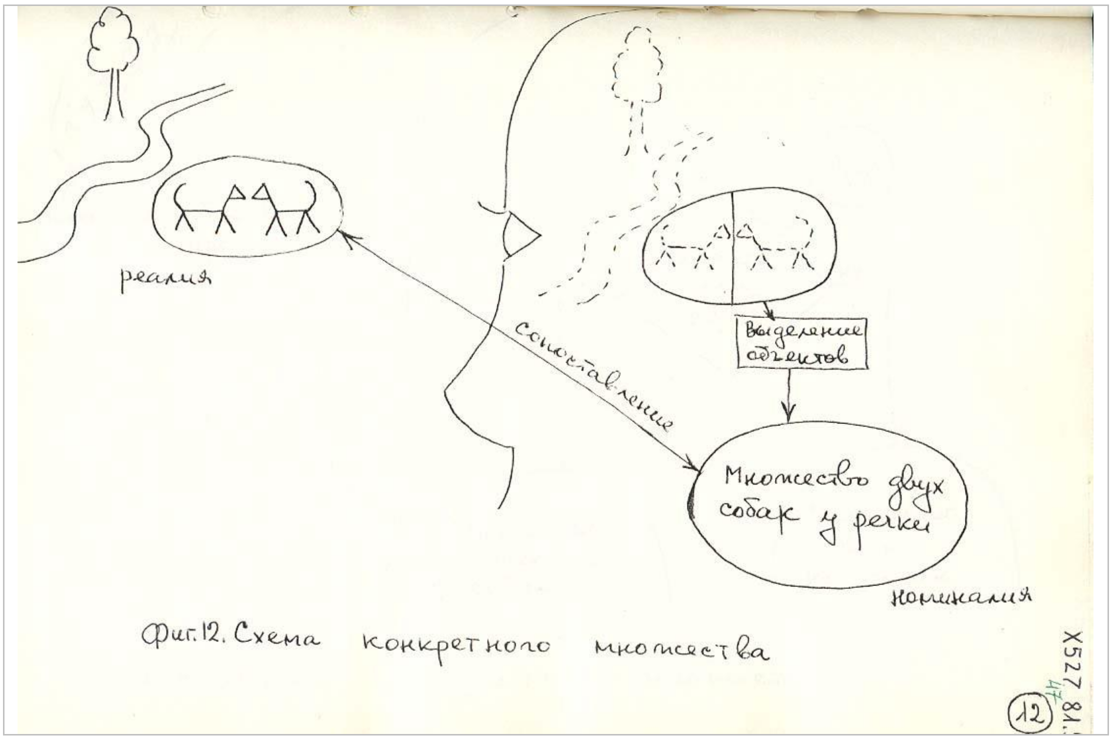
.151. Теперь рассмотрим алгоритм определения принадлежности объекта к множеству всех русалок. Этот алгоритм ничем принципиально не отличается от предыдущего алгоритма определения принадлежности объекта к множеству собак: он также реализуется какой-то программой мозга, также имеется таблица признаков русалки и т.д. В данном случае также имеется номиналия в мозге человека, хотя никакой реалии во внешнем мире нет. Такая ситуация может быть не только с абстрактными множествами, но и с конкретными.

.152. Но отсутствие реалий, соответствующих номиналиям, существующим в мозге, ничуть не мешает человеку обрабатывать эти «нереальные» номиналии наравне с «реальными», думать о них, рассуждать, представлять их себе, что человечество убедительно доказало религиозными тысячелетиями.

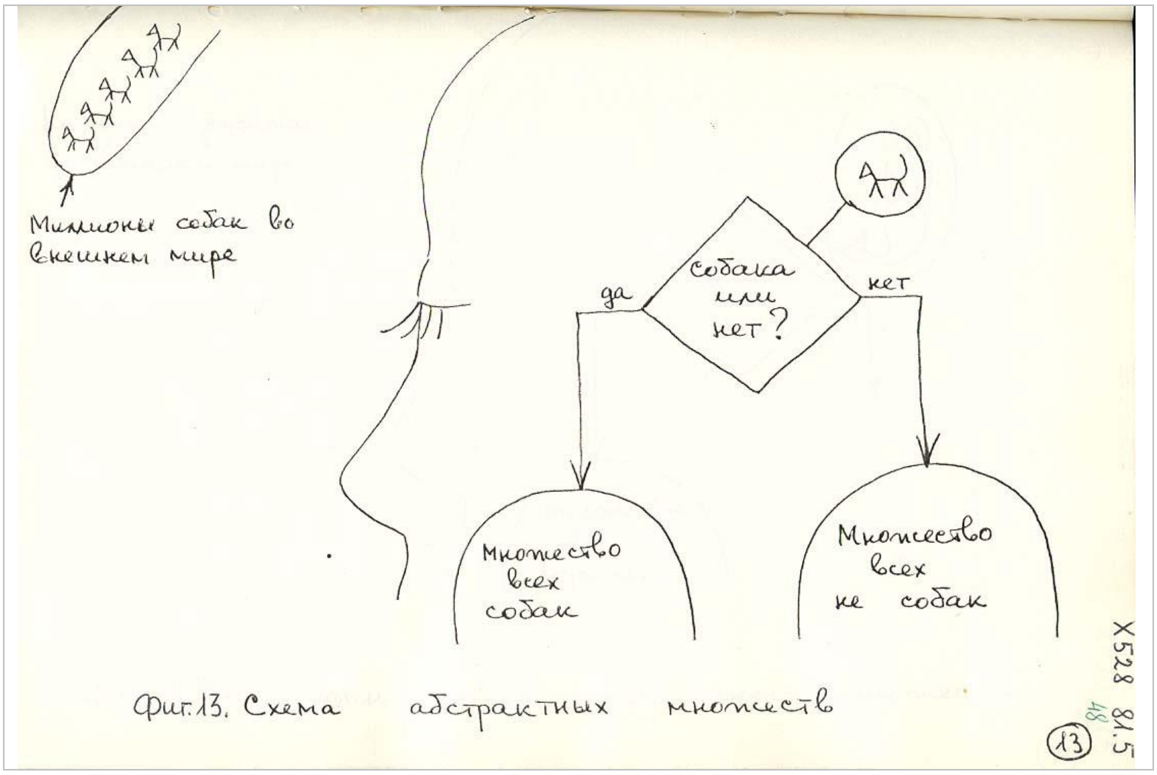
.153. Таким образом, для наших целей более важным становится не то, существует ли материальный объект, реальное множество во внешнем мире, а то, существуют ли номиналии – и какие именно – в мозге, то есть, то, какие там созданы структуры, безотносительно к тому, соответствуют ли они чему-то в реальном мире.

.154. Не надо только забывать, что весь этот аппарат первоначально создан Естественным Отбором для отображения реальных, материальных объектов, но в дальнейшем он может быть использован и, так сказать, «вхолостую».

.155. Фиг.12. Схема конкретного множества:

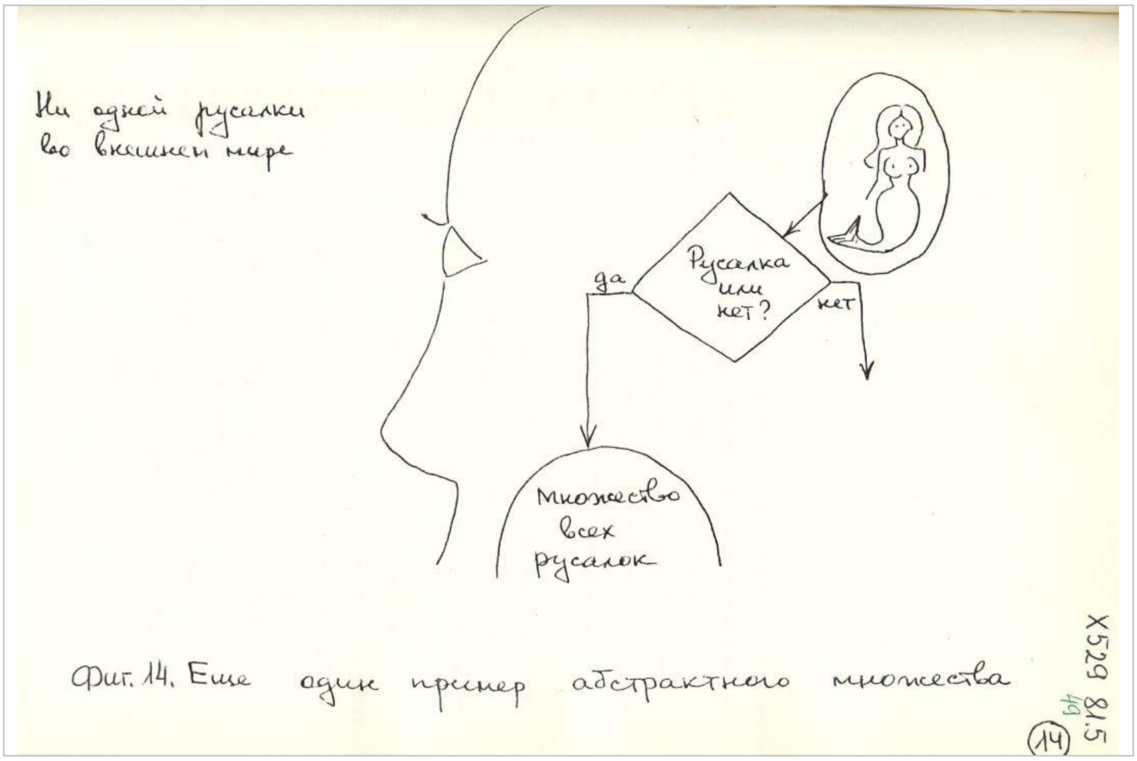


.156. Фиг.13. Схема абстрактных множеств:



Фиг.13. Схема абстрактных множеств

.157. Фиг.14. Еще один пример абстрактного множества:



Фиг. 14. Еще один пример абстрактного множества

9. Определение числа три

1981.05

.158. Теперь я могу пояснить более подробно, почему мне нельзя было изложить свои взгляды в понятиях и терминах традиционной математики. Возьмем, например, определение: «Число 3 – это множество всех множеств, содержащих три элемента». В свете концепции, которую я только что изложил, это определение может быть истолковано по крайней мере тремя различными способами:

.159. 1) Первый – это множество всех материальных, реально существующих во внешнем мире множеств из трех элементов, независимо от того, смотрит ли кто-нибудь на эти множества, или нет, знает о них или нет.

.160. 2) Второе – это множество всех тех трехэлементных множеств, которые я только что назвал конкретными, то есть, таких множеств, которые и сами отображены в голове человека, и все их элементы также отображены в мозге. Это множество всех тех трехэлементных множеств, с которыми человек когда-либо имел дело. Причем здесь сразу возникает вопрос: какой человек, потому что у разных людей состав этих множеств будет разным.

.161. 3) Третье – это абстрактное множество, заданное только алгоритмом, который позволяет определить: три элемента в множестве, или не три.

.162. В принципе можно использовать все три понимания числа 3 как «множества всех множеств, содержащих три элемента». Но только выводы, например, выводы о том, существует ли данное число или нет, каждый раз будут иными. А говорить просто «множество всех множеств из трех элементов», не уточняя, которое, собственно, из трех типов множеств имеется в виду, с моей точки зрения означает говорить расплывчато и неточно. И рассуждения традиционной математики о множествах вообще, выглядят в моих глазах именно такими расплывчатыми и неточными, как бы математики не любили говорить о точности и строгости своей науки.

.163. Итак, определив число три как множество всех множеств, состоящих из трех элементов, мы имеем возможность трояко интерпретировать эти слова. Какую же интерпретацию избрать?

.164. Я повторяю: в принципе можно избрать любую интерпретацию, но дальнейшие рассуждения в некоторых местах будут зависеть от этого выбора.

.165. Если вы попытаетесь поразмыслить над первыми двумя интерпретациями, то вы убедитесь, что выводы о числах очень быстро начинают расходиться с мнением математики. Если же избрать третью интерпретацию, то практически во всех существенных вопросах мы останемся в согласии с математикой, и речь у нас пойдет не об изменении содержания математических истин, а только о их истолковании в духе изложенных выше концепций, так сказать, о переводе этих утверждений на другой язык, другую терминологию.

.166. Естественно, что я принял за основную третью интерпретацию: «число три – это множество всех множеств, состоящих из трех элементов, но множество это абстрактное, заданное только алгоритмом, программой, способом определения того, три или не три элемента в данном объекте».

.167. Теперь всё учение о числах начало выглядеть как учение о таких, вот, алгоритмах, а свойства чисел – как свойства этих алгоритмов, программ мозга.

.168. Программы можно описать и словами. Но я как программист привык считать наиболее точным и исчерпывающим описанием программы ее листинг. Естественно, что мне захотелось и для алгоритмов, порождающих числа, иметь запись этих алгоритмов на языке типа тех, которые используются в программировании. Так возникла идея о моделировании этих алгоритмов на ЭВМ и описании их на некотором входном языке машинного интерпретатора.

10. Эуклидос и Эуклидол

1981.05

.169. Я разработал проект такой машинной модели, которую назвал Эуклидосом в честь Эвклида. У меня, правда, пока нет работающих программ Эуклидоса, но проект написан настолько детально, что, я думаю, не только я, но и любой другой квалифицированный программист мог бы его реализовать. Это вопрос только времени и труда.

.170. Язык общения с Эуклидосом я назвал Эуклидолом. В Эуклидосе используется та концепция множества, о которой я вам рассказывал.

(см. рис.15 {.185})

.171. Объекты внешнего мира представляются в машине как таблицы-номиналии. Конкретному множеству соответствуют таблицы, в которых содержатся ссылки на таблицы-элементы.

.172. Множества могут быть и пустыми.

.173. Имеется специальный оператор, при вводе которого Эуклидос построит у себя эти таблицы и ссылки.

.174. С такими конкретными множествами Эуклидос может выполнить различные действия по программе или алгоритму, описанному на специальном входном языке.

.175. Элементарных операций 12, но вообще набор команд Эуклидоса шире, только остальные команды не элементарны, так как могут быть реализованы рядом элементарных команд.

(см. рис.16 {.186})

.176. Рассмотрим работу Эуклидоса на примере очень простого алгоритма.

(см. рис.17 {.187})

.177. Как видите, это не что иное, как логическая операция пересечения множеств. Даже эти «элементарные» операции перестают быть элементарными и могут быть описаны, то есть, определены более фундаментальными вещами на Эуклидоле.

.178. Такой алгоритм, описанный на Эуклидоле, вводится в Эуклидос, транслируется (то есть, переводится во внутреннее представление), запоминается и потом может быть многократно выполнен по вызову либо оператором EXEC, который вводится извне, либо по вызову из другого алгоритма при помощи команды EX.

.179. Результатом каждого его выполнения будет новое конкретное множество.

(см. рис.18 {.188})

.180. При этом выполнении алгоритма пересечения вместо абстрактных входов A и B ему поставляются конкретные множества «Броун» и «Мужчины», а конкретному множеству, которое создается вместо абстрактного выхода C, вы можете присвоить название сами, например, «Билли-Броун».

(см. рис.19 {.189})

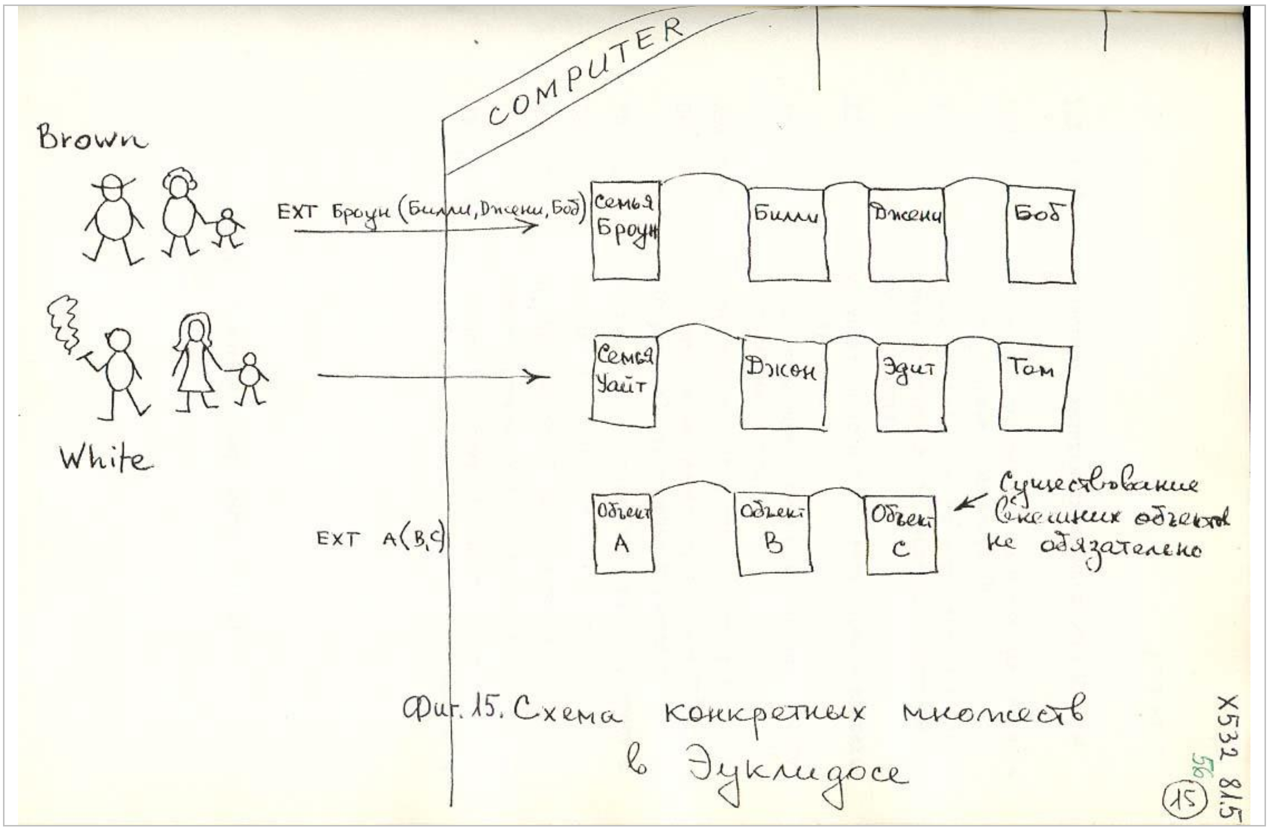
.181. Теперь взглянем на этот же алгоритм, когда он не работает. Тогда он определяет только абстрактные множества A, B, C, и единственное определенное, что мы о них знаем, – это то, что C можно получить из A и B и каким именно способом получить, то есть – по какому алгоритму.

.182. Проследим степени определенности наших знаний о множестве C. В первом случае нам известно и то, из каких множеств (конкретных множеств) C построено, и то, каким способом. В этом случае мы имеем дело с C как с конкретным множеством, все элементы которого известны.

.183. Во втором случае мы имеем дело с C как с абстрактным множеством, о точном составе элементов которого говорить бессмысленно, но о котором мы всё же кое-что знаем благодаря нашим знаниям об алгоритме пересечения.

.184. Возможен и третий случай, когда мы о C знаем только то, что оно имеется, но не знаем ни из каких множеств, ни по какому алгоритму оно построено. Такие множества я называю неопределенными. Но не будем спешить объявлять такие множества бессмыслицей.

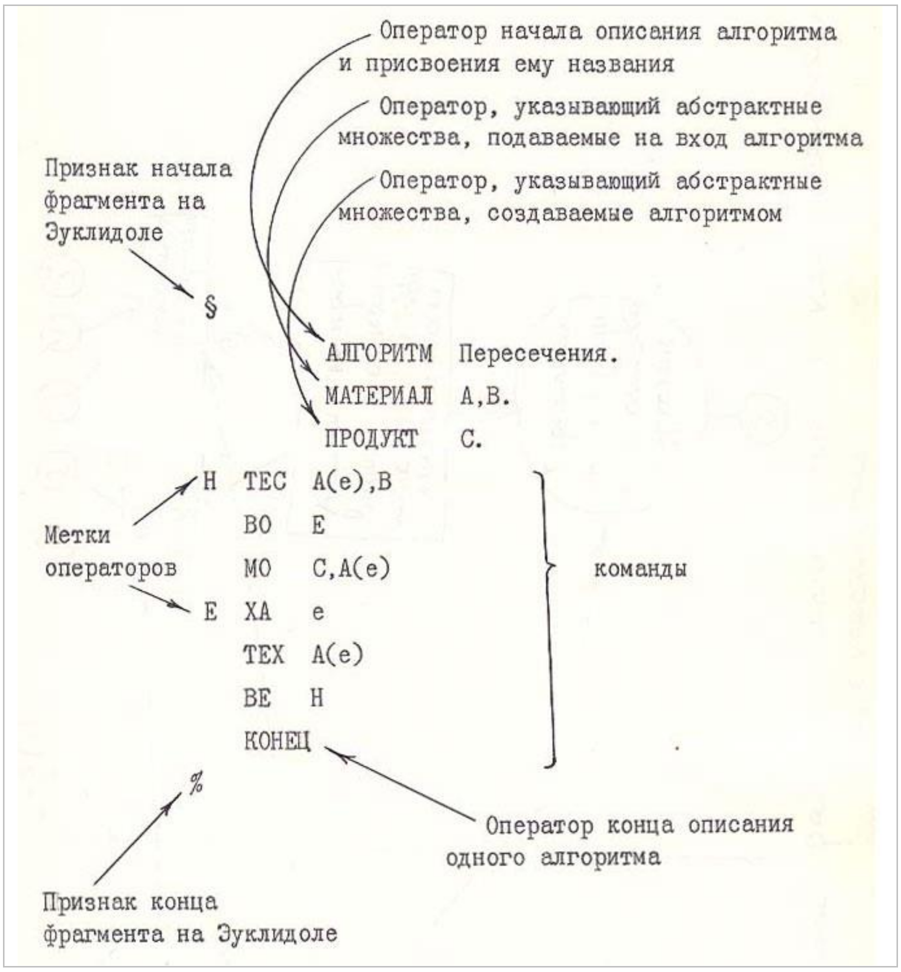
.185. Фиг.15. Схема конкретных множеств в Эуклидосе:



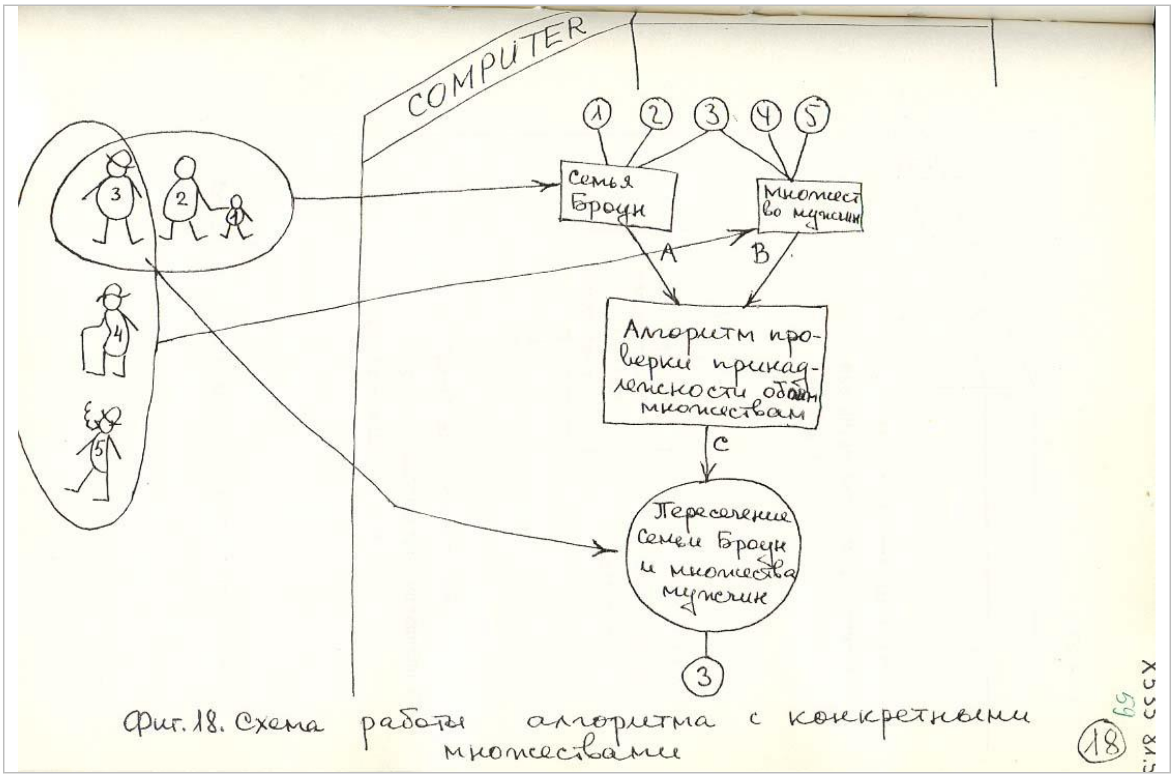
.186. Фиг.16. Основной набор команд Эуклидоса:

TEX	M(e)	проверить, имеется ли во множестве M е-тый элемент
TEC	E(a),M	проверить, принадлежит ли а-тый элемент множества E также и множеству M
XA	a	увеличить индекс а, то есть перейти к следующему элементу в тех множествах, которые им индексируются
XE	a	уменьшить индекс а, то есть перейти к предыдущему элементу
X0	a	установить индекс а на ноль, то есть перейти к началу множества
XEX	a,e	установить индекс а равным индексу е
BE	A	в случае, если "есть" (проверяемое TEX или TEC условие), то перейти к оператору A
BO	A	в случае "отсутствия" перейти к оператору A
CE	M(e)	создать е-тый элемент в множестве M
MO	M,E	включить объект E во множество M
OM	M,E	удалить элемент E из множества M
EX	A: M	выполнить алгоритм A, подставляя ему в качестве исходных данных (материала) множество M

.187. Фиг.17. Алгоритм пересечения

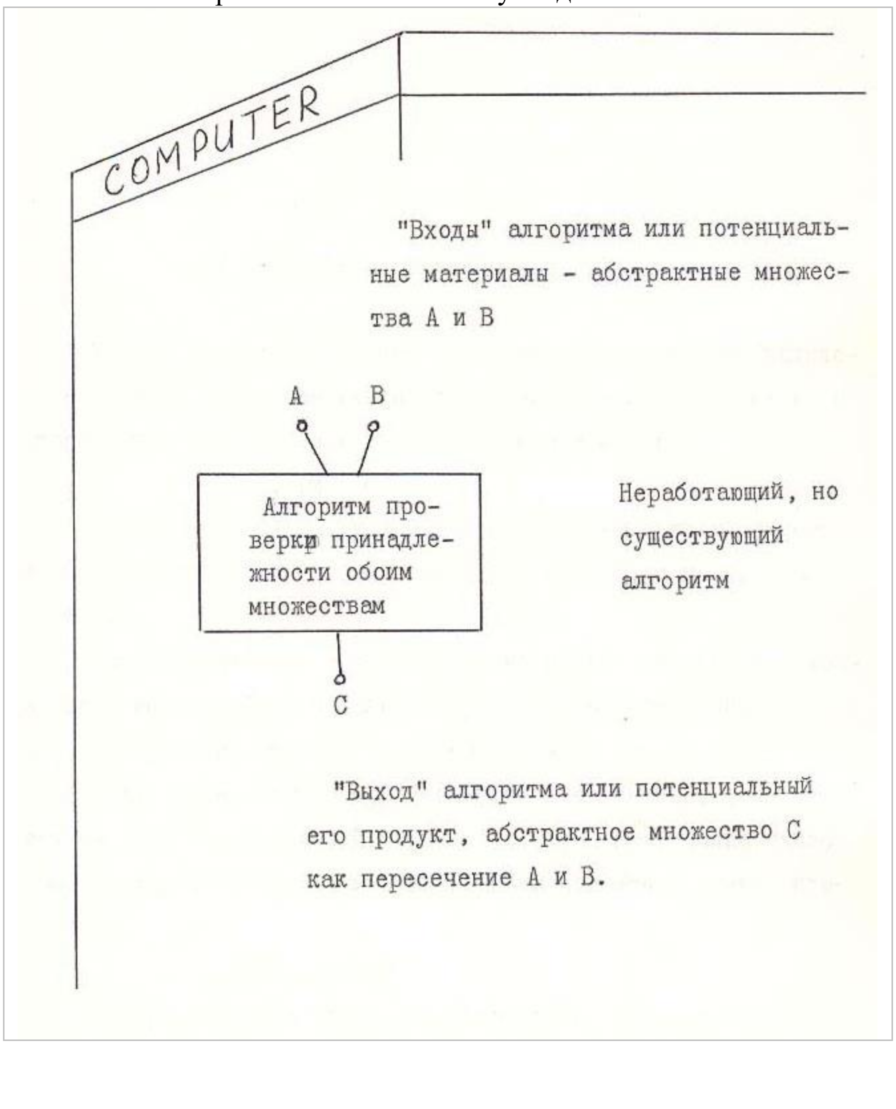


.188. Фиг.18. Схема работы алгоритма с конкретными множествами



Фиг. 18. Схема работы алгоритма с конкретными множествами

.189. Фиг.19. Схема абстрактных множеств в Эуклидосе



11. Определение системы натуральных чисел

1981.05

.190. Теперь вернемся к числам и попробуем описать на Эуклидоле алгоритм, о котором мы говорили раньше {.166} и по которому можно определить, три элемента во множестве, или не три.

(см. рис.20 {.205})

.191. Это можно сделать, например, по алгоритму равномощности, если в качестве эталона ему поставить множество из трех элементов.

.192. Если в Эуклидосе построить очень много всевозможных конкретных множеств, то по алгоритму равномощности можно, например, отобрать из них все те, которые имеют три элемента или, что то же самое, построить «множество всех множеств, состоящих из трех элементов». Помните, это было определение числа три во втором из трех разобранных нами пониманий этого определения {.160}.

(см. рис.21 {.206})

.193. Теперь разберем более обширный алгоритм, который, пользуясь алгоритмом равномощности, будет классифицировать все существующие в Эуклидосе множества по мощности.

.194. В описании алгоритма такие множества равномощных множеств объявлены под названием изоквант, а множество всех их – под названием квантолины. Как видите, точное описание алгоритма одновременно служит и точным определением терминов.

.195. При любом реальном выполнении этого алгоритма квантолина, конечно, не будет бесконечной. Но, если мы рассматриваем ее как абстрактное множество, как потенциальный продукт алгоритма, то квантолина бесконечна, так как сам алгоритм не накладывает никаких ограничений, он всегда может быть еще продолжен.

(см. рис.22 {.207})

.196. Вот мы и пришли к бесконечному ряду потенциальных продуктов алгоритма, который можно считать определением (повторяю: определением) натуральных чисел при построении одной из многочисленных возможных систем чисел.

(см. рис.23 {.208})

.197. Теперь рассмотрим еще один алгоритм. Этим алгоритмом мы сопоставляем любым двум изоквантам (то есть, числам), поданным на входе, третью изокванту (то есть, третье число). Можно написать и еще один алгоритм, который, основываясь на этом, будет строить сложение как тернарное отношение в духе Бурбаки.

.198. Обратите внимание на то, что при помощи Эуклидола мы, основываясь на более фундаментальные вещи, на 12 элементарных операций с множествами, определяем и логические операции, и сами числа, и арифметические операции. Все они определяются теми или иными алгоритмами.

.199. Как мы только что определили операцию сложения, так нет трудностей в определении и умножения.

(см. рис.24 {.209})

.200. Вот два алгоритма, которые определяют сумму и произведение как тернарные отношения, как множества троек чисел.

(см. рис.25 {.210} и рис.26 {.211})

.201. Первый из них перебирает все возможные пары чисел (изоквант) из M и по алгоритму сложения сопоставляет им третье число. Таким образом, продуктом этого алгоритма будет множество (абстрактное) C из троек чисел.

.202. И, наконец, последний алгоритм может то же самое делать (то есть, строить тройки чисел), создавая множество P, только используя при этом алгоритм умножения.

.203. Итак, мы имеем три алгоритма (не считая вызовы других алгоритмов), которые потенциально могут создавать ряд изоквант M и множества C и P троек изоквант по двум различным принципам.

(см. рис.27 {.212})

.204. Теперь мы имеем целиком всю систему натуральных чисел со всеми арифметическими операциями и тернарными отношениями. Она оказалась системой потенциальных продуктов некоторой группы алгоритмов, осуществляемых мозгом и манипулирующих с конкретными множествами или, иными словами, с информацией о внешнем мире. Так выглядят эти начальные объекты математики, этот вечно блуждающий огонек, если исходить из предположения, что мозг – компьютер обработки информации о внешнем мире и что абстрактные понятия создаются в мозге по той схеме, по которой мы объясняли появление обобщенного понятия «собаки вообще» {.90}.

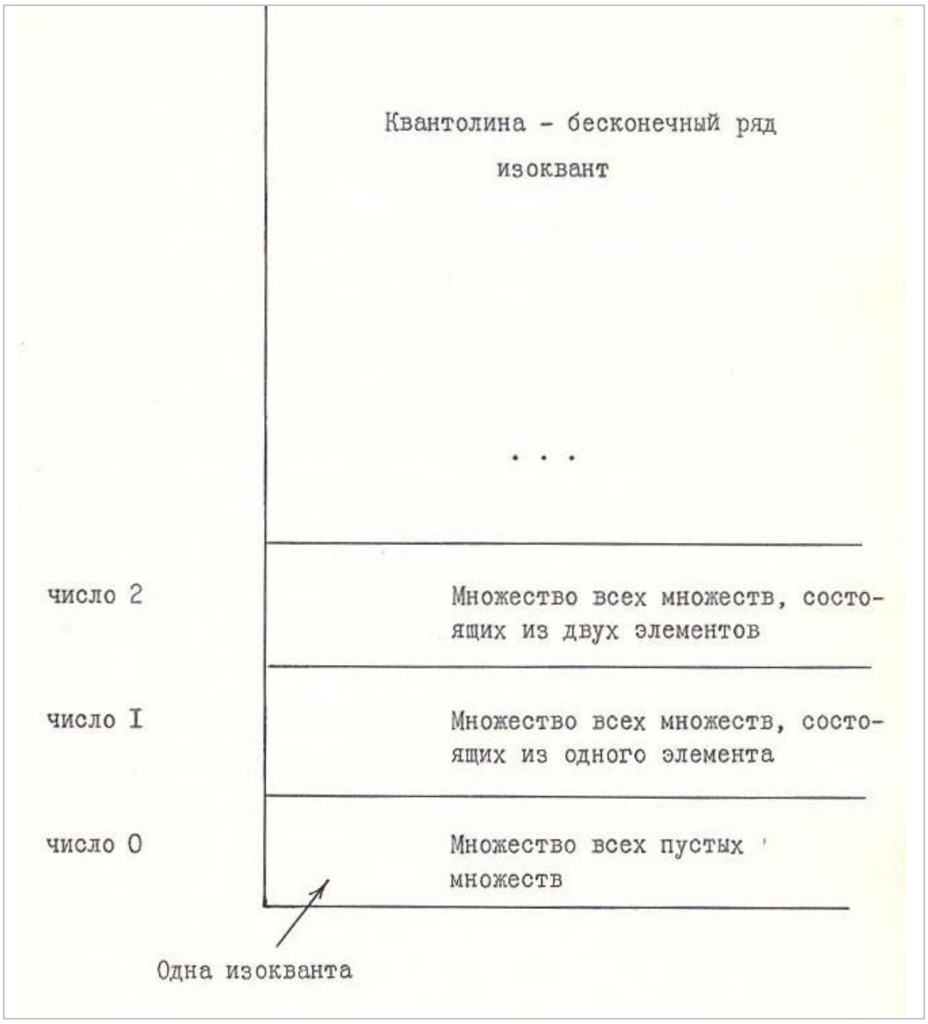
.205. Фиг.20. Алгоритм равномощности

```
§                         АЛГОРИТМ  Равномощности.
                          МАТЕРИАЛ  База, Эталон.
                          ПРОДУКТ   Изок.
 I    ТЕХ  База(а,е)
 2    ВО   7
 3    ТЕХ  Эталон(е)
 4    ВО   IO
 5    ХА   е
 6    В    I
 7    ТЕХ  Эталон(е)
 8    ВЕ   IO
 9    МО   Изок, База(а)
IO    ХА   а
II    ХО   е
I2    ТЕХ  База(а)
I3    ВЕ   I
I4    КОНЕЦ
      %
```

.206. Фиг.21. Алгоритм изоквант

```
§                          АЛГОРИТМ  Изоквант.
                           МАТЕРИАЛ  Базокванта.
                           ПРОДУКТ   Квантолина (Изокванта),
                                     Эталоны.
AI    ЕХ   Равномощности:
           Базокванта, Эталоны, Изокванта(к).
A3    ТЕХ  Базокванта(а,к)
      ВО   A2
      СЕ   Эталоны(к)
      ХА   к
      В    AI
A2    ХА   а
      ТЕХ  Базокванта(а)
      ВЕ   A3
      КОНЕЦ
%
```

.207. Фиг.22. Квантолина



.208. Фиг.23. Алгоритм Сложения

```
§                         АЛГОРИТМ  Сложения.
                          МАТЕРИАЛ  Базокванта,
                                    СлагаемоеI, Слагаемое2.
                          ПРОДУКТ   Сумма, Эталон.
 I    ТЕХ  СлагаемоеI(0,а)
 2    ВО   6
 3    МО   Эталон, СлагаемоеI(0,а)
 4    ХА   а
 5    В    I
 6    ТЕХ  Слагаемое2(0,е)
 7    ВО   II
 8    МО   Эталон, Слагаемое2(0,е)
 9    ХА   е
 IO   В    6
 II   ЕХ   Равномощности: Базокванта, Эталон, Сумма.
 I2   КОНЕЦ
%
```

.209. Фиг.24. Алгоритм Умножения

```
§                       АЛГОРИТМ  Умножения.
                        МАТЕРИАЛ  Базокванта, Множимое, Множитель.
                        ПРОДУКТ   Произведение, Эталон.
 I   ТЕХ  Множимое(a)
 2   ВО   II
 3   ХО   e
 4   ТЕХ  Множитель(e)
 5   ВО   9
 6   МО   Эталон, Множитель(e)
 7   ХА   e
 8   В    4
 9   ХА   a
IO   В    I
II   ЕХ   Равномощности: Базокванта, Эталон, Произведение.
I2   КОНЕЦ
%
```

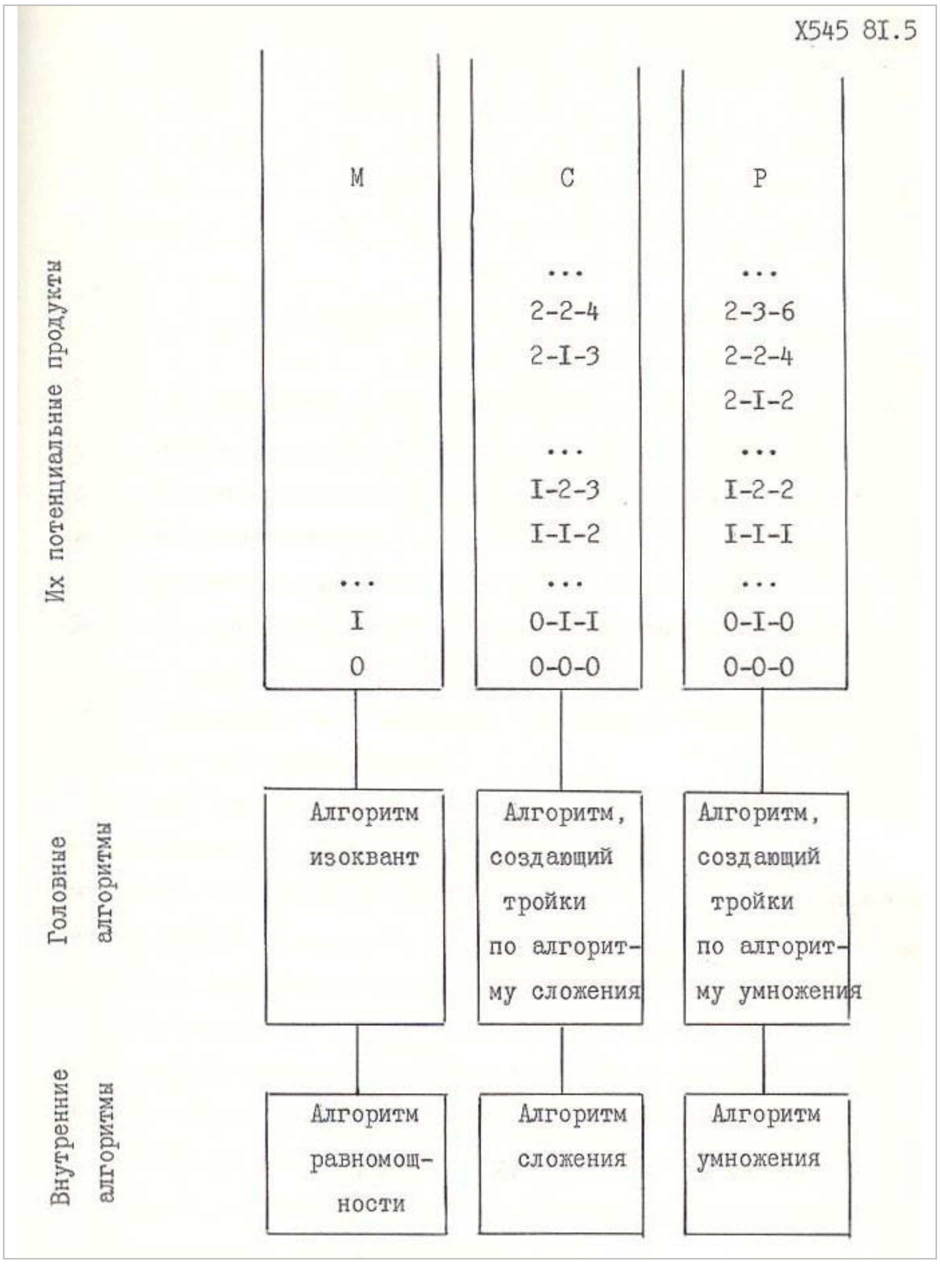
.210. Фиг.25. Алгоритм Суммы

```
§                       АЛГОРИТМ  Суммы.
                        МАТЕРИАЛ  Базокванта,
                                  Квантолина (Изокванта).
                        ПРОДУКТ   С, Сумма.
 I   ТЕХ  Изокванта(a)
 2   ВО   I5
 3   ХО   e
 4   ТЕХ  Изокванта(e)
 5   ВО   I3
 6   ЕХ   Сложения: Базокванта, Изокванта(a), Изокванта(e),
                    Сумма.
 7   МО   С(p), Изокванта(a)
 8   МО   С(p), Изокванта(e)
 9   МО   С(p), Сумма
IO   ХА   p
II   ХА   e
I2   В    4
I3   ХА   a
I4   В    I
I5   КОНЕЦ
%
```

.211. Фиг.26. Алгоритм Произведения

```
§                        АЛГОРИТМ  Произведения.
                         МАТЕРИАЛ  Базокванта,
                                   Квантолина (Изокванта).
                         ПРОДУКТ   Р, Произведение.
 I    ТЕХ  Изокванта(а)
 2    ВО   I5
 3    ХО   е
 4    ТЕХ  Изокванта(е)
 5    ВО   I3
 6    ЕХ   Умножения: Базокванта, Изокванта(а), Изокванта(е),
                Произведение.
 7    МО   Р(с), Изокванта(а)
 8    МО   Р(с), Изокванта(е)
 9    МО   Р(с), Произведение
 IO   ХА   с
 II   ХА   е
 I2   В    4
 I3   ХА   а
 I4   В    I
 I5   КОНЕЦ
%
```

.212. Фиг.27. Система натуральных чисел



12. Природа чисел

1981.05

.213. В начале своего выступления {.46} я сказал, что один из принципов, положенных в основу организации моего выступления – это эволюционистический подход. Я рассказываю об эволюции моих взглядов на математику.

.214. Так вот: я начал с попытки объяснить возникновение в мозговом компьютере понятия числа подобно тому, как объяснял десятки других понятий. У меня не было ни малейшего намерения что-то оспаривать или разрушать в математике. Математика меня просто не интересовала.

.215. Но оказалось, что я объяснил не ту систему чисел, которой мир пользуется, а совсем другую, о которой я никогда ничего не слышал и поэтому думал, что никто о ней ничего не знает, но которая, тем не менее, не только не уступала традиционной, но и была логически стройнее и красивее.

.216. Я попытался описать эту новую систему, но для этого мне пришлось отказаться от традиционного понятия множества и построить свою «компьютерную» концепцию множества, а для более ясного ее представления спроектировать целую систему программ. Но на этом, увы, всё еще не кончилось. Начавшаяся цепная реакция влекла меня всё дальше и дальше.

.217. Теперь, когда я имел свои собственные концепции чисел и множеств, которые были совершенно не похожи на традиционные, теперь мне стало интересно взглянуть на целиком всю математику и попытаться разобраться, что же это такая за наука, что же в ней такое происходит? Чем же она занимается, каков ее предмет и сущность? Что из себя представляют объекты математики?

.218. Мы видели, что система натуральных чисел может быть истолкована как система потенциальных продуктов некоторых алгоритмов мозга. Может быть это просто совпадение, и обе эти системы всё же разные вещи? Числа – это одно, а потенциальные продукты наших алгоритмов – другое?

.219. Я отвечаю не сомневаясь: нет никаких других чисел, кроме потенциальных продуктов тех или иных алгоритмов мозга. Только благодаря этим алгоритмам люди имеют представление о числах, и, изучая свойства чисел, они изучают на самом деле свойства этих алгоритмов.

.220. Итак, по моему глубокому убеждению в лице свойств чисел мы имеем дело со свойствами некоторых алгоритмов мозга, в конечном счете начинающихся с алгоритмов обработки информации о внешнем мире. Таким образом, предметом данного раздела математики вместо таинственных, абстрактных «структур» становятся алгоритмы мозга.

.221. А как обстоят дела с другими разделами математики? Они имеют дело только с «абстрактными структурами», или же за этими структурами опять стоят алгоритмы мозга?

.222. Я считаю, что во всей математике дела обстоят в принципе так же, как в вопросе с числами. Главным и практически единственным объективным, реальным, материальным предметом математики являются алгоритмы, программы мозга.

13. Задача о курах и собаках

1981.07
(через 2 месяца)

.223. Свои взгляды на природу науки математики я попытаюсь проиллюстрировать на примере анализа решения маленькой задачи из курса начальной школы. Решим такую задачу:[5]

.224. Задача: Во дворе гуляют куры и собаки, всего 20 голов и 54 ноги. Сколько во дворе кур, сколько собак?

.225. Арифметическое решение: 1) Сколько было бы ног, если были бы только куры? (40 ног). 2) Сколько «лишних» ног? (14 «лишних»). 3) Насколько ног у собаки больше, чем у курицы? (на 2 ноги). 4) Сколько должно быть собак, чтобы получились 14 «лишних» ног? (7 собак). 5) Сколько остается кур? (13 кур).

.226. Алгебраическое решение: Обозначим число собак через x. Тогда кур $20 - x$. У собак всего $4x$ ног. У кур всего $2(20 - x)$ ног.

Уравнение:

$$4x + 2(20 - x) = 54$$
$$4x + 40 - 2x = 54$$
$$4x - 2x = 54 - 40$$
$$2x = 14$$
$$x = 7 \text{ (собак)}$$
$$20 - x = 13 \text{ (кур)}$$

.227. В мое время в начальной школе такие задачи решали арифметически. Но, пожалуй, все присутствующие решили бы ее алгебраически.

.228. Мы с вами такие задачки решаем за несколько секунд, способны решить гораздо более сложные задачи, и эту считаем элементарно простой. Но это впечатление весьма обманчиво; в решении ее задействованы весьма сложные аппараты, и особенно хорошо это видно, если попытаться заставить ЭВМ решить ее. Конечно, если вы напишете программу

[5] В оригинальной лекции задача располагалась на Фиг.28, но здесь для удобства чтения включена в текст.

решения данного уравнения (или вообще уравнений данного типа) и дадите этой программе на вход все нужные числа, то ЭВМ решит ее без труда. Но не об этом здесь речь. Попробуйте, например, отперфорировать текст задачи на картах, ввести в машину и добиться, чтобы она вам ответила, что собак именно 7!

.229. Попробуем догадаться, что происходит у нас в голове, когда мы решаем эту задачу, и что должна была бы уметь программа ЭВМ (например, Эуклидос), чтобы она тоже могла самостоятельно найти решение.

.230. Процесс решения этой задачи можно разделить на три этапа:

1) Первое: уяснение сущности задачи, отвлекаясь от несущественной для этого информации.

2) Второе: нахождение метода решения.

3) Третье: осуществление метода.

.231. После первого этапа, во время которого используется неоговоренная в задаче информация о том, что у собак 4 ноги, у кур 2, и у всех одна голова, задача выглядит так:

(см. рис.29 {.241})

.232. Множество A (20 элементов) распадается на два подмножества A1 и A2, но неизвестно как.

.233. В множестве B (54 элемента) каждому элементу из A1 соответствуют 4 элемента, а каждому элементу из A2 соответствуют 2 элемента (отображения не пересекаются и охватывают всё множество B).

.234. Сколько элементов в A1 и A2?

.235. Пожалуй, все согласятся, что именно в таком виде эта задача и становится «истинно математической», очищенной от нематематического знания того, что такое куры и что такое собаки. Если мы хотим моделировать на ЭВМ только чисто математическую сторону решения задачи, то можем преподносить Эуклидосу задачу именно в таком виде и опустить весь первый этап.

.236. Итак, в «чистом», математическом виде задача эта заключается в том, что дана информация о количестве элементов в двух множествах A и B (и некоторая дополнительная информация о связях между этими множествами), а надо установить число элементов в множествах A1 и A2.

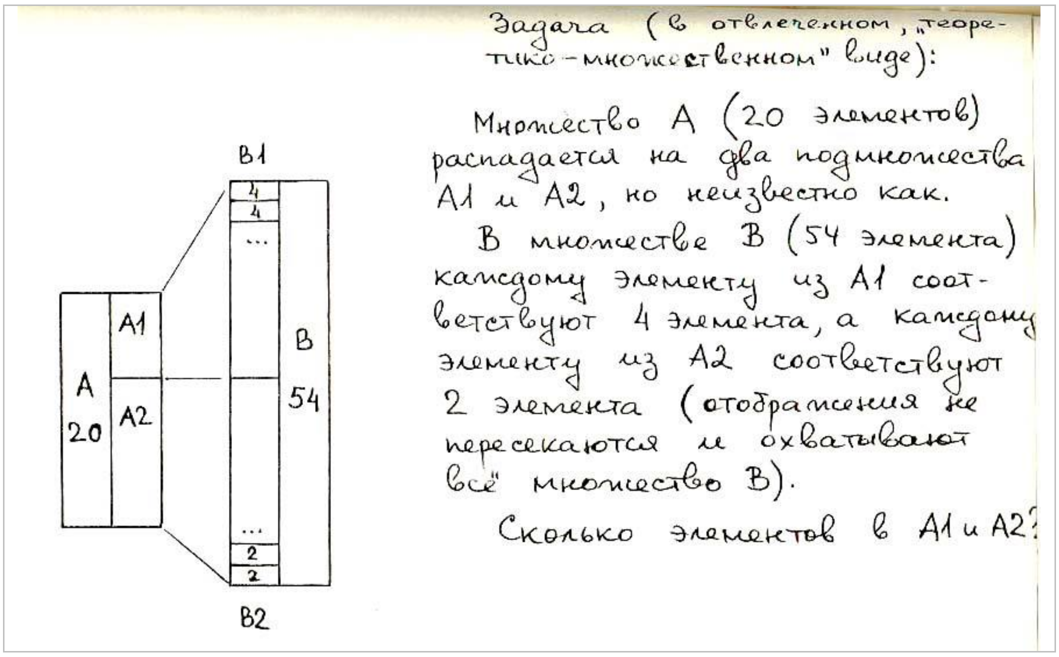
.237. Задумаемся над тем, что означают слова «в множестве A 20 элементов» и слова «найти число элементов в A1». Первая фраза означает, что было произведено какое-то измерение множества A (подсчет его элементов). Моделью этого подсчета в Эуклидосе может служить реализация алгоритма равномощности {.205} или похожего алгоритма, при которой было установлено, что множество A принадлежит изокванте 20, то есть, в нем 20 элементов.

.238. Фраза «найти число элементов в A1» означает, что требуется установить, какой результат дало бы измерение множества A1 (подсчет его элементов), однако не производя на самом деле это измерение или подсчет.

.239. Значит, сущность решения этой задачи состоит в том, чтобы подменить какой-то подсчет, какое-то измерение какими-то другими действиями, получить результат подсчета, не выполняя его.

.240. И я считаю, что вообще вся математика – это в конечном счете наука о том, как подменять те или иные измерения (или подсчет элементов) иными действиями. Если в случае нашей задачи проще всего было бы взять и посчитать собак во дворе, то в жизни имеется очень много таких задач, где прямое измерение или подсчет чрезвычайно трудоемки или вообще невозможны, и тогда подмена прямого измерения или подсчета дает большую экономию труда или позволяет найти результат там, где его иначе вообще не было бы. В этом польза математики, ее значение для людей, и только благодаря этому математика и существует на свете.

.241. Фиг. 29. Квантуальная ситуация



14. Решение задачи

1981.07

.242. Но какими же действиями математика подменяет в нашей задаче прямой подсчет собак во дворе? Это уже второй этап решения задачи – выбор метода. Он наиболее «творческий» и наиболее трудный как для моделирования на ЭВМ, так и для человека, который не располагает готовыми методами решения, а вынужден их находить сам.

.243. Я предложил нашу задачку решить нескольким людям с высшим образованием по математике и физике с условием, что запрещено использование уравнений. Метод арифметического решения таких задач они, конечно, начисто забыли, и задача доставляла им определенные трудности. Первое найденное решение было изящным: один математик попробовал подставить 10 собак, потом 9, потом 8, и на четвертом шаге своих проб нашел решение: «7 собак!».[6]

.244. Это, по-моему, достаточно наглядно показывает, что для практических нужд методы надо знать, а не заново находить. Для моделирования этой ситуации на ЭВМ, мы должны были бы снабдить Эуклидос огромным арсеналом всевозможных методов, среди которых он тогда мог бы выбирать. Ну, а математическое творчество состоит в нахождении новых методов.

.245. Разберем теперь арифметическое решение задачи.

(см. рис.30 {.261})

.246. Первый шаг решения: разбить множество B1 на два подмножества так, чтобы одно из них имело бы такую же структуру, как и B2. Это ключ к решению задачи, именно тот ключ, который так отчаянно искали мои знакомые физики и математики.

.247. Дальше необходимо только знание трех фактов:

.248. 1) Первый: что число элементов в множестве, состоящем из *p* подмножеств по *e* элементов – это то же самое число, которое получится, если *p* умножить на *e*.

.249. 2) Второй факт: если в одном множестве *a* элементов, а в его части *p*, то число элементов в остальной части множества – это то же самое число, что получится, если выполнить операцию «*a* – *p*».

.250. Третий факт: если в каком-то множестве *a* элементов и *p* одинаковых частей, то число элементов в каждой части – это то же самое число, что получится, если *a* разделить на *p*.

[6] **В.Э. 2009.02.10:** Это был Гарри Гейдеман.

.251. Благодаря знанию этих фактов, мы подсчет элементов или частей в множествах можем подменить нахождением результата соответствующей арифметической операции.

.252. Все эти арифметические операции мы недавно {.208} – {.211} определили алгоритмами, описанными на Эуклидоле. Чтобы найти результат операции, надо выполнить этот (или аналогичный) алгоритм. На самом деле никто так не поступает, кроме, может быть, первоклассника, который с целью разобраться, сколько будет 2+3, отгибает пальцы, осуществляя при этом алгоритм, аналогичный алгоритму сложения из рисунка {.208}.

.253. Чтобы быстро и эффективно найти результат операции, математика опять подменяет этот определяющий алгоритм другим алгоритмом, по которому мы манипулируем цифрами на бумаге.

.254. Если Вы пишете 236×23 и потом какой-то сдвинутый столбик цифр, и в результате этих манипуляций с цифрами получаете 5428, то это, конечно, тоже алгоритм нахождения произведения, только не первичный, а вторичный, подмененный, и человечество никогда даже не придумало бы этот алгоритм, если бы он не давал тот же самый результат, что и тот первичный алгоритм, по которому Вы можете объединить 23 непересекающихся множеств по 236 элементов каждое, и убедиться, что в результирующем множестве действительно именно 5428 элементов.

.255. Итак, задача была найти число элементов во множестве A1, подменив подсчет элементов другими действиями, а эти другие действия заключались в разбиении B1 на два подмножества и в выполнении арифметических операций, причем эти арифметические операции опять выполнялись по подмененным алгоритмам манипулирования с цифрами.

.256. Такова сущность решения нашей задачи.

.257. Наиболее трудным ходом в этом решении, как вы помните, было догадаться, что множество B1 надо разделить на два подмножества. Причем этот ход годится только для очень узкого круга задач; в других задачах нужно придумывать или знать что-то другое. В данном случае картина множеств очень простая. Но в других задачах она может быть очень сложной, когда весьма трудно или даже невозможно манипулировать множествами, их хитроумными переплетениями, рядами и т.д.

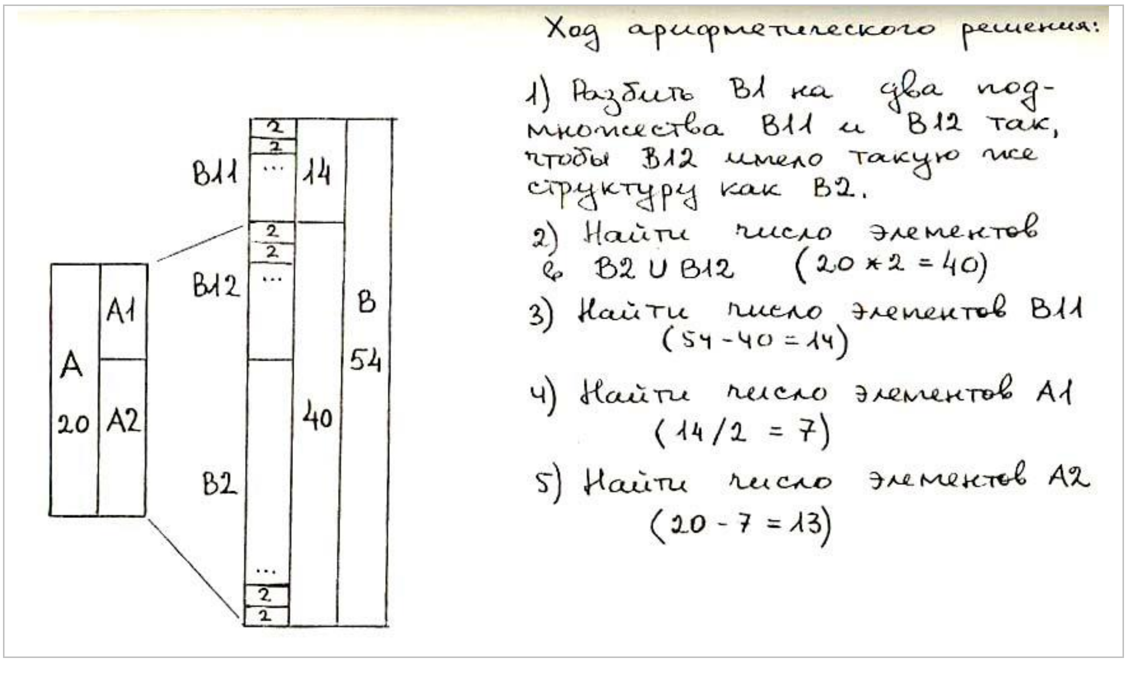
.258. Нельзя ли подменить манипулирование множествами манипулированием значками на бумаге по образцу того, как мы это сделали для быстрого получения результатов арифметических операций? Математики придумали и это. Наука о таких подменах называется алгеброй.

.259. Разберем алгебраическое решение нашей задачи.

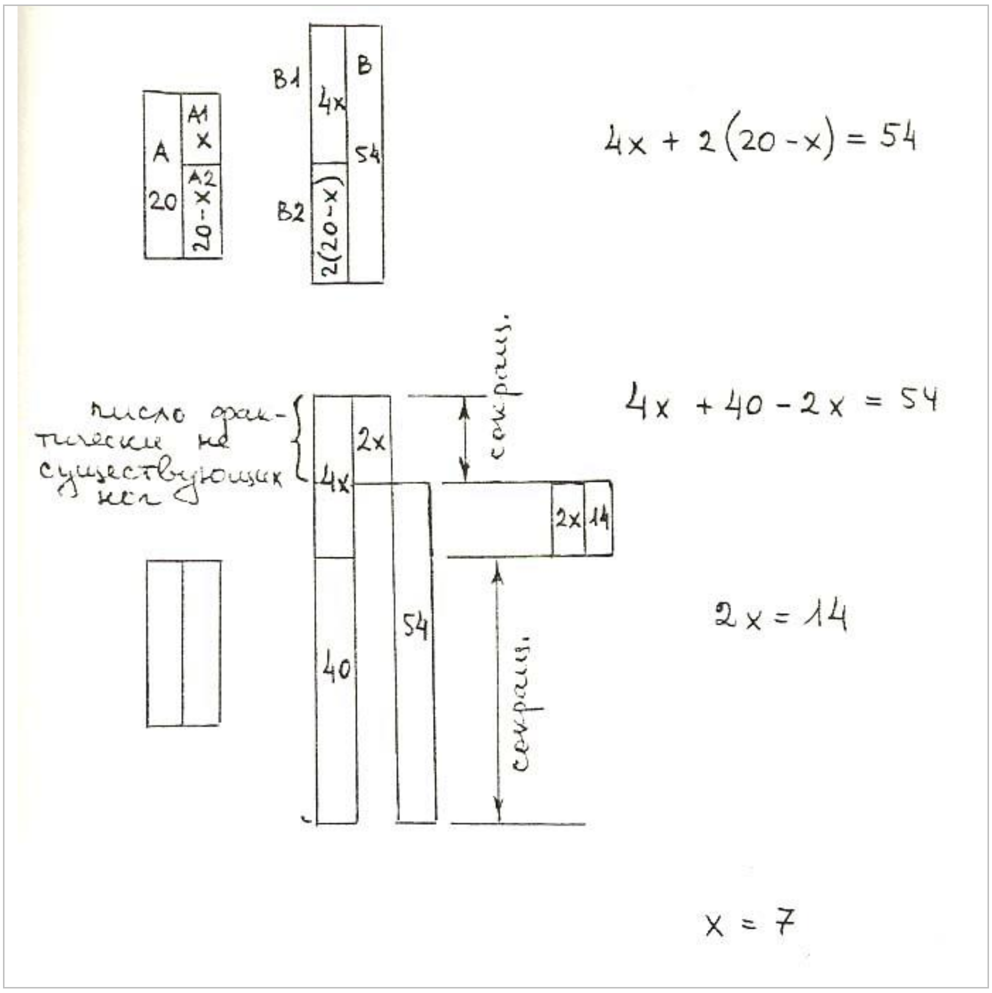
(см. рис.31 {.262})

.260. Всем преобразованиям уравнения можно найти эквиваленты манипуляций с множествами. Манипуляции со значками в уравнении – это подмена действий с множествами. Правда, из самих множеств не всегда видно, зачем это надо делать, но зато метод универсален.

.261. Фиг.30. Арифметическое решение задачи



.262. Фиг.31. Алгебраическое решение



15. Анализ и геометрия

1981.05
(раньше на 2 месяца)

.263. Чем дальше в глубь математики мы уходим, тем больше видим таких подмен одних алгоритмов другими. Всё сложнее и сложнее становятся поля обрабатываемых множеств.

.264. Мы можем, например, измерять путь, пройденный телом от момента начала отсчета времени до текущего момента.

(см. рис.32 {.281})

.265. Мы получим ряд множеств (пройденных путей). Мы можем измерять всё чаще и чаще. Тогда соседние множества ряда будут отличаться всё меньше и меньше. В конце концов мы начинаем считать такой ряд множеств вообще непрерывным (функцией). Математика опять подменяет (уже который раз!) манипуляции с такими рядами множеств манипуляциями со знаками функций и всякими там *dx* и *dy*. Она остается верной себе, и в этом ее польза и причина успеха.

.266. Всё длиннее и длиннее становится цепь подмененных друг другом алгоритмов манипулирования, всё более и более отвлеченными от реальной жизни кажутся действия математиков, пока некоторые не начинают удивляться, каким же это чудом наука, изучающая самое себя, может приносить такую пользу людям.

.267. Математика не изучает самое себя, она изучает алгоритмы. От алгоритмов измерения, непосредственно ведущих в реальный мир, через алгоритмы манипулирования с конкретными множествами до подменяющих их и вторичных алгоритмов манипулирования со значками на бумаге. Таково мое мнение.

.268. В этом выступлении я приведу еще только два небольших примера того, как можно «в духе алгоритмов» интерпретировать два других раздела математики. Это примеры из математического анализа и геометрии.

.269. Нет никаких трудностей описать на Эуклидоле алгоритм, который сопоставлял бы изокванте (то есть, числу) 2 число 4, числу 3 число 9 и т.д., иными словами, алгоритм, сопоставляющий каждому числу его квадрат. Тогда функция $y = x^2$ окажется ничем иным, как записью, кодом этого алгоритма. Аналогично функция $y = 2x$ окажется записью другого алгоритма.

.270. Теперь рассмотрим третий алгоритм, который я назову алгоритмом предела. Этот алгоритм берет и сравнивает разности всё более и более близких значений функций (в нашей терминологии – продуктов какого-то алгоритма) с разностями всё более и более близких значений аргумента (в нашей терминологии – материалов алгоритма).

.271. И вот, оказывается, что в каком бы месте ряда продуктов алгоритма x^2 мы не применяли алгоритм предела, его результат будет всё больше и больше стремиться не к чему попало, а именно к результату алгоритма $2x$. Эта объективная связь в системе потенциальных продуктов этих трех алгоритмов и скрывается за утверждением математики о том, что производной от x^2 является $2x$.

.272. Как видите, нет никаких трудностей интерпретировать в духе алгоритмов самую основную операцию математического анализа – взятие производной. И это никак не подрывает содержание и смысл математических истин, а только вскрывает за умозрительными и как будто придуманными из головы вещами более объективные и реальные объекты.

.273. Теперь обратимся к геометрии. Кажется: уж геометрия-то, особенно классическая, древняя геометрия, изучает пространственные формы и положения реальных объектов, а не алгоритмы мозга. Но стоит только об этом задуматься более глубоко, чтобы убедиться, что это не так. Здесь, ввиду ограниченности времени моего выступления, я приведу только один аргумент в пользу алгоритмической концепции геометрии.

.274. До Эйнштейна люди считали, что наше физическое пространство является трехмерным эвклидовым пространством. Но теория относительности, уже специальная, и, тем более, общая теория относительности, положила конец этим воззрениям.

.275. Каждый современный образованный человек знает, что пространственные свойства физических объектов не совпадают в точности со свойствами объектов трехмерной эвклидовой геометрии. Конечно, в первом приближении они совпадают, но совпадают-то они только в первом приближении.

.276. Так где же тот реальный объект, который имеет в точности все свойства трехмерного эвклидового пространства?

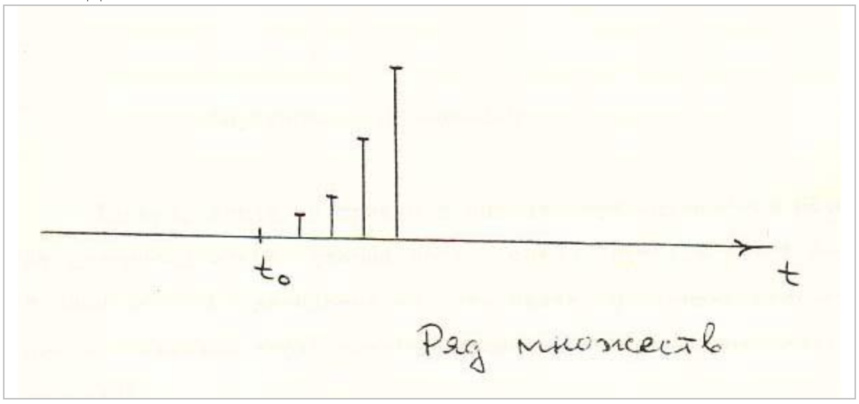
.277. И я отвечаю: в точности все свойства трехмерной эвклидовой геометрии вытекают только из способа характеристики пространственного положения объектов тремя независимо комбинируемыми величинами. Трехмерное эвклидово пространство – это то, что можно охарактеризовать тремя независимыми величинами.

.278. Я думаю, что, характеризуя пространственное положение физических объектов при создании картины внешнего мира, человеческий мозг использует три независимо комбинируемые величины, кодирующие положение объекта: вправо–влево, выше–ниже, ближе–дальше.

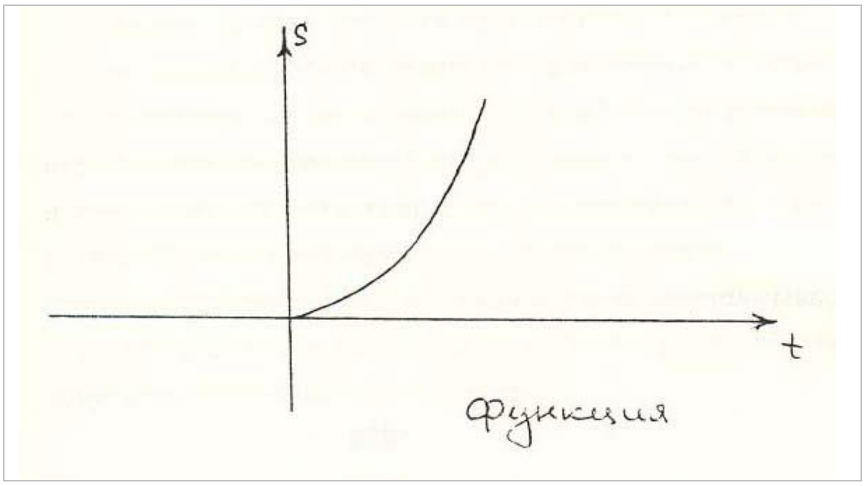
.279. На самом деле, как показывает теория относительности, пространственное положение физических объектов не может быть в точности охарактеризовано тремя независимо комбинируемыми величинами. Но этот способ был достаточно хорош для практических нужд, чтобы Естественный Отбор в свое время встроил в человека именно этот способ.

.280. Итак, из этих воззрений вытекает, что трехмерная эвклидова геометрия или старая, интуитивная геометрия, изучает свойства способа характеристики (или, иными словами, алгоритмов характеристики) положения объектов тремя величинами или того способа, который встроен в человека. Другие геометрии изучают другие возможные способы. Так n-мерная эвклидова геометрия изучает свойства способа характеристики n независимо комбинируемыми величинами, а неэвклидовы геометрии – свойства способов характеристики уже не независимыми, а как-то связанными или ограниченными величинами.

.281. Фиг.32. Ряды множеств.



.282. Функция



16. Сущность математики

1981.05

.283. Теперь, когда мы пришли к выводу, что математика изучает алгоритмы мозга, старый вопрос можно задать в новой форме: «Каким образом получается то, что наука, изучающая алгоритмы мозга, получает столь широкое применение во всех отраслях знания?».

.284. Вы уже слышали ответ на этот вопрос, но я приведу еще один пример из школьной геометрии: доказательство формулы для вычисления объема пирамиды. В этом доказательстве пирамида сначала «разрезалась» на ряд призм и, исходя из суммы объемов призм, сначала вычислялся приблизительный объем пирамиды. Потом показывалось, что, с одной стороны, при уменьшении высоты призм сумма их объемов будет неограниченно стремиться к объему самой пирамиды, а, с другой стороны, к результату, полученному по формуле

.285.

$$V = \frac{1}{3} Lh$$

.286. С точки зрения алгоритмической концепции математики мы здесь имеем дело с двумя алгоритмами. Один алгоритм – как по объемам призм получить приблизительный объем пирамиды. Так что с этой точки зрения разрезание пирамиды на призмы вовсе не просто умозрительная конструкция, а реальный, действующий алгоритм, как получить приблизительный объем пирамиды.

.287. Другой алгоритм закодирован в формуле

.288.

$$V = \frac{1}{3} Lh$$

.289. Это алгоритм манипулирования числами и не имеющий сам по себе никакого отношения к пирамиде.

.290. Сущность данного школьного доказательства с моей точки зрения состоит в том, что устанавливается, доказывается определенная связь между этими двумя алгоритмами, их эквивалентность в некотором смысле.

.291. Благодаря такой установленной эквивалентности, люди получают возможность вместо первого алгоритма использовать второй. И если первый алгоритм, как правило, практически нереализуем (трудно ведь и на самом деле резать пирамиду на очень маленькие призмы, измерять и суммировать их объемы), то второй алгоритм реализуем легко.

.292. Я считаю, что именно в этом, в доказательстве эквивалентности для какой-то цели одних алгоритмов (измерения реальных объектов) другим, более удобным, и кроется секрет того, как наука, изучающая алгоритмы, находит столь широкое, успешное и повсеместное применение во всех областях. В этом и секрет того, как может наука, занимающаяся столь, казалось бы, абстрактными и нереальными вещами, так хорошо описывать действительность.

.293. Из этих представлений об общей полезной задаче математики (подменять неудобные алгоритмы удобными) вытекают и представления о роли математических теорий: их, так сказать, конечная, приносящая пользу, задача состоит в том, чтобы разобраться и доказать, какие алгоритмы, когда, при каких условиях и какими алгоритмами можно подменять. Теории в конечном счете должны изучать различные системы алгоритмов и установить, какие в них существуют связи, закономерности и, следовательно, какие алгоритмы какими можно заменять.

.294. Мне приходилось читать книги, в которых знаменитые математики утверждали, что математика изучает самое себя на том основании, что математик может с бухты барахты из головы придумать какую-то систему аксиом и потом на ней построить целую теорию, не имеющую никакого отношения ни к чему в этом мире.

.295. Что же, попытаемся разобраться в том, что такое аксиомы и аксиоматические теории. Сделаем это на примере изучения аксиоматики системы натуральных чисел. В первой части этого выступления мы построили целиком всю систему натуральных чисел как систему потенциальных продуктов группы алгоритмов, причем алгоритмы эти записали, определили на специальном языке с точностью, достаточной для их моделирования на ЭВМ. Поэтому мы сможем сравнить этот алгоритмический подход с аксиоматическим и, быть может, лучше понять сущность аксиоматического метода.

17. Аксиомы в Эуклидосе

1981.07
(через 2 месяца)

.296. Аксиоматики также могут быть моделированы на Эуклидосе, а аксиомы и всё, что с ними связано, может быть записано на Эуклидоле. Для этого используется другая часть системы программ и языка, или, как это называется в описаниях системы: другой аппарат.

.297. В предыдущем аппарате Эуклидоса мы начали с представления в машине конкретных множеств, имеющих таблицы-номиналии для всех элементов. Потом через определение алгоритма перешли к абстрактным множествам, и, наконец, дошли до неопределенных множеств, для которых неизвестен даже алгоритм, о которых неизвестно вообще ничего, кроме того, что они существуют (и, помните, я говорил {.184}, что не будем спешить называть такие множества бессмыслицей).

.298. Итак, в предыдущем аппарате Эуклидоса мы шли от совершенно определенного ко всё более и более неопределенному. Теперь мы пойдем обратным путем: от совершенно неопределенного ко всё более и более определенному.

(см. рис.33 {.324})

.299. Сначала специальным оператором мы объявим Эуклидосу, что у нас имеются три неопределенных множества – М, С и Р (сравни с рис. {.212}). Эуклидос построит для них таблицы-номиналии, не привязанные пока к какой-либо другой информации.

.300. Обратите внимание: это именно то начало, за которое ратовал Гильберт – «исходными для нас будут объекты, называемые М, С и Р, но что это за объекты – не известно и безразлично».

.301. Теперь при помощи опять каких-то операторов Эуклидола мы объявим Эуклидосу, что все элементы множеств С и Р представляют собой тройки элементов множества М. Это эквивалентно словам «С и Р суть тернарные отношения в М». Эуклидос запомнит эту информацию, и впредь будет контролировать, не сообщаем ли мы ему что-то, противоречащее этому.

.302. Вообще весь наш диалог с Эуклидосом будет заключаться в том, что мы всё новыми операторами будем преподносить ему всё новую и новую информацию о множествах, которые сначала были объявлены как неопределенные, а Эуклидос при прочтении очередного оператора будет кодировать у себя эту информацию, запоминать и проверять, не противоречит ли новая информация предыдущей.

.303. Объявим еще, что в М имеются два особых элемента, которые мы называем 0 и 1 (ноль и единица), и теперь мы готовы к вводу в Эуклидос собственно аксиом.

.304. Всё предыдущее можно считать предварительной информацией; оно соответствует тому, что в традиционной математике скрывается за словами: «Исходными понятиями для нас будут множество М натуральных чисел, два тернарных отношения в нем, и два особых элемента в нем». Как видите, уже за этой фразой скрывается довольно много неоговоренной ни в каких аксиомах информации, которую нам приходится сообщать Эуклидосу несколькими операторами.

.305. Эта исходная информация представлена в Эуклидосе так, как показано на рис. {.324}.

.306. Все множества распределены по уровням, причем точки, которые не могут рассматриваться как множества каких-то элементов, имеют уровень 0.

.307. Построены таблицы для всех конкретных объектов (М, С, Р, 0, 1) и для абстрактных элементов различных множеств.

.308. Ссылки между таблицами, как и в первом аппарате Эуклидоса, кодируют отношения «элемент–множество».

.309. Для объектов С(а) и Р(а) известно и фиксировано также число элементов, равное трем (это тройки).

.310. Провозглашение аксиом теперь будет означать ввод в Эуклидос дополнительной информации об этих исходных множествах, первоначально объявленных как неопределенные.

.311. Можно вводить различную информацию об этих множествах, и возможны различные аксиоматики натуральных чисел. Возьмем какую-нибудь конкретную аксиоматику и попробуем передать Эуклидосу содержащуюся в ней информацию.

.312. Я воспользуюсь теорией ЕА (элементарная арифметика), взятой из книги «Вокруг теоремы Геделя»[7] Карлиса Подниекса, сотрудника вашего ВЦ ЛГУ. Там утверждения аксиом записаны так:

(см. рис.34 {.325})

.313. Рядом дан вариант записи этих же аксиом на Эуклидоле.

.314. Оператор IMP сообщает Эуклидосу, что невозможна в этом поле множеств такая ситуация, чтобы в какой-то сумме (то есть, тройке чисел множеств) элемент 1 был средним, а элемент 0 последним членом.

(см. рис.35 {.326})

.315. Пять следующих аксиом передадим Эуклидосу операторами IF. В операторе IF сначала перечисляются условия, а потом после разделяющего ключевого слова THEN указывается, что, собственно, имеет место при выполнении этих условий.

(см. рис.36 {.327})

.316. Вторая аксиома, например, говорит, что если в двух суммах (в двух тройках) средние члены 1, а последние совпадают, то должны совпадать и первые.

.317. Последнюю аксиому, которая в теории ЕА элементарной арифметики называется не аксиомой, а схемой аксиом, подчеркивая ее особый характер, мы операторами Эуклидола

[7] Подниекс К.М. «Вокруг теоремы Геделя». Латвийский государственный университет им. П. Стучки. Рига, 1981.

кодировать не будем, а как алгоритм доказательства реализуем прямо в тех программах Эуклидоса, которые будут эти доказательства осуществлять.

.318. Эуклидос переведет операторы с аксиомами в свое внутреннее представление и запомнит как информацию о связях, существующих в том поле, множества которого мы сначала объявили как неопределенные.

.319. Что Эуклидос может делать с этой информацией? То же самое, что и человек. Возможны три типа использования информации аксиом:

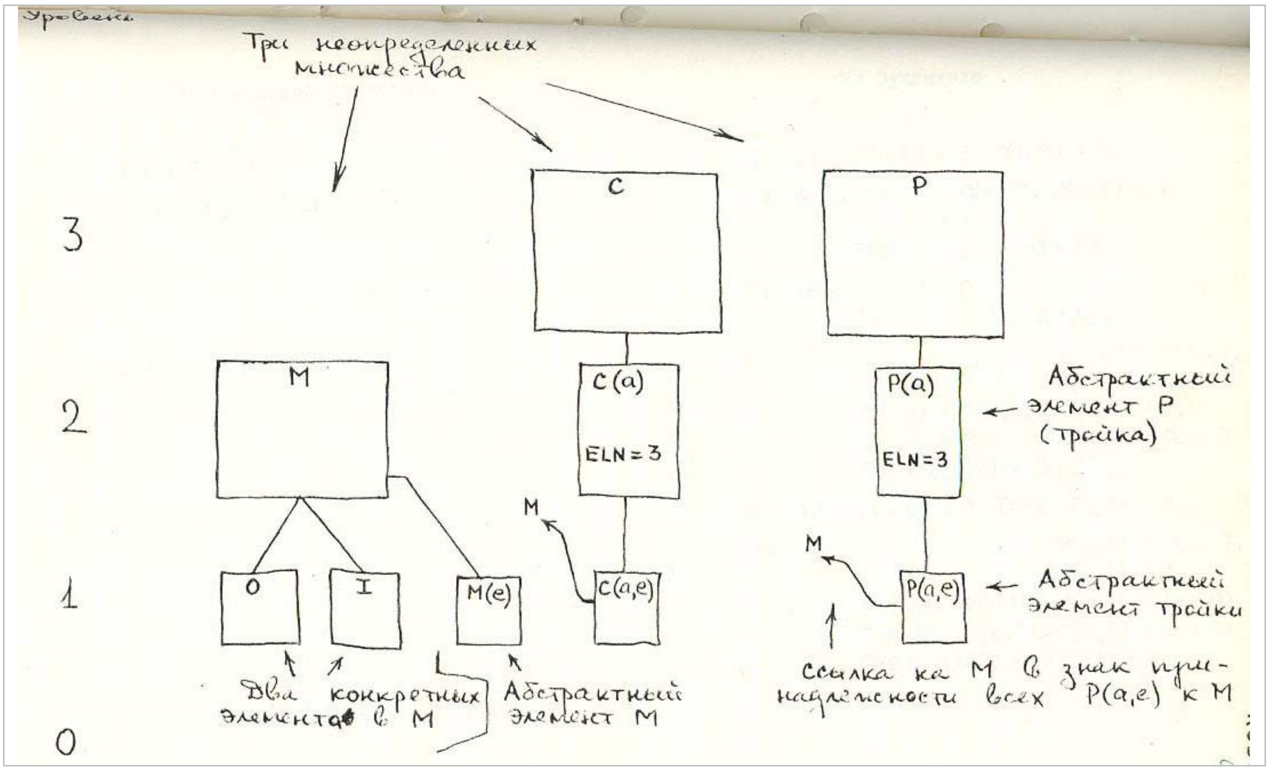
.320. 1) Первое: проверить состоятельность или несостоятельность чужого доказательства.

.321. 2) Второе: доказать или опровергнуть какое-то утверждение.

.322. 3) Третье: находить самому утверждения и доказывать или опровергать их.

.323. В природе все три типа действий осуществляет только мозг математика, двигающего вперед свою науку. Чтобы разобраться в сущности доказательств, нам будет достаточно, если Эуклидос сумеет проверить состоятельность придуманного нами доказательства (то есть, осуществлять только первый тип действий).

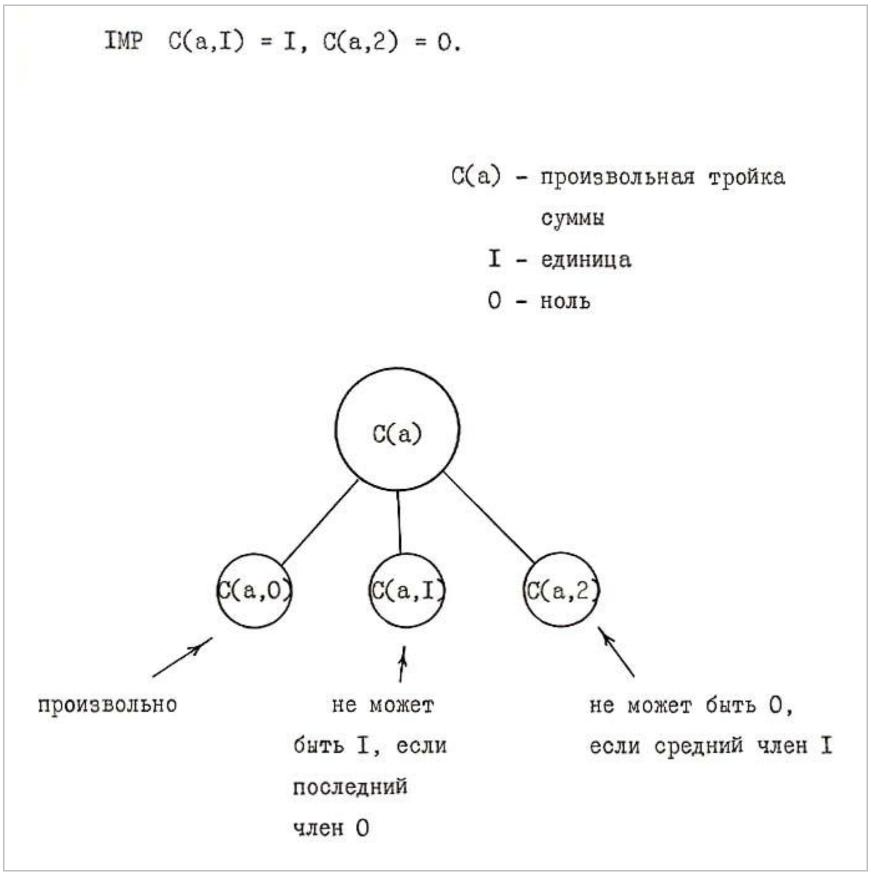
.324. Фиг.33. Кодирование исходной информации:



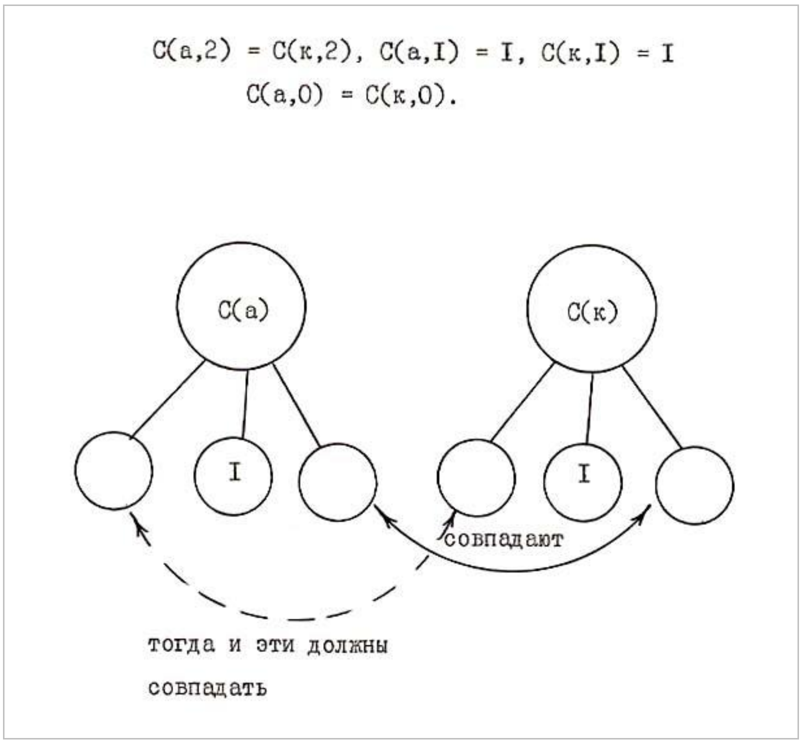
.325. Фиг.34. Аксиомы системы натуральных чисел

В формальной теории ЕА	На Эуклидоле
$\neg(x + I = 0)$	§ AI: IMP C(a,I) = I, C(a,2) = 0.
$(x + I = y + I) \supset (x = y)$	A2: IF C(a,2) = C(к,2), C(a,I) = I, C(к,I) = I THEN C(a,0) = C(к,0).
$x + 0 = x$	A3: IF C(a,I) = 0 THEN C(a,2) = C(a,0).
$x + (y + I) = (x + y) + I$	A4: IF , C(a,I) = C(e,2), , C(e,I) = I, C(p,0) = C(к,2), C(p,I) = I, C(к,0) = C(a,0), C(к,I) = C(e,0) THEN C(a,2) = C(p,2).
$x * 0 = 0$	A5: IF P(a,I) = 0 THEN P(a,2) = 0.
$x * (y + I) = (x * y) + x$	A6: IF , P(a,I) = C(e,2), , C(e,I) = I, P(к,0) = P(a,0), P(к,I) = C(e,0), C(p,0) = P(к,2), C(p,I) = P(a,0) THEN P(a,2) = C(p,2).
$A(0)\ \&\ (\forall x)(A(x) \supset A(x+I)) \supset (\forall y)A(y)$	

.326. Фиг.35. Первая аксиома



.327. Фиг.36. Вторая аксиома



18. Содержательное и формальное

1981.05
(раньше на 2 месяца)

.328. Немножко позже мы сравним доказательство, записанное на Эуклидоле и проверяемое Эуклидосом с формальным доказательством в теории ЕА. Это будет заодно и примером того, как Эуклидос осуществляет доказательство.

.329. Но сначала задумаемся о сущности формальных и содержательных математических теорий, уточним значение слов «формально», «формализм» и «содержательно».

.330. Обычно, противопоставляя интуитивные или содержательные математические теории формальным, говорят о том, что в формальных теориях все шаги доказательств или вывода настолько строго и точно оговорены, что доказательство может, если и не найти, то хотя бы проверить даже ЭВМ.

.331. Если под словом «формализм» понимать только это, то доказательства, записанные на Эуклидоле и проверяемые Эуклидосом, несомненно, тоже формальны. Эуклидол – это язык с самого начала предназначенный для того, чтобы написанные на нем высказывания можно было ввести в ЭВМ и там обработать.

.332. Но, на мой взгляд, имеется еще одно, даже более существенное отличие между содержательной и формальной математической теорией, хотя это отличие обычно остается в тени. И если по строгости правил и возможностям машинной проверки доказательств традиционный математический формализм и формализм Эуклидола были похожи, то здесь они отличаются так же сильно, как содержательное доказательство от формального в математике.

.333. Я начал свое выступление с провозглашения в качестве исходной точки убеждения о том, что мозг – это биологический компьютер. С этой точки зрения любое содержательное доказательство, сделанное мозгом, не может быть ни чем иным, как только вычислительным процессом, в котором на основе какой-то исходной информации по какому-то алгоритму получается какая-то выходная информация.

.334. Как я думаю, основные объекты, которыми мозг оперирует при содержательном мышлении, в том числе при содержательном доказательстве теорем, – это конкретные, абстрактные, неопределенные и т.д. множества (в общем: различные множества) и различная информация о них. Иными словами – я считаю мозг процессором множеств.

.335. С этой точки зрения отличие содержательного и формального состоит не в том, насколько строго оговорены правила, не в том, можно или нельзя эти действия провести на ЭВМ (ведь, по моему убеждению, о котором вы знаете, в мозге вообще нет ничего такого, что принципиально не могла бы проделать ЭВМ). Различие между содержательной и формальной теорией заключается в том, что содержательная теория оперирует множествами (в конечном счете отражающими реальные объекты), а формальная теория занимается механическим преобразованием формул, исчислением предикатов, манипулированием значками на бумаге.

.336. Мы уже третий раз встречаемся с тем, что математика заменяет действия с множествами действиями со знаками на бумаге. Первый раз это было, когда она заменила алгоритмы арифметических операций. Второй раз это было, когда она заменила действия с множествами арифметического решения задачи на формальное решение уравнений. Оба раза эти замены принесли много пользы. Теперь мы снова наблюдаем это же явление: как доказательства, оперирующие множествами, заменяются формальными доказательствами, состоящими в автоматическом преобразовании формул.

.337. Может быть такая замена опять только к лучшему, но всё же никогда не помешает понимать, что всё-таки это вторичные действия, в то время, как существуют еще и первичные, содержательные, оперирующие множествами. Может быть и их стоило бы сделать более точными, строгими, полностью оговоренными и доверить машине?

.338. Эуклидол, и стоящий за ним Эуклидос, система программ, призваны по возможности воспроизвести человеческий вычислительный процесс. То есть: – они призваны моделировать и тем самым сделать предельно строгим содержательное доказательство.

.339. Могут возникнуть сомнения: можно ли всё-таки назвать содержательным доказательством, выводом то, что делает Эуклидос? Ведь Эуклидос отнюдь не система, обладающая полноценным искусственным интеллектом, а всего лишь система, моделирующая один, в общем-то очень узкий аспект мышления. Он только модель одной из сторон мышления. С другой стороны, и формальное вычисление предикатов как-то моделирует, повторяет какую-то сторону мышления. Словом: имеет ли Эуклидос право претендовать на то, что он – модель именно содержательного мышления, в то время, как исчисление предикатов не является такой моделью?

.340. Я считаю, что действия Эуклидоса – это гораздо более адекватная модель содержательного мышления, чем формальная подстановка в формуле одного набора символов вместо другого.

.341. Такая точка зрения вытекает из того постулата, который я принял в начале этого выступления {.68}. Ведь если мозг действительно компьютер, «предназначенный» в основном для обработки информации о внешних объектах, то, во-первых, довольно естественным будет считать, что основной информацией для этого компьютера должны быть сведения о наличии или отсутствии этих объектов и о их идентичности, то есть, об идентичности различных представлений в мозге одного и того же объекта. А именно на обработку такой информации ориентирован весь Эуклидос, как первый, так и второй его аппарат. Во-вторых, если мозг компьютер, то вывод, доказательство не может быть ничем иным, как только вычислительным процессом над как-то закодированной информацией. Мне кажется очевидным, что в мозге информация о внешнем мире не может кодироваться чем-то типа математических формул и символов. Но ведь как-то кодироваться она всё же должна и при содержательном мышлении. Мне кажется, что трудно найти более подходящий для биологического компьютера способ кодирования информации, чем тем или иным способом запомненные сведения о наличии, отсутствии и идентичности объектов.

.342. И если обработку информации такого типа в мозге мы называем содержательной, то почему то же самое не говорить и об Эуклидосе?

19. Доказательства в Эуклидосе

1981.07
(через 2 месяца)

.343. Теперь рассмотрим какое-нибудь простое доказательство.

.344. Фиг.37. Формальное доказательство

	$0 + 0 = 0$	(частный случай аксиомы Е3 $x + 0 = x$)
$A(x)$:	$0 + x = x$	(гипотеза)
	$0 + (x + I) = (0 + x) + I$	(частный случай аксиомы Е4 $x + (y + I) = (x + y) + I$)
	$0 + x = x \supset (0 + x) + I = x + I$	(свойство равенства)
	$(0 + x) + I = x + I$	(MODUS PONENS $\frac{A,\ A \supset B}{B}$)
$A(x + I)$:	$0 + (x + I) = x + I$	(транзитивность равенства)
	$A(x) \supset A(x + I)$	(теорема дедукции)
	$(\forall x)(A(x) \supset A(x + I))$	(правило обобщения $\frac{C(x)}{(\forall x)\ C(x)}$)
	$(\forall y)\ A(y)$	(схема индукции $A(0)\ \&\ (\forall x)(A(x) \supset A(x+I)) \supset (\forall y)\ A(y)$)
или	$0 + x = x$	

.345. Здесь дано формальное доказательство теоремы $0 + x = x$ в формальной теории ЕА. Это доказательство взято из той же книги Подниекса «Вокруг теоремы Геделя»[8].

.346. Фиг.38. Содержательное доказательство

ТЕОРЕМА. $0 + x = x$ для любого x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что условие выполняется для какого-то x:

$$0 + x = x$$

Посмотрим, чему тогда будет равна сумма $0 + (x + I)$.

По аксиоме А4:

$$0 + (x + I) = (0 + x) + I$$

Согласно предположению $0 + x = x$. Подставим в предыдущем выражении x вместо $0 + x$:

$$0 + (x + I) = x + I$$

Следовательно условие теоремы выполняется и для $x + I$, если оно выполняется для x.

Согласно аксиоме А3 это условие выполняется для $x = 0$:

$$0 + 0 = 0$$

По индукции заключаем, что оно выполняется для всех x.

.347. Здесь дано аналогичное содержательное доказательство.

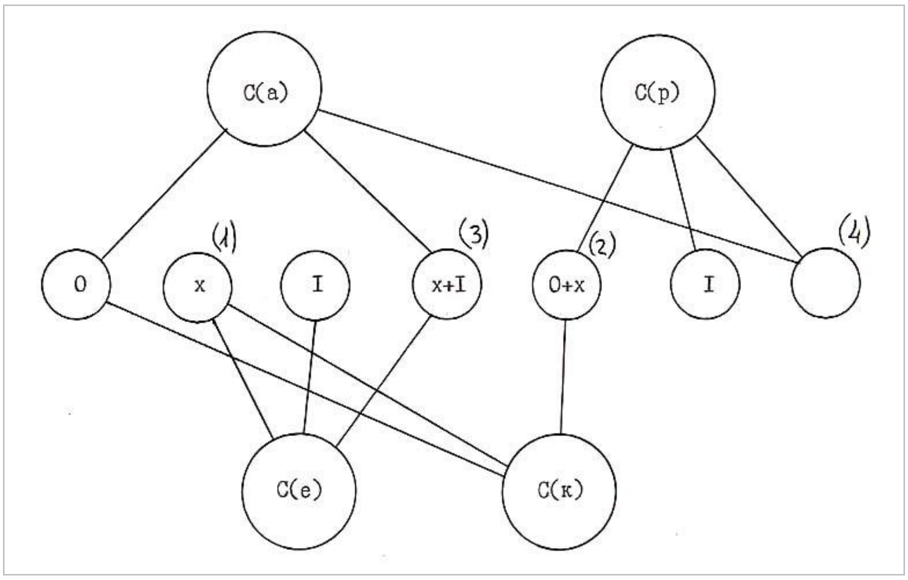
[8] Подниекс К.М. «Вокруг теоремы Геделя». Латвийский государственный университет им. П. Стучки. Рига, 1981.

.348. Фиг.39. Доказательство на Эуклидоле

```
I.§.    CT   C(a,0)=0, C(a,I)=C(e,2),
                       C(e,I)=I,
             C(p,0)=C(к,2), C(p,I)=I,
             C(к,0)=C(a,0), C(к,I)=C(e,0) %

2.§.    BУ  A4:   C(a,2) = C(p,2) %

3.§.    EC   C(к,I) = C(p,0)  THEN  C(e,2) = C(p,2) %

4.§.    MK   C(к,I) = 0 %

5.§.    BУ  A3:   C(к,2) = 0  %

6.§.    INDUCT :   C(к,2) = C(к,I)   %
```

.349. На этом рисунке приведено это доказательство на Эуклидоле. По оператору CT Эуклидос должен построить такое поле множеств:

.350. Фиг.40. Структура множеств



.351. По второму оператору он должен проверить, что это поле множеств действительно соответствует условиям аксиомы A4 и фиксировать совпадение сумм C(a) и C(p). Теперь полностью завершено построение поля множеств в таком виде, как это изображено на рис. {.350}.

.352. Прежде, чем разбирать собственно доказательство, переведем, так сказать, нашу теорему на язык Эуклидоса, разберемся, что она означает в понятиях этого поля множеств. Теорема $0 + x = x$ здесь означает, что в тройке C(k) второй и третий член всегда будут совпадать, если, конечно, справедливы предварительно объявленные аксиомы и принцип индукции, утверждающий, что они совпадают всегда, если совпадают для суммы 0+0 и из предположения, что они совпадают для суммы 0+x или C(k) следует, что они совпадают и для суммы 0+(x+1) или суммы C(a).

.353. Значит, для того, чтобы Эуклидос («знающий» о принципе индукции) признал состоятельным наше доказательство, мы должны «убедить» его в справедливости двух утверждений:

.354. 1) Первое: если предположить совпадение множеств (1) и (2) (теорема справедлива для C(k)), то совпадают множества (3) и (4) (теорема справедлива для C(a)).

.355. 2) Второе: если множество (1) – это 0, то множества (1) и (2) совпадают.

.356. По третьему оператору нашего доказательства на Эуклидоле Эуклидос должен временно изменить структуру C(k), подставив вместо множества (2) множество (1) (это есть предположение, что $x = 0+x$). После этого он должен сравнить структуры C(e) и C(p), убедиться, что теперь первые два их элемента совпадают, фиксировать совпадение третьих элементов (3) и (4) в этих структурах и, значит, выполнение условий теоремы для суммы C(a) при предположении выполнения их для суммы C(k).

.357. По четвертому оператору Эуклидос должен подставить вместо элемента x элемент 0, а по пятому оператору проверить, что ситуация с суммой C(k) после такой подстановки действительно удовлетворяет условиям аксиомы A3 и, следовательно, совпадает первый и третий член тройки (а так как первый – это 0, то и третий 0). И, наконец, по шестому оператору Эуклидос должен проверить, что, по схеме индукции (которая, как мы договорились, «вшита» непосредственно в его программы), второй и третий члены тройки C(k) должны совпадать (так как они совпадают, если равны элементу 0 и из предположения, что они совпадают для какого-то x следует, что они совпадают и для x+1).

.358. Такова идея (повторяю: идея) машинных доказательств при помощи программы, разбирающейся в структурах множеств. Состав операторов, как тех, которые кодируют аксиомы, так и тех, которые кодируют ход доказательства, может еще долго шлифоваться и улучшаться.

.359. Наиболее слабым местом этого машинного доказательства является правило индукции, «встроенное» непосредственно в программы Эуклидоса. Беда здесь даже не в том, что мы реализовали индукцию непосредственно программой (в принципе может она быть кодирована и аксиомой, но это сильно осложнило бы машинную реализацию всего этого). Беда здесь в том, что совсем не очевидно, почему из того, что условие выполняется и для x+1, если оно выполняется для x, должно следовать, что оно выполняется всегда. Ведь элемент 1 в исходной схеме {.324} был объявлен как в общем-то рядовой элемент множества M, и под x+1 вовсе не предполагается следующий элемент после x.

.360. Эти операторы, кодирующие аксиомы и доказательства, я не собираюсь реализовать на ЭВМ в таком виде, в каком их только что преподносил вам. Здесь я хотел дать сравнение традиционного формализма и столь же строгого и точного метода, но не формального, оперирующего со значками на бумаге, а содержательного, оперирующего множествами. Поэтому я аксиомы и методы формальных доказательств переводил один к одному во внутримашинные структуры Эуклидоса.

.361. Но я думаю, что фактически здесь не следует идти по пути такого перевода один к одному. Надо проектировать аппарат машинного моделирования аксиоматик и доказательств, исходя из внутренних соображений об удобстве машинного представления информации и машинной реализации аппарата.

.362. Так, например, как я думаю, следует вводить элементы 0 и 1 не просто как какие-то элементы множества M, а как элементы M(0) и M(1), то есть, как первые два элемента множества. Тогда Эуклидос будет, так сказать, «иметь представление» о порядке элементов в M и естественным станет принцип индукции. Это ничуть не противоречит идее о моделировании содержательной теории натуральных чисел: ведь человек, несомненно, имеет представление об упорядоченности этого множества.

.363. Далее, мне кажется, что не следует гнаться за тем, чтобы информация, содержащаяся в аксиомах, была минимальной. Вместо аксиом, говорящих только о связях между x и x+1, можно вводить сразу избыточные аксиомы о коммутативности и ассоциативности сложения и умножения. Это тоже больше соответствует исходной точке интуитивных представлений. Многие содержательные теории начинают именно с таких избыточных аксиом.

.364. Построение подобного машинного интерпретатора содержательных аксиоматик и доказательств и соответствующего входного языка – это большая работа, сравнимая с разработкой, например, языка PL/I и компилятора с него. Я нахожусь лишь в самом начале этой работы и хотел вам показать не готовую, законченную разработку, а основную идею проекта.

.365. Эта идея состоит в том, чтобы машина оперировала не математическими знаками, а структурами множеств, и до предела строго были оговорены не правила преобразования формул, а правила преобразования таких структур.

20. Сущность аксиоматик

1981.05
(раньше на 2 месяца)

.366. Теперь, прежде чем перейти к заключительной части моего выступления, попытаемся осмыслить, что же из себя представляет аксиоматический метод с точки зрения той позиции, о которой я вам рассказывал.

.367. С этой точки зрения аксиоматический метод – это метод, при котором исследуемые множества первоначально объявляются как неопределенные, потом дается какая-то исходная, фрагментарная информация о них (аксиомы), а дальнейшие свойства объектов вычисляются (я употребляю именно это слово: «вычисляются»), исходя из этой первоначальной информации.

.368. Мы рассмотрели построение системы натуральных чисел двумя способами. При первом способе {.196} мы просто записали группу алгоритмов на языке, похожем на языки программирования, и рассуждали о продуктах этих алгоритмов так, как программисты рассуждают о том, что могут сделать их программы. При втором способе мы использовали аксиоматический метод {.325}.

.369. Можете убедиться, что свойства исследуемого объекта при обоих способах получаются одинаковыми.

.370. Итак, оказалось, что к системе натуральных чисел можно идти двумя различными путями и в конце концов мы приходим к одним и тем же утверждениям о свойствах этой системы чисел. Разница только в том, что при первом, алгоритмическом подходе очевидно и подчеркнуто то, что речь идет о потенциальных объектах, несуществующих в виде материальных вещей, а при втором, аксиоматическом подходе эти объекты выглядят актуально существующими.

.371. Теперь довольно естественно возникает вопрос: который из этих путей следует считать основным? Которому отдавать предпочтение? И я, ни минуты не сомневаясь, отвечаю: первый путь, потому что он начинается с реальных, материальных вещей, он объясняет, как и почему вообще у людей возникло понятие числа, он дает ответ на вопрос: «а что из себя вообще представляют эти таинственные объекты, называемые числами?».

.372. А второй путь, аксиоматический, – это всего лишь вспомогательный. Я не призываю забыть о нем, нет, он может быть использован и впредь рядом с первым. Он остается единственным, если нет еще возможности подойти к той или иной системе первым путем: ведь не все еще алгоритмы мышления можно описать на языке типа Эуклидола.

.373. Но всё же ореол строгости и абсолютного превосходства аксиоматического метода значительно рассеялся, по крайней мере в моих глазах, после осознания его сущности. Почему это о системах потенциальных продуктов алгоритмов, то есть, программ, мы должны рассуждать на основе каких-то фрагментарных сведений, а не на основе полного представления о работе этого алгоритма подобно тому, как программисты рассуждают о своих программах?

.374. На протяжении долгих веков первый, алгоритмический путь к числам был невозможен. Поэтому и господствовал аксиоматический метод. Но наш век положение изменил. По крайней мере в отношении чисел математика уже может пользоваться и первым путем, и я считаю, что она должна им пользоваться, пусть даже рядом с аксиоматическим методом.

21. Непротиворечивость теорий

1981.05

.375. Сравним теперь оба пути с точки зрения надежности. Следуя по первому пути, когда мы записали на Эуклидоле ряд алгоритмов и потом рассуждаем о том, какие продукты они могли бы построить, не видно, что могло бы угрожать достоверности наших рассуждений. Вопрос о непротиворечивости математических утверждений тогда мог бы интересовать математиков не намного больше, чем он занимает программистов, утверждающих что-то о своих программах.

.376. Применение второго пути, аксиоматического метода, сразу вносит элемент риска. Мы объявляем о потенциальных продуктах разных алгоритмов как об актуально существующих бесконечных множествах. Уже сам этот первый шаг мне кажется достаточно рискованным. Далее вводятся аксиомы, которые провозглашают независящие друг от друга утверждения. Сразу появляется вопрос: не приведут ли эти утверждения в конце концов к каким-то противоречиям.

.377. Знаменитый Гильберт пытался доказать непротиворечивость всей аксиоматически построенной математики путем полной ее формализации, где формализация понималась как автоматическое преобразование формул.

.378. Не менее знаменитый Гедель показал, что это невозможно.

.379. Я пока не знаю, можно ли выводы Геделя отнести и к тому вычислительному процессу, которым я предложил заменить традиционный формализм, или же они относятся только к формальным преобразованиям математических знаков. Допустим худший вариант: что невозможно доказать непротиворечивость не только формальных, но и содержательных рассуждений, закодированных на Эуклидоле и выполненных машиной.

.380. Тогда выводы Геделя относятся целиком ко всему аксиоматическому методу, ко второму пути к математическим системам.

.381. Но совершенно ясно, что они не могут относиться к первому пути. Не может быть противоречивой программа. Она может содержать ошибки, то есть, делать не то, что программист хотел бы, чтобы она делала. Но она в принципе не может быть противоречивой.

.382. И принципиально не могут быть противоречивыми собственно алгоритмы, которыми мы определили систему натуральных чисел. Могут быть противоречивыми какие-то утверждения о них, да. Аксиомы – один тип таких утверждений, и только поэтому они и могут быть противоречивыми.

.383. Поэтому наиболее надежным путем, гарантирующим отсутствие противоречий, мне представляется создание, образно говоря, листингов алгоритмов математики вместо систем аксиом.

22. Алгоритмы математики

1981.05

.384. Вернемся еще раз к математике, которая якобы изучает самое себя. В нашем примере с двумя путями к натуральным числам {.368} мы видели, что в аксиоматике чисел объявлялись свойства некоторой системы алгоритмов. Это совпадение свойств, объявленных в аксиомах, со свойствами алгоритмов, работающих с информацией о внешнем мире, это совпадение и создает мостик от якобы совершенно произвольных аксиом к реальному миру. Только благодаря этому совпадению «произвольные» (в кавычках) аксиомы и построенные на них теории могут найти практическое применение в изучении мира.

.385. Конечно, математик может провозгласить в аксиомах какие только ему вздумается свойства своих неопределенных множеств. Но всегда или почти всегда можно будет подобрать алгоритмы работы с множествами, имеющие такие же свойства. И если найдут применение эти алгоритмы, то, значит, нашла применение и теория математика, придуманная им совершенно из головы.

.386. Но, если математику всё же удастся придумать такие свойства, закодированные в аксиомах, которыми не может обладать никакой алгоритм, то такая математическая теория никогда не найдет никаких применений, потому что не будет тогда мостика, ведущего от аксиом в реальный мир.

.387. Таковы в общих чертах мои взгляды на природу науки математики. Изучает она алгоритмы, даже если это происходит при помощи аксиоматического метода.

.388. В первую очередь это алгоритмы манипулирования конкретными множествами вроде тех, которыми мы определили систему натуральных чисел {.193}. Это первичные алгоритмы, и благодаря им математика имеет связь с внешним миром.

.389. Во вторую очередь это вторичные алгоритмы манипулирования цифрами и математическими знаками. На эти алгоритмы ставит акцент формализм и, например, конструктивная математика.

.390. В третью очередь это алгоритмы обработки информации о множествах вроде тех, по которым Эуклидос может обработать введенные в него аксиомы. Эти алгоритмы скрываются за дедуктивными суждениями при аксиоматическом подходе.

.391. И везде единственное реальное, к чему можно отнести утверждения математики, как можно материалистически интерпретировать ее приемы – это алгоритмы мозга.

.392. Итак, начав с попытки объяснить возникновение понятия натурального числа, я в конце концов пришел к убеждению, что вообще вся роль и сущность науки математики понимается по крайней мере большинством математиков и философов не совсем верно или же они понимают ее не до конца и не отчетливо.

.393. Отсюда легко следовал вывод, что по причине неясного понимания природы этой науки, по причине расплывчатого определения ее предмета (или вообще отсутствия такового определения) в науке математике в системах понятий, терминов, в методах, в подходе и даже иногда в выводах очень многое сделано не так, как было бы логично и естественно делать, если бы во время создания этой науки присутствовало бы ясное понимание ее природы и предмета.

23. Преобразование математики

1981.07
(через 2 месяца)

.394. Так я оказался перед выводом, что здание математики надо преобразовать согласно более современным, как я считаю, представлениям о ее природе.

.395. И я предлагаю математикам осуществить перестройку своей науки. Сейчас я попытаюсь по пунктам изложить основные направления такого преобразования:

.396. 1) Первое: отказаться от взгляда, что аксиоматический метод является самым лучшим, абсолютным и точным. Я не предлагаю изгнать аксиоматический метод из математики. Нет, я предлагаю только осознать его сущность, все его достоинства и недостатки, и отдать ему должное, но не всё.

.397. 2) Второе: я предлагаю рядом с аксиоматическим способом развить и применять способ описания математических объектов и явлений при помощи точного определения основополагающих алгоритмов, описанных на языке типа того, на котором мы записывали алгоритмы чисел {.205}.

.398. 3) Третье: я предлагаю отказаться от мнения, что традиционный формализм, автоматическое преобразование формул, является главным средством достижения абсолютной точности и строгости математических рассуждений.

.399. 4) Четвертое: вместо формализма я предлагаю развить и применять методы компьютерной работы со структурами множеств, подобные тем, идею которых мы видели при разборе аксиоматики натуральных чисел в Эуклидосе {.326}.

.400. 5) Пятое: я предлагаю в некоторой степени отказаться от традиций математической символики и как при реализации альтернативы аксиоматического метода, так и при реализации альтернативы формализма применять машинно ориентированные языки типа Эуклидоса и машинное моделирование всех производимых действий по образцу Эуклидоса.

.401. Я предлагаю использовать в математике современную компьютерную технику не только для вычислений, но и для моделирования математического и околоматематического мышления и тем самым для более глубокого изучения и понимания сущности этих явлений.

.402. Вы видели описания некоторых алгоритмов математики на языке, похожем на Ассемблер и убедились, что всё это очень напоминает машинные программы для ЭВМ.

.403. Самым фундаментальным и исчерпывающим описанием программы я считаю ее листинг, причем не на языке высокого уровня, а на языке типа Ассемблера. Аналогично те описания алгоритмов чисел, которые вы недавно видели, я считаю наиболее фундаментальными и исчерпывающими. Подобные описания, насколько мне известно, до сих пор в математике не использовались.

.404. Я предлагаю: при описании математических объектов впредь использовать подобные средства, подобный язык, в первую очередь для точного определения (именно определения) объекта исследований, исходных понятий, таких, как числа, операции, функции.

.405. В программировании Ассемблер, хоть и самый фундаментальный и точный язык, но далеко не всегда самый удобный. Аналогично дела обстоят и с нашими алгоритмами.

.406. Второе, что я предлагаю в рамках создания этого языка математики – это на базе такого аппарата Эуклидола, какой вы видели, создать алгоритмические языки более высокого уровня подобно тому, как на базе машинного языка создано много языков программирования высокого уровня. Причем как программу на языке PL/I можно перевести на Ассемблер для более детального разбора какого-нибудь места, так в том гипотетическом «алгоритмическом языке математики» всегда должна быть возможность легко перейти по необходимости от более «высокого» (и удобного) уровня на более «низкий» (но зато более точный и исчерпывающий) уровень и наоборот.

.407. Аналогично во втором аппарате Эуклидола, кодирующем аксиомы и доказательства, мы видели, что запись этой информации получилась значительно более громоздкой, чем при формализме и очень неудобочитаемой для человека (но зато более простой для машинного транслятора и интерпретатора). Здесь тоже ничто не мешает построить более высокие уровни языка, но при одном условии: что всегда остается возможность по необходимости опуститься к более низким, более неудобным, но зато более точным уровням.

.408. Вот в таком направлении я предлагаю преобразовать современную математику. Я не знаю, сможет ли на это повлиять лично моя деятельность, но я уверен, что рано или поздно математика будет преобразована, ибо уверен я, что понимаю ее природу в основных чертах правильно.

.409. Попытаемся теперь осмыслить, что с философской точки зрения означает введение тех реформ в математику, которые я предлагаю.

.410. Все мои предложения не что иное, как попытка поставить математику на материалистические основания, вскрыть за «идеальными», абстрактными, как будто нереальными вещами объекты материальные, физические, реальные. И используются для этого концепции материалистической теории отражения человеком реального мира. Такова философская сущность моих предложений. Образно говоря, это вторжение в математику материализма, рассеивающего ее идеалистический ореол таинственности.

24. Проблема континуума

1981.05
(раньше на 2 месяца)

.411. Как вы убедились, материалистический подход к математике, как правило, не угрожает содержанию математических фактов. Производной от x^2 как была функция $2x$, так и осталась. Речь обычно идет только об истолковании этих фактов, и, возможно, о переходе к несколько другой терминологии и символике.

.412. Но в отдельных, в общем-то очень малочисленных местах, новый подход приводит к изменению конечных выводов. Это, конечно, такие места, которые не имеют (и не могли иметь) практических приложений.

.413. В заключении своего выступления я приведу пример такого случая. Разберем с алгоритмической точки зрения знаменитый диагональный процесс Кантора.

.414. Фиг.41. Теорема Кантора

ТЕОРЕМА. Пусть X и У - два произвольных непустых множества, удовлетворяющих тому единственному условию, чтобы У состояло более чем из одного элемента. Множество всех различных отображений множества X в множество У имеет мощность большую, чем мощность множества X.

.415. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $У^X$ множество всех отображений. Мы должны доказать:

I) Существует I-I отображение X на подмножество $У^X$.

2) Не существует I-I отображения X на все $У^X$.

.416. I) Выберем в У два различных y' и y'' и для каждого x_0 из X построим отображение f_{x_0} так: образ данного x_0 есть $f_{x_0}(x_0) = y'$, а образ всякого x, отличного от x_0 есть $f_{x_0}(x) = y''$. Различным элементам x_I, x_2 соответствуют различные отображения:

$$f_{x_1}(x_I) = y'$$
$$f_{x_2}(x_1) = y''$$

Установлено I-I соответствие между X и частью $У^X$.

.417. 2) Предположим, что существует I-I соответствие между X и $У^X$. Обозначим через f^{ξ} тот элемент $У^X$, который в силу этого соответствия отвечает элементу ξ из X.

.418. Рассмотрим произвольный ξ из X. Образ этого элемента при отображении f^{ξ} есть элемент $f^{\xi}(\xi)$ из У. Определим теперь $f(\xi)$ положив $f(\xi)=\eta$, где η - произвольный элемент У, выбранный под единственным условием, чтобы он был отличен от $f^{\xi}(\xi)$.

.419. Построенное таким образом отображение f отлично от всех отображений f^{ξ}. Если бы f совпадало с некоторым определённым f^{ξ}, то для элемента ξ из X мы имели бы $f(\xi) = f^{\xi}(\xi)$, вопреки определению отображения f.

.420. Теорема этим доказана.

.421. Вот теорема Кантора, о которой академик Александров, человек № 1 в Советском Союзе в области теории множеств, говорит, что она (цитирую): «*принадлежит к числу замечательнейших предложений теории множеств*».

.422. Она утверждает, что между множествами X и Y^X невозможно установить взаимно однозначное соответствие, и что, следовательно, мощность множества Y^X больше, чем мощность множества X. В то же время другие теоремы утверждают, что между множествами, например, X и XY (декартово произведение множеств X и Y) такое соответствие установить можно (если X и Y счетные) и, следовательно, мощности X и XY равны.

.423. При этом мощности множеств интерпретируются как обобщение понятия количества элементов в множествах.

.424. Мощность множества Y^X называется мощностью континуума. Всё это породило так называемую континуум-проблему, которая заключается в вопросе, существует ли какая-нибудь промежуточная мощность между мощностью счетного множества и мощностью континуума. Эта проблема почти столетие мучила сотни математиков, пока Коэн не пришел к выводу, что ответ на этот вопрос зависит от исходных предположений или от аксиоматики.

.425. Теперь рассмотрим эти вопросы в свете алгоритмических концепций математики, а именно, сравним соображения о количестве потенциальных элементов в множествах X, XY и Y^X.

.426. В качестве X для определенности возьмем типичное счетное множество – натуральные числа или нашу квантолину. В качестве Y возьмем множество, состоящее из двух элементов: чисел 0 и 1.

.427. С нашей точки зрения множество X или квантолина – это потенциально бесконечный ряд изоквант, создаваемых по определенному алгоритму. Но при любой конкретной реализации этого алгоритма над каким-то полем конкретных множеств вместо абстрактной квантолины становится конкретное множество с конечным числом элементов. Бесконечность множества X означает только то, что выполнение алгоритма всегда может быть еще продолжено.

.428. Множество XY с нашей точки зрения не что иное, как потенциальные продукты другого алгоритма, который берет поочередно все продукты алгоритма X и строит их комбинации с 0 и 1.

.429. Если вы сделаете конкретную реализацию алгоритма X, а потом реализуете алгоритм XY над его конкретным продуктом, то всегда продуктов алгоритма XY будет в два раза больше, чем продуктов алгоритма X, и никогда вы не сможете установить взаимно однозначное соответствие между их продуктами.

(см. рис.42 {.448})

.430. Вы можете сколько угодно долго продолжать выполнение алгоритма X (приближаясь, так сказать, к бесконечности), но ничего в этой картине не изменится ни на йоту.

.431. Поэтому нам надо либо вообще отказаться от утверждения, что потенциальные множества X и XY равномощны, либо оговорить, что под этими словами мы понимаем то, что какой бы наперед заданный элемент из XY мы не взяли, мы сможем алгоритм X еще продолжить достаточно далеко, чтобы построить и тот элемент, который соответствует заданному из XY.

.432. Множество X^Y с нашей точки зрения тоже не более, чем потенциальные продукты алгоритма, создающего отображения, то есть множества пар элементов из X и Y.

.433. Как и в предыдущем случае, при любой конкретной реализации алгоритма, элементов в множестве Y^X будет больше, чем в X, и никогда вы не сможете установить взаимно однозначное соответствие между конкретными продуктами алгоритмов X и Y^X.

.434. Если же мы договоримся считать, что слова о взаимно однозначном соответствии означают, что для любого наперед заданного элемента из Y^X можно продолжить алгоритм X до тех пор, пока не будет построен соответствующий элемент из X, то, как и в первом случае, вы такое соответствие сможете установить всегда, вопреки Кантору.

.435. Нет принципиального различия между множествами XY и Y^X. Правда, элементов во множестве Y^X всегда будет больше, чем в XY, но если это и есть искомое принципиальное различие между множествами XY и Y^X, то оно существует уже между множествами X и XY.

.436. Итак, если понимать мощность множеств как обобщение понятия числа элементов, как рассуждения о потенциальном числе элементов в продуктах алгоритмов или как соображения о возможностях установления взаимно однозначного соответствия между этими продуктами, то нет никакой разницы между мощностями множеств XY и Y^X, и все разговоры о различающихся мощностях континуума и счетного множества бессмысленны.

.437. Обратите внимание на то, что эти рассуждения в духе Кантора о различающихся мощностях не имеют и никогда не имели никаких практических приложений. Это и не удивительно.

.438. Но если так, то что же доказал Кантор в одном из «самых замечательных предложений теории множеств»? Иными словами, почему диагональный процесс Кантора можно провести над множеством Y^X и нельзя провести над множеством XY? Секрет здесь в том, что число элементов в каждом элементе множества Y^X (число пар) растет пропорциально числу элементов в X, но не зависит от X ни во множестве XY, ни, например, во множестве X^Y. Это и есть то различие, которое обнаружил Кантор. Но оно не имеет ни малейшего отношения к мощности множеств, к соображениям о числе элементов или о возможности установления взаимно однозначного соответствия между элементами бесконечных множеств.

.439. Но, повторяю, такие расхождения с мнением традиционной математики чрезвычайно редки по сравнению со всей массой математических истин.

.440. Во время первого прочтения этого доклада в ИЭВТ один сторонник теоремы Кантора, очень любящий хвастаться тем, что его «здравый смысл» его часто подводит, отказывался рассматривать множества X, XY и Y^X как потенциальные продукты процессов и настаивал на том, что в доказательстве Кантора, мол, нет никаких логических ошибок.

.441. Этим он вынудил меня назвать по имени ту логическую ошибку, которая содержится в доказательствах классической теории множеств. Древние логики называли эту ошибку *Homonytia*. Она заключается в том, что одинаковыми словами обозначаются разные вещи.

.442. Ошибка *Homonytia* в доказательствах традиционной теории множеств появляется таким образом, что при доказательстве равномощности, например, множеств X и XY используется одно понимание «установления взаимно однозначного соответствия», а в доказательстве Кантора – другое понимание. Таким образом в целом в теории две разные вещи обозначаются одинаковыми словами и нарушен первый закон логики – закон тождества.

.443. В традиционной теории множеств везде, где доказывается равномощность двух бесконечных множеств (например, множества всех натуральных чисел и множества четных чисел), используется такое понимание взаимно однозначного соответствия, согласно которому оба ряда можно продолжать сколь угодно долго, пока не найдется во втором из них элемент, соответствующий любому наперед заданному элементу из первого множества. Это понимание установления соответствия отвергает всякие соображения о скорости построения этих рядов, например, такие соображения, как то, что натуральный ряд из p членов будет содержать только $p/2$ четных чисел.

(см. рис.43 {.449} и рис.44 {.450})

.444. Доказательство Кантора же состоятельно только при таком понимании соответствия, которое учитывает скорости построения обоих рядов и при котором выполняется условие, что если в множестве X p элементов, то и в каждом отображении будет p элементов (а всего, следовательно, будет y^p отображений).

(см. рис.45 {.451} и рис.46 {.452})

.445. Если это условие у теоремы Кантора отнять, то она становится просто несостоятельной, так как в этом случае диагональный процесс вообще не может быть закончен и не может быть построено новое отображение, отличающееся от всех «старых» отображений.

.446. Это пример того, как недостаточно четкое определение предмета исследований ведет к элементарным логическим ошибкам в традиционной математике. Такое, чтобы одновременно выполнялись два требования:

а) доказательство Кантора состоятельно;

б) в теории нет ошибки *Homonytia*,

.447. такое возможно было бы только тогда, если в множестве Y^X могло быть одинаковыми число элементов в каждом отображении (p) и число самих отображений (y^p, если в множестве Y y элементов). Вряд ли кто-нибудь когда-нибудь сможет меня убедить в том, что может иметь место $y^p = p$ при $y > 1$ и $p > 1$.

.448. Фиг.42. Сравнение алгоритмов

x	y	xy	y^x
0	0	0-0	0-0 I-0 2-0 3-0
I	I	0-I	0-0 I-0 2-0 3-I
2		I-0	0-0 I-0 2-I 3-0
3		I-I	0-0 I-0 2-I 3-I
		2-0	0-0 I-I 2-0 3-0
		2-I	0-0 I-I 2-0 3-I
		3-0	0-0 I-I 2-I 3-0
		3-I	0-0 I-I 2-I 3-I
			0-I I-0 2-0 3-0
			0-I I-0 2-0 3-I
			0-I I-0 2-I 3-0
			0-I I-0 2-I 3-I
			0-I I-I 2-0 3-0
			0-I I-I 2-0 3-I
			0-I I-I 2-I 3-0
			0-I I-I 2-I 3-I
Число элементов = 4		Число элементов = 8	Число элемен-тов = I6

.449. Фиг.43. Понятие о зависимом соответствии

Построены только те члены второго ряда, которые имеются в уже построенной части первого ряда (второй ряд строится из первого)

Натуральные числа	Четные числа
I	2
2	4
3	6
4	...
5	
6	
...	

Оба ряда можно бесконечно продолжать, но соответствия установить нельзя.

.450. Фиг.44. Понятие о независимом соответствии

Построены все члены второго ряда до того, который соответствует последнему построенному в первом ряде (ряды строятся независимо, поддерживая соответствие).

Натуральные числа	Четные числа
I	2
2	4
3	6
4	8
5	IO
6	I2
...	...

Оба ряда можно бесконечно продолжать, сопоставляя очередные члены. Соответствие установить можно.

.451. Фиг.45. Теорема Кантора при зависимом соответствии

Построены все отображения уже созданных элементов из X (второе множество строится из первого).

X	y^X
0	0-0 I-0 2-0 ...
I	0-0 I-0 2-I
2	0-0 I-I 2-0
...	0-0 I-I 2-I
	0-I I-0 2-0
	0-I I-0 2-I
	0-I I-I 2-0
	0-I I-I 2-I
	...

Диагональный процесс закончен (доведен до последнего созданного элемента X)

Доказательство Кантора состоятельно, но используется концепция зависимого соответствия. В теории присутствует ошибка Homonymia.

.452. Фиг.46. Теорема Кантора при независимом соответствии

Построены только отображения первых трех элементов X (множества строятся независимо, поддерживая соответствие).

X	y^X
0	0-0 I-0 2-0 ...
I	0-0 I-0 2-I
2	0-0 I-I 2-0
3	0-0 I-I 2-I
4	0-I I-0 2-0
5	0-I I-0 2-I
6	0-I I-I 2-0
7	0-I I-I 2-I
...	...

Диагональный процесс не закончен (не доведен до последнего элемента из X), но по горизонтали элементы уже исчерпаны.

Отображение, отличающееся от всех перенумерованных невозможно построить. Доказательство несостоятельно.

25. Сходства и различия

1981.07
(через 2 месяца)

.453. Попытаемся теперь осознать и осмыслить роль и место тех математических воззрений, о которых я вам рассказывал, среди разнообразных течений и направлений математики.

.454. Мне многие и много раз говорили о сходстве моих воззрений с конструктивной математикой, с теорией алгоритмов и т.д., и в этих словах слышался намек на то, что я не придумал ничего нового, а сказал лишь то, о чем уже давно говорят многие.

.455. Я не собираюсь отрицать это сходство в трактовке многих вопросов, например, вопроса о бесконечности. Вряд ли могла быть серьезной такая концепция, которая не имела бы ничего общего ни с чем из предыдущего. Вопрос должен состоять не в том, имеет или не имеет новая концепция сходство с какими-то другими течениями, а в том, вносит или не вносит она что-то новое по сравнению с ними (и, разумеется, в том, нужны ли и правильны ли эти новшества).

.456. И я считаю, что то, о чем я вам рассказывал, не является простым повторением идей конструктивизма или теории алгоритмов, а вносит нечто новое.

.457. А если мои воззрения имеют наибольшее сходство именно с наиболее молодыми и современными направлениями в математике, так это свидетельствует только о том, что я иду именно в том направлении, в котором математика и так двигалась за последние десятилетия, но, как считаю, сделал в этом направлении шаг дальше.

.458. Сейчас я попытаюсь отметить главные, на мой взгляд, отличия изложенных здесь воззрений от конструктивизма и от теории алгоритмов.

.459. При знакомстве с моими воззрениями все обычно главный момент, претендующий на новшество, почему-то видят в том, что я пытаюсь заменить актуально бесконечные множества алгоритмами. Но такое мнение не верно. Новшество, как я думаю, состоит не в том, что на первый план выдвигаются алгоритмы (это делалось уже давно), а в том, <u>какие</u> алгоритмы выдвигаются на первое место.

.460. Конструктивизм и теория алгоритмов изучают алгоритмы манипулирования знаками на бумаге или в более абстрактном варианте: алгоритмы манипулирования чем-то «вообще». Они изучают алгоритмы вычисления функций и т.п. Иными словами, они интересуются алгоритмами, которые я назвал вторичными, оставляя совершенно без внимания те алгоритмы, которые я считаю первичными, алгоритмы обработки информации о внешнем мире в биологическом компьютере.

.461. С моей точки зрения конструктивизм и теория алгоритмов остаются практически столь же абстрактными и оторванными от материального мира науками, как и классическая математика. В них отсутствует звено, связывающее их предметы изучения с материальным миром и с деятельностью человеческого мозга в этом мире. Именно в создании этого недостающего звена я вижу первое и главное новшество своей концепции, – в том, что она создает мостик от материального мира к абстракциям математики любого направления, будь то классической, будь то конструктивной.

.462. Неспроста я в первых же словах своего выступления, объявляя его тему, говорил {.43}, что тема эта: «о материалистическом подходе к математике». Новшество состоит не в алгоритмическом подходе, а в материалистическом подходе, не в требовании, чтобы мы оперировали конструктивными объектами, то есть такими объектами, которые можно построить по какому-то алгоритму, а в требовании, чтобы мы начинали свои рассуждения с практической деятельности человека и его мозга в реальном мире.

.463. Вопрос о связи математики с реальным миром, конечно, не новый. Но, извините меня за нескромность, мне кажется, что ни одно направление в математике, включая конструктивное и теорию алгоритмов, еще не предлагало столь детально разработанный путь, ведущий от реального мира к математическим понятиям.

.464. Материалистический подход, как я считаю, – это первое и главное отличие от других течений математики.

.465. Второе отличие от конструктивизма состоит в том, что я не стараюсь абсолютизировать алгоритмический подход. Мне говорят, что вслед за конструктивистами говорю об алгоритмах, но, как видите, я конструктивистов упрекаю именно в том, что они, так сказать, «переборщили» с алгоритмами. Они, образно говоря, установили запрет на рассуждения о неконструктивных объектах. Я этот запрет не поддерживаю. Ничто не мешает вам объявлять о существовании актуально бесконечных множеств и аксиомами описывать их свойства. Для этого у вас есть специальный аппарат Эуклидола и Эуклидос, моделирующий всё это на ЭВМ. Надо только правильно понимать роль и место этого аппарата и его связь с алгоритмами. Вот и всё, и никаких запретов, а отсюда и никакой особой, конструктивной логики.

.466. Третье отличие – это требование моделирования. Я считаю, что действительно фундаментально мы познали математическое явление только тогда, если смогли его смоделировать на ЭВМ. Моделирование на ЭВМ должно быть пробным камнем, критерием точности и глубины наших познаний о сущности математического явления. Отсюда требование машинно-ориентированного языка математики. И моделировать надо не на гипотетических и абстрактных машинах Тьюринга и Поста, а на тех реальных ЭВМ, которые уже так прочно вошли в нашу жизнь.

.467. И моделирование это вовсе не требует, чтобы все объекты были конструктивными. Вы видели {.307}, что рассуждения об актуально бесконечных множествах мы моделировали в «аксиоматическом» аппарате Эуклидоса так же легко, как и алгоритмы, создающие конструктивные объекты. Иначе и быть не могло, ведь мозг тоже компьютер и тоже не может создать актуальную бесконечность. Тем не менее, рассуждать о ней он может. Как вы помните, для меня уже со студенческой скамьи было ясно: раз может мозг, значит может и ЭВМ. Надо только подумать: как? Вы видели, как ЭВМ может оперировать бесконечными множествами, и не думая их строить.

.468. Требование моделирования не накладывает никаких ограничений в духе конструктивизма. Любое математическое явление, как я думаю, в принципе можно смоделировать.

26. Заключительное слово

1981.05
(раньше на 2 месяца)

.469. Паулис Кикуст, познакомившись с моими письменными работами, сказал, что наиболее ценное во всем этом – это технически детализированные предложения о том, как некоторые в общем-то гипотетические механизмы мозга моделировать на ЭВМ, а мои рассуждения о сущности вообще всей математики назвал ерундой (blēņas) {.2072}, и сказал, что такие рассуждения надо оставлять для профессиональных математиков.

.470. Я же продолжаю считать, что собственно моделирование данных процессов мозга на ЭВМ – это второстепенный вопрос по сравнению с идеями о кардинальном изменении всего взгляда на математику, всего подхода к ней. Поэтому я и в настоящем своем выступлении акцент ставил не на моделирование некоторых механизмов мозга, а на идеи о преобразовании всего здания математики.

.471. Я повторяю вкратце эти идеи:

.472. 1) Первое: математические истины касаются взаимоотношений объектов реального мира и человеческого мозга, который обрабатывает информацию об этом реальном мире. При построении здания традиционной математики это не учитывалось. Надо это учесть и построить здание математики на основе таких концепций.

.473. 2) Второе: из этих концепций вытекает, что основным предметом математики являются некоторые алгоритмы работы мозга, системы потенциальных продуктов этих алгоритмов, взаимоотношения между ними и т.д.

.474. 3) Третье: из этого следует, что при изложении математических истин можно использовать не только словесное и аксиоматическое, не только содержательное и формальное описание, но и прямую запись алгоритмов на алгоритмических языках типа Эуклидола. Более того, такое описание следует считать более фундаментальным, чем, например, аксиоматическое.

.475. 4) Четвертое: в попытках достичь возможно большую точность и строгость рассуждений и доказательств, нужно идти не по пути формализации (если понимать формализацию как преобразование формул по каким-то правилам), а по пути выявления алгоритмов содержательного мышления и доказательства, до такой детализации, чтобы это можно было смоделировать на ЭВМ и чтобы ЭВМ могла осуществить содержательное доказательство.

.476. 5) Пятое: в результате такого изменения всего подхода к математике в некоторой степени может измениться и наше представление о самом содержании математики. Так, например, из таких воззрений вытекает вывод о возможности построения многих числовых систем, вывод о существовании более простой системы чисел, чем традиционная, вывод о сомнительности значения канторова диагонального процесса и т.д.

.477. Такое преобразование математики и согласование ее с современными материалистическими представлениями о деятельности мозга и сущности мышления, не по силам одному человеку.

.478. Я призываю всех математиков попытаться осмыслить и описать математические истины через призму деятельности мозга, отражающего внешний, реальный мир.

.479. Трудно одному человеку реализовать и такие в полном своем объеме громадные программные продукты, как Эуклидос и Эуклидол, сравнимые по объему с созданием мощных современных языков программирования, компиляторов и операционных систем. Особенно это трудно, если у человека есть и другие дела.

.480. Я призываю присутствующих подумать, каким образом реализацию этих проектов программ можно было бы сделать общественным мероприятием (если, разумеется, слушатели считают, что это вообще дело нужное).

.481. Я подозреваю, что обрушил на слушателей такую лавину необычных мыслей и представлений, что некоторые могли не всё до конца осмыслить и продумать.

.482. Желающие могут получить машинописный текст моего выступления для более медленного и спокойного знакомства с ним, а также другие, более подробные и обстоятельные материалы по этим вопросам.

Благодарю за внимание.

Какие будут вопросы?

2. Тетрадь SEMIN

СЕМИНАР
Дополнительные материалы к лекции «Преобразование»

...Bet žēl, ka krāšņās istabās
Es reizēm spraucies iekšā
Un savas pērles zalgošās
Tur metis – cūkām priekšā.[9]

Edvards Treimanis-Zvārgulis (1905)

Написано: 1981.09 – 1981.10 Рига

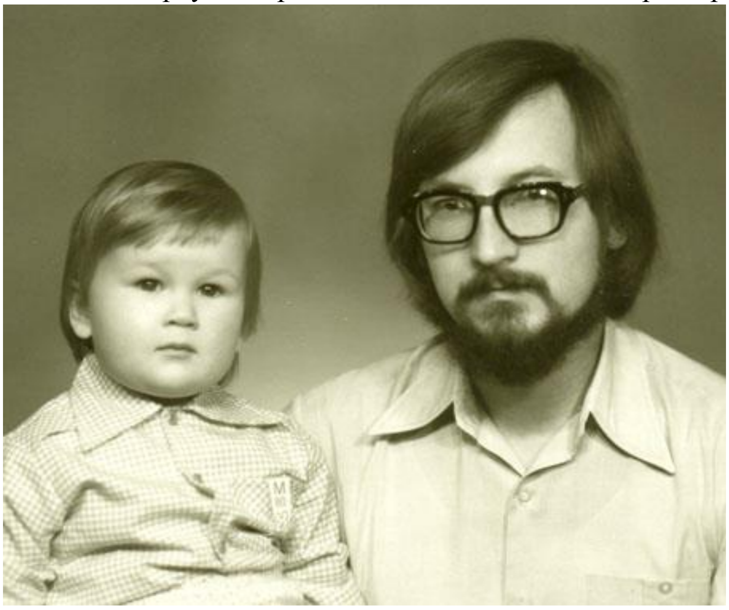
Медия SEMIN содержит некоторые материалы, относящиеся к представлению лекции «Преобразование» ее адресату – ВЦ ЛГУ.

1. Цели и характер лекции

1981.09
(через 4 месяца)

.483. Эта метамедитация содержит материалы, касающиеся моей лекции ПРЕОБРАЗОВАНИЕ: хронику событий, диалоги обсуждений и т.п.

.484. Сначала я хочу высказать здесь кое-что из того, что не могло найти место в самой лекции. В первую очередь это пояснение цели и характера лекции.



Я с сыном в апреле 1980-го (когда ему 1 год и 7 месяцев). Так я выглядел, когда писалось Преобразование и проводился Семинар

.485. В выступлении ПРЕОБРАЗОВАНИЕ я старался показать всю панораму своих взглядов на математику, не ограничиваясь каким-то отдельным вопросом. Часть этих вопросов я уже раньше описал в сборнике «О природе чисел» {NATUR}. Другую часть собирался рассмотреть в сборнике «В саду математики». Но создание первого сборника потребовало очень много времени. Создание второго сборника, видимо, потребовало бы еще больше. В последние два года работа над математическими сборниками стала главной статьей моего бюджета времени, и это положение грозило продолжаться. В то же время мне гораздо более интересными казались многие другие занятия. Мне всё больше хотелось, говоря словами П.К., «оставить в покое Сад математики» {.2089}. Честно говоря, мне эта математика порядочно надоела.

---

[9] Но жаль, я в пышны комнаты Порой пролезть пытался И жемчуг свой сверкающий Бросал там – свиньям под ноги (*латышский язык*).

.486. Но если бы я просто бросил эти занятия на полпути, то это было бы своего рода предательством в отношении тех идей, в правоте которых я не сомневался, и в отношении того труда и усилий, которые уже в это дело вложены. Я не мог просто бросить, я должен был высказать и потом уж остановиться хоть на время. Если хотите, я считал своим долгом не держать эти мысли при себе, а попытаться огласить независимо от того, какой я мог ожидать результат от этого.

.487. В такой конфликтной ситуации мои противоречивые желания (сузить работы над математикой и всё же высказать всё) вылились в лекцию, в которой я быстро пробежался по всем уголкам своих математических воззрений. Я всё же высказал всё: пусть бегло, пусть поверхностно, пусть меня не поймут, пусть не согласятся, но я это сказал, и не в тишине четырех стен своей комнаты, а так, чтобы слышали и другие. Я это сказал не для того, чтобы объявить войну и начать борьбу, а для того, чтобы это было сказано, и я мог с чистой совестью повернуться и уйти со словами: «Я вам это говорил, если вы мне не поверили, так что ж, сами виноваты...».

.488. Эта лекция стала выражением моего кредо, программным документом, так сказать, моим «Манифестом...».

.489. Меня удивляет то, что Паулис Кикуст, предложивший и организовавший мое выступление, видимо, всё еще считает меня воинствующим фанатиком, борцом за новую веру, маньяком, который ни за что не хочет угомониться. Но на самом деле я охватил в этой лекции всё именно для того, чтобы тезисы были провозглашены, и я мог спокойно и не спеша дорабатывать их годами, чередуя эти занятия с другими, может быть более спокойными и вызывающими меньший отпор.

.490. Я надеялся, что, увидев в этой лекции всю панораму моих взглядов о сущности математики, хотя бы Кикуст и Подниекс согласятся, что в них есть и кое-какое рациональное зерно (например, в вопросе о роли аксиом, их связи с алгоритмами, о первичных и вторичных алгоритмах, о формализме и т.д. и т.п.), что это не совсем ерунда, от которой надо очищать мои работы (какую оценку они получили в первом туре {.2075}), и что об этом стоило бы подумать, побеседовать, обсудить, развивать и разрабатывать дальше эти тезисы.

.491. Я надеялся, что эта лекция принесет мне хотя бы несколько единомышленников (пусть единомышленников не на все 100%, а хоть в большинстве вопросов), но был готов и к тому, что это не случится. И уж ни в коем случае не рассчитывал я на полное понимание и одобрение со стороны всех слушателей.

.492. 28 августа, в последний день перед уходом в отпуск, во время которого я и собирался проводить семинары в ВЦ ЛГУ, мы заговорили с Леонардом Роговым об этих семинарах. «Интересно, чем это кончится» – сказал тогда Рогов. «Ах,» – я махнул рукой – «я и так знаю, чем это кончится! Они скажут, что Эуклидос и всё это моделирование – это любопытно и интересно, но никогда они не согласятся со всем, что я говорю, никогда в жизни они не признают, что Кантор может быть неправ! Они предложат публиковать то, с чем согласились, и на том разойдемся».

.493. Пусть участники семинаров и читатели этой метамедитации сами судят, был ли я тогда прав.

.494. Главным препятствием на пути к достижению моих целей, поставленных перед этой лекцией, было то, что она была устным выступлением.

.495. Устные выступления я ненавижу. Не люблю я слушать лекции и тем более их читать. Когда я был студентом, я однажды написал в нашу кафедру открытое письмо, в котором предлагал отменить систему лекций и распустить студентов по домам и библиотекам, чтобы они там готовились самостоятельно по книгам и ротапринтированным конспектам лекций (как видите, я уже тогда вел себя несколько оригинально, хотя, конечно, не сама оригинальность была моей целью). Мое письмо обсудили на собрании преподавателей кафедры и студентов нашей группы, но систему лекций, разумеется, не отменили.

.496. О своей неприязни ко всем устным формам общения я объявил в «Вызове на дуэль» {NATUR.150}, в этом кодексе правил желаемых форм общения, который стоит в начале любой линии моих сборников. Об этой неприязни я писал во многих местах метамедитаций. И даже в начале лекции ПРЕОБРАЗОВАНИЕ {.40} я счел нужным напомнить о том, до какой степени мне неприятна та форма распространения своих взглядов, на которую я в этот раз согласился.

.497. Не буду здесь вдаваться в психологию и психиатрию, чтобы объяснять причины этой неприязни, хотя сделать это я в состоянии.

.498. Должно быть ясно, что от человека со столь недвусмысленными наклонностями нельзя ожидать непринужденного и виртуозного чтения лекции, образца ораторского искусства. Не могло быть и речи о том, чтобы импровизировать во время чтения, я был рад, что могу хотя бы зачитать заранее подготовленный текст. Хоть я лекцию и зачитывал устно, но всё было подготовлено и рассчитано на то, что потом ее всё равно будут перечитывать с письменного экземпляра.

2. Первый семинар

1981.09

.499. Первый семинар в ВЦ ЛГУ состоялся 7 сентября 1981 года в 15 часов. Собралось 8 слушателей. Семинар проходил в аудитории ВЦ с партами, расположенными амфитеатром. В моей лекции очень большую нагрузку несут рисунки. По замыслу слушатели должны были всё время разглядывать рисунки под аккомпанемент моего чтения. На семинарах в ИЭВТ так оно и было, и всё проходило довольно гладко. Аудитория ВЦ ЛГУ же расстроила мои расчеты. Я попросил слушателей пересесть на первую парту, а стол лектора подвинули к ней вплотную. Но всё равно рисунки были видны только одному слушателю, и то лишь если вытянуть шею.

.500. Я демонстративно сел за стол и стал зачитывать текст. Минут десять все слушали молча, потом стали обсуждать мое заявление о том, что мозг – компьютер (хотя в лекции это служит только для создания фона и даже не является ее тезисом). Один слушатель напомнил мне, что подобные взгляды уже 200 лет как отвергнуты, а другой говорил, что такой мозг-компьютер, обладающий конечным числом программ, окажется перед непроходимой стеной агностицизма как только встретится с проблемой, для которой у него не запасена программа. У меня сразу создалось впечатление (возможно, конечно, обманчивое), что эти двое никогда не будут иметь ничего общего со мной во взглядах и что пытаться им объяснить мою точку зрения – это пустая трата времени.

.501. Во время этого обсуждения Подниекс молчал, а Кикуст иногда встревал с репликами в мою пользу и даже объявил, что придерживается точно такого же мнения, хотя слышит это от меня впервые и ни о чем со мной не договаривался.

.502. Когда семинар с такими перебоями длился уже полчаса, и я дошел до чисел, тот самый слушатель, который первым начал тратить время на дебаты, теперь решил его экономить и довольно настойчиво и раздраженно требовал от меня зачитывать только определения. Естественно, что никаких определений я зачитать не мог и не мог также перейти к импровизированному и более сжатому изложению.

.503. Тут Кикуст объявил, что такая форма семинара является неожиданностью для него и для других, и что она не имеет прецедентов в истории ВЦ ЛГУ. Он как организатор семинара даже извинился перед остальными слушателями. Хоть я и не понял, в чем, собственно, заключается беспрецедентность моего выступления, но это создало у меня впечатление, что происходит что-то очень плохое.

.504. Про себя проклиная того идиота, который первым придумал эти идиотские устные выступления и обещая себе больше никогда не позволить втянуть себя в такую идиотскую аферу, я вытащил из портфеля письменные экземпляры лекции и предложил их прочитать тем, кто хотел экономить время и кому надо было скоро уходить. Но они отказались читать.

.505. В четыре часа пятеро слушателей ушли, договорившись, что продолжение семинара состоится через неделю в это же время. Один момент продолжение семинара было под вопросом (странно, но я был бы рад, если бы узнал, что мне не надо больше приходить и мучиться). Но решающее слово сказал Подниекс: «Надо дослушать до конца».

.506. Для оставшихся троих слушателей я еще почитал немножко вперед, потом развязалось некоторое обсуждение паритерных чисел. Один из слушателей (кажется, его фамилия Неизвестный) возражал мне, что в моих числах нет ничего нового. Он произвел на меня весьма приятное впечатление, так как, несмотря на то, что он мне возражал, от него не несло тем высокомерным снобизмом, который мне послышался со стороны того слушателя, который учил меня, что мои взгляды якобы уже 200 лет как устарели и раздраженно требовал зачитывать только определения.

1993.10.27 20:45 среда
(через 12 лет, 1 месяц)

.507. Тогда, более чем 12 лет назад, в оригинальном сочинении СЕМИНАР я не назвал имя этого человека, пожалел его, но теперь назову. Это был Аугустон. Я знал его еще с того времени, когда в 1974 году работал в ВЦ ЦСУ и он приходил туда кого-то консультировать. Уже тогда меня поразили его потрясающее высокомерие (проявившееся в тот раз еще отнюдь не по отношению ко мне) и невероятных размеров апломб, обратно пропорциональный его умственным способностям.

.508. В целом, когда я теперь, вводя в компьютер для Ведды метамедитацию СЕМИНАР тем самым вынужден ее снова перечитать, меня охватывают странные мысли вроде таких: «Боже мой! Я был комментатором газеты «Диена», а теперь пишу для официоза Латвийской Республики – газеты «Латвияс Вээстнесис». Редакторы ведущих газет Латвии уговаривают меня давать статьи для их изданий, писатели и политики почтительно жмут руку... Не далее, как в прошлую субботу случайно узнал, что в Университете бедняг студентов заставляют изучать мои статьи... И всё это лишь из-за сочинений, которые я пишу очень нехотя, пишу лишь потому, что не могу отказаться от этого, статьи, которые сам ценю не очень высоко. Всё это в то время, когда я еще не успел подготовить и опубликовать свои главные работы... Всё это в то время, когда мне уже почти 50 лет, и силы пошли значительно на убыль... А тогда, 12 лет назад, когда я был еще почти в зените своих творческих сил, я пришел в ВЦ ЛГУ со своими лучшими работами, лучшими идеями и щедро стал сыпать свой жемчуг перед ними. И это стадо... – скажем так: – математиков ВЦ ЛГУ с хрюканьем и чавканьем затоптали мой бисер в то вещество, что обычно находится под животными этого рода! О боже, боже мой!» – вот как мне теперь вспоминается этот «исторический семинар» {.2549}.

1981.09
(раньше на 12 лет, 1 месяц)

.509. Так закончился первый семинар в ВЦ ЛГУ. В целом он оставил на меня весьма плохое впечатление. Я там рассказал о том, как пришел к паритерным числам, но мне казалось, что никто моего хода мыслей так и не понял, кроме Кикуста и, может быть, Подниекса, которые видели сборник «О природе чисел» и знали всё и без того.

.510. У меня создалось впечатление (конечно, возможно, обманчивое), что Кикуст почувствовал себя неловко перед теми людьми, которых он созывал на мой семинар, видимо, какими-то похвалами рекламируя меня, но семинар эту рекламу не оправдал. Если это впечатление верно, то мне остается только выразить сожаление, что так получилось. Но есть в этом доля вины не только моей, но и самого Кикуста. Он имел достаточно возможности почувствовать, что, наверно, «беспрецедентен в истории ВЦ ЛГУ» не только мой семинар, но и я сам, что я не аккуратно постриженный подающий надежды молодой ученый, который с папкой под мышкой при галстуке идет по верной тропинке аспирантуры к титулам кандидата, доктора и академика, что я степной волк {NATUR.2766}, одиноко бредущий своей дорогой, не взирая на тропинки, проложенные другими, дикарь, от которого всё можно ожидать. Мог он и больше прислушаться к моим многократным словам о нежелательности устных форм общения, ибо раз я это говорю, то знаю, что говорю, знаю, где моя сила и где я слаб.

.511. После первого семинара Кикуст сказал мне, что я читал так, будто передо мной полученная от самого бога книга с абсолютными истинами, и что это сильно раздражает слушателей. На это я, пожимая плечами, могу ответить только то, что меня, в свою очередь, очень сильно раздражают работы, в которых, как не старайся, никак невозможно понять, какого же, собственно, мнения придерживается автор. Поэтому сам я стараюсь высказать свое мнение максимально четко, ясно и однозначно (как топором отрубить). При этом я отдаю себе отчет в том, что это лишь мое личное мнение и ожидаю, что отчет себе в этом отдадут и другие. Как мне кажется, я уважаю мнение других, даже если оно расходится с моим, мне нравится, если они могут высказать свое мнение так же четко, ясно и однозначно, и вовсе не думаю, что за этой четкостью скрываются претензии на абсолютную истину. А если у кого-то при виде однозначно высказанного мнения появляются ассоциации с библией, то мне остается только развести руками.

.512. После первого семинара Кикуст сказал мне, что он полностью разделяет мое мнение про то, что мозг – компьютер, но что он считает бессмысленным пытаться доказать это в философских работах, лекциях и семинарах. «Ответ им (скептикам) должен быть один» – говорил он – «это работающая программа. Тогда можно сказать им: идите, посмотрите, попробуйте отличить человека от машины по тесту Тьюринга. Поэтому надо заниматься искусственным интеллектом».

.513. Я полностью с этим согласен, и мой Эуклидос ведь шаг именно в этом направлении. И сильно доказывать и спорить я тоже не хочу. Но провозгласить определенную программу действий, определенную совокупность тезисов я всё же хотел. Я хотел и хочу, чтобы люди знали: есть в мире такой Эгле, который думает так и так и делает то и то. Что страшного в том, что я знакомлю людей со своими воззрениями? Я не доказываю. Я знакомлю. Неужели так трудно понять эту установку, о которой я столько много и в столь многих местах говорил?

3. Второй семинар

1981.09

.514. Второй семинар состоялся 14 сентября 1981 года в 15 часов. Утром этого дня я позвонил Кикусту и спросил, нельзя ли перенести собрание в другое место. В результате этого мы сидели вокруг стола Кикуста, и атмосфера теперь была для меня более приемлемой. По телефону Кикуст сказал, что публика настроена «не враждебно, но строго». Настроение оказалось настолько строгим, что на семинар пришли только трое слушателей. Те пятеро, которые куда-то торопились и ушли в середине прошлого семинара, на этот раз не пришли вовсе, среди них и Подниекс. Куда-то спешил и вскоре ушел и третий слушатель, так что основное время мы разговаривали втроем с Кикустом и Неизвестным.

.515. Я отвечал на вопросы Неизвестного (за эту неделю он самостоятельно немножко почитал текст лекции), потом, отвечая на вопросы Кикуста, объяснил идею аппарата АЛГОРИТМ в Эуклидосе. К тексту и плану лекции мы больше вообще не вернулись. Когда Неизвестный более менее понял, как при помощи алгоритма Изоквант определяются натуральные числа, он тут же (оставаясь верным себе) объявил, что в этом нет абсолютно ничего нового и что всё это математике давно известно. В качестве примера он показал, как кто-то (не помню уже, кого он назвал) вводит натуральные числа: сначала берется

.516. пустое множество 0 – это ноль
потом множество {0} – это 1
потом множество {{0}, 0} – это 2
и т.д.

.517. (или что-то в этом роде).

.518. Мне не пришлось на это отвечать, так как на Неизвестного напал Кикуст. Вообще Кикуст во время этого разговора одинаково нападал на меня и на Неизвестного, как будто решив заодно разделаться с экстремизмом как правого, так и левого толка.

.519. Разговор длился почти три часа, но другие вопросы затронуты не были. Хотя осталась в силе договоренность, что через неделю состоится продолжение, но я считал семинар уже фактически законченным. В третий понедельник я намеревался уже только придти, предъявить ответ на возражение Кикуста и Подниекса по вопросу о диагональном процессе, ответить на вопросы, если таковые будут и выслушать возражения, которые наверняка будут. Продолжать чтение и рассматривать новые вопросы я уже не собирался.

.520. Подводя итоги второму туру моих контактов с ВЦ ЛГУ, я могу сказать, что он был неудачен и не принес мне ничего нового. Единственным положительным в этом было то, что возражение Кикуста и Подниекса о Канторе заставило меня глубже разработать этот вопрос и то, что я написал программную работу с изложением панорамы, общего обзора моих воззрений и довольно удачно ознакомил с ней своих коллег из ИЭВТ, встретив в целом достаточно понимания. Собственно адресата, людей из ВЦ ЛГУ, эта работа не достигла. Пятеро ее слушали около 20 минут (если исключить время, которое сами посвятили спорам о мыслящих машинах), и то только первую, наиболее неконкретную часть, и к тому же без рисунков.

.521. Только Неизвестный (кроме, конечно, самого Кикуста) посвятил собственно семинару (не считая самостоятельного чтения) около 5 часов. Но, как оказалось, он был «чистым» математиком, не занимающимся программированием. Когда Кикуст объяснил ему разницу между его каскадом из пустых множеств и моими алгоритмами, моделирующими процессы мозга, Неизвестный объявил, что мозг его не интересует и перешел на хоккей (в тот день состоялся финальный матч на кубок Канады между командами СССР и Канады).

.522. Наши же разногласия и согласия с Кикустом мы уже раньше выяснили в обширном диалоге. Семинар не внес в это ничего нового.

.523. Общий итог семинара можно охарактеризовать словами: она не стали меня слушать (*ср.* {NATUR.2192} – *ред.*).

.524. Итак, я написал обширную программу действий, рассчитанную на многие годы, и попытался с ней ознакомить людей, но в ВЦ ЛГУ с ней не познакомились. Так как не были выдвинуты и никакие аргументы, которые заставили бы меня изменить прежние взгляды, то и в моих намерениях ничего не изменилось.

.525. Теперь я намерен приостановить работы над математикой, чтобы работать над общефилософскими частями медиотеки и над реализацией Эуклидоса. Контакты с математиками я по своей инициативе возобновлю только после того, как смогу им сказать: «Приходите ко мне в ИЭВТ, сядьте за дисплей и побеседуйте с моим Эуклидосом об аксиомах или интегралах! Может быть тогда вас заинтересует, как он внутри устроен и почему именно так, а не иначе!».

4. Возражение Кикуста и Подниекса

1981.09

.526. В конце первого семинара я оставил в ВЦ ЛГУ два экземпляра текста лекции в слабой надежде, что за эту неделю слушатели прочитают сборник и освободят меня от необходимости зачитывать лекцию дальше.

.527. На следующий день после первого семинара Кикуст пришел ко мне домой. Причиной этого несколько шокировавшего меня визита был контраргумент, который они с Подниексом выдвинули против моих нападков на теорему Кантора. Этот визит заставил меня подумать, что Кикуст относится к моему семинару более серьезно и придает ему большее значение, чем я сам. Меня нисколько не беспокоило бы то, что аудитория не согласилась бы с моим мнением о Канторе (и, разумеется, как-то аргументировало бы свое несогласие). Более того, как уже писал {.492}, я ожидал именно такой результат.

.528. Кикуст же, видимо, усматривал в такой реакции аудитории нечто достаточно страшное, чтобы стоило немедленно отыскивать мой дом и предупреждать меня о грозящей мне опасности. Как бы там ни было, но я пользуюсь случаем, чтобы выразить ему свою искреннюю благодарность за проявленную обо мне заботу как в этом случае, так и вообще. Но заодно я выражаю некоторую тревогу по поводу того, что могу оказаться слишком диким и не оправдать возложенные на меня надежды.

.529. Теперь от хроники событий и описания моих эмоций в связи с этими событиями перейдем к рассмотрению собственно того контраргумента, который против меня выдвинули Кикуст и Подниекс.

.530. Как рассказывает Кикуст, дело было так: раньше он испытывал недоверие к диагональному процессу Кантора и всему, что из него вытекало и противоречило интуиции. Первый раз прочитав мою главу о теореме Кантора он обрадовался, однако что-то заставило его засомневаться, он стал читать второй раз и тут обнаружил то место, против которого можно направить упомянутый контраргумент. Он посоветовался с Подниексом, и тот полностью разделил его мнение. После этого Кикуст стал убежденным сторонником теоремы Кантора и теперь, как он сказал, считает диагональный процесс гениальнейшим изобретением.

.531. Таким образом, теперь я уже могу гордиться тем, что благодаря мне один достаточно самостоятельно мыслящий человек стал из скептика сторонником Кантора. И если такое превращение было позволительно Кикусту, то, я надеюсь, никто не будет считать более позорным мое превращение, если я когда-нибудь решу протрубить сигнал отступления и объявлю, что «отныне я тоже считаю диагональный процесс гениальнейшим изобретением человеческой мысли». Ведь право каждого изменять свое мнение: *Homo sum...* и *Errare humanum est* и *Tempora mutantur...* и т.д.

.532. Подготовив таким образом себе путь отступления, я всё же должен сказать, что пока я сигнал отступления не протрубил и на выдвинутое возражение намерен отвечать.

.533. Возражение заключалось в следующем (надеюсь, мне удастся его правильно воспроизвести):

.534. В главе о Канторе {.432} имеются слова «Множество Y^X с нашей точки зрения тоже не более, чем потенциальные продукты алгоритма, создающего отображения, то есть множества пар элементов из X и Y».

.535. 1) Если я под множеством Y^X имел в виду продукты алгоритма, создающего отображения «от уголка», то всем известно, что такое множество имеет мощность счетного множества, так как это вовсе не континуум.

.536. 2) Если я под Y^X имел в виду континуум, то он не может быть потенциальными продуктами алгоритма, создающего континуум, это доказано теорией алгоритмов и доказано при помощи диагонального процесса (не всё, о чем мы можем думать, можно построить алгоритмически).

.537. Никаких противоречий и ошибок в теории Кантора нет. Если же накладывать ограничения в духе конструктивистов, то проблема перестает существовать, это тоже не ново.

.538. Таково было возражение Кикуста и Подниекса.

.539. Ну что же, я ожидал возражения больше всего именно здесь, и дождался их. Рассмотрим это место более крупным планом, и я изложу свое мнение более детально.

5. Три ситуации

1981.09

.540. Во-первых, я хочу отметить такой момент: теория алгоритмов доказывает, что не существует алгоритм, создающий континуум. Не будем сейчас разбираться, насколько можно доверять этому доказательству, а взглянем «сверху» на саму ситуацию: здесь сначала имеется объект (континуум), потом ставится вопрос «можно ли этот объект построить по какому-то алгоритму» и, наконец, делается определенный вывод об этой возможности. Значит интересующий нас объект существует до алгоритма построения и независимо от него. Отметьте, пожалуйста, что я пока не возражаю против этого подхода, а только фиксирую наличие данного факта.

.541. Во-вторых, я хочу отметить следующее: судя по характеру возражения, Кикуст и Подниекс различают в случае с множеством Y^X две ситуации: либо это продукт алгоритма, и тогда это не континуум, либо это континуум, и тогда это не может быть продуктом алгоритма. Я здесь различаю не два, а три возможных варианта, и сейчас их по очереди проанализирую.

.542. Первая ситуация. Множество Y^X – это то, что строится по какому-то алгоритму «от уголка», создавая всё новые элементы-отображения «вниз» и всё новые члены отображений «вправо». Здесь мы имеем дело с потенциальной бесконечностью. У нас нет никаких разногласий относительно мощности множества Y^X в этой ситуации.

.543. Конструктивисты ограничиваются этой ситуацией, запрещая рассуждать в своих теориях о двух других ситуациях. А.А. Марков пишет в БСЭ-3[10]: «В конструктивной математике не применяется характерная для теоретико-множественной математики абстракция актуальной бесконечности, связанная с рассмотрением никогда не завершаемых процессов как бесконечно продолженных и тем самым как бы завершенных».

.544. Итак, конструктивная математика не применяет абстракцию актуальной бесконечности и не рассматривает бесконечные процессы как бы завершенными. Я же писал в своей лекции (в главе «Сходства и различия» {.465}): «Я этот запрет не поддерживаю. Ничто не мешает вам объявить о существовании актуально бесконечных множеств (..). Для этого у Вас есть специальный аппарат Эуклидола и Эуклидос, моделирующий всё это на ЭВМ. Надо только правильно понимать роль и место этого аппарата и его связь с алгоритмами».

.545. В главе АЛГОРИТМ,8 {NATUR.1687} имеются такие слова: «Оператор PEO имеет смысл и формат, аналогичный оператору EXEC. Разница между ними заключается в том, что по оператору PEO вызывается не настоящий интерпретатор алгоритма, а псевдоинтерпретатор. Он строит (..) псевдоконкретное множество: вместо того, чтобы на самом деле совершить все шаги, предписанные алгоритмом (..), псевдоинтерпретатор беззастенчиво объявляет, что он уже всё сделал, сразу строит номиналию и запоминает в ней каким продуктом какого алгоритма (..) это (..) множество является. Псевдоинтерпретатор может «реализовать» и такие алгоритмы, которые для интерпретатора нереализуемы».

[10] Марков А.А. «Конструктивная математика». Статья в БСЭ-3, т.13, Москва, 1973.

.546. Так в Эуклидосе моделируется абстракция актуальной бесконечности. Он получает в итоге таблицу-номиналию якобы построенную завершенным бесконечным процессом, и в дальнейшем может этой таблицей свободно оперировать.

.547. Итак, переходим ко второй ситуации.

.548. Вторая ситуация. Допущена абстракция актуальной бесконечности. Бесконечные процессы закончились. С конструктивистами мы разошлись. Смотрим на множество Y^X (и на множество четных чисел) как на актуально бесконечные множества, полученные завершившимся бесконечным процессом. И что мы видим? Мы видим, что каждое из этих двух множеств может быть получено завершением бесконечных процессов по крайней мере двух разновидностей. Назовем одну разновидность «зависимые процессы», другую – «независимые процессы».

.549. Построение обоих множеств процессами обеих разновидностей изображено в лекции на рисунках {.449}, {.450}, {.451} и {.452}. В обеих разновидностях процессы бесконечны. Допустив абстракцию актуальной бесконечности, получим в обеих разновидностях актуально бесконечные множества, которые как будто ничем не отличаются. Ничем, кроме «памяти» о том, над какой разновидностью процесса мы применили абстракцию актуальной бесконечности.

.550. Если мы игнорируем эту «память» и не различаем эти две разновидности «зависимых» и «независимых» актуально бесконечных множеств, то уже в этой (второй) ситуации теория Кантора права, и всё окей. Но к несчастью мой глаз различает эти разновидности. И тогда я вижу, что одна группа теорем доказана для разновидности «независимые» актуально бесконечные множества, а теорема Кантора доказана для разновидности «зависимые», и тогда в теории имеется ошибка *Homonymia*. А для разновидности «независимые» доказательство Кантора несостоятельно.

.551. Отметим, что мы находимся сейчас в таком месте, где мы уже разошлись с конструктивистами, допустив актуальную бесконечность. Отметим, что мы находимся сейчас в такой области, где не вступили в силу еще никакие доказательства теории алгоритмов, так как нет для них даже исходной ситуации, которую я особо отметил в первом абзаце этой главы {.540}: у нас нет никаких объектов ДО алгоритмов, о которых мы могли бы рассуждать, можно или нельзя их построить по какому-то алгоритму. Мы применили только абстракцию актуальной бесконечности и не применили еще никаких более сильных средств.

.552. Но такие более сильные средства применить можно, я не против (если только ясно осознавать, что именно происходит). Эуклидос предоставляет вам средства и для моделирования этого. Они фигурируют в лекции под названием «неопределенных множеств» {.299}. Этим способом Вы можете ввести какие только Вам вздумается множества: боги, русалки, континуум, – всё, что хотите, и объявить в аксиомах какие угодно их свойства.

.553. Третья ситуация. Континуум объявлен как множество, обладающее какими-то свойствами и существующее до и независимо от алгоритмов. Теперь можно и порассуждать: а не совпадают ли эти наобум объявленные свойства континуума со свойствами какого-нибудь актуально бесконечного множества, взятого из второй ситуации?

6. Вторая ситуация

1981.09

.554. Итак, отправившись от потенциально бесконечных алгоритмов (о которых у нас с моими оппонентами не обнаружилось пока никаких разногласий) я последовательно один за другим делаю два шага в сторону всё более отвлеченных вещей, или, иными словами, совершаю (или применяю) две различные абстракции.

.555. Первая абстракция мне из математики хорошо известна под названием абстракции актуальной бесконечности и состоит она в том, что бесконечный процесс начинают рассматривать как всё же завершившийся.

.556. Вторая абстракция мне из математики не известна, поэтому я вынужден придумывать ей название сам: назовем ее абстракцией предварительного существования. Заключается она в том, что предполагается существование какого-то объекта независимо от алгоритма его построения (и даже независимо от возможности существования такого алгоритма).

.557. Разница между этими двумя абстракциями мне кажется достаточно очевидной и просто из таких вот умозрительных рассуждений. Тем более она очевидна при моделировании этих абстракций в Эуклидосе. Там они реализуются двумя совершенно различными программами, и результаты их также отличаются. В обоих случаях результатом является номиналия (обычный эуклидосовский эквивалент слов «существует объект»), но в первом случае эта номиналия содержит ссылку на алгоритм, который якобы выполнен, несмотря на его бесконечность (то есть, объект привязан к алгоритму), во втором случае такой ссылки (привязки) нет.

.558. Если различать эти две абстракции (два отдельных шага к отвлеченному), то трудно не видеть разницы между описанными тремя ситуациями (априори возможны даже четыре ситуации:

а) не применена ни одна абстракция;
б) применена только первая;
в) применена только вторая;
г) применены обе,

.559. но последние два случая удобства ради будем рассматривать как варианты третьей ситуации:

в) континуум не совпадает с множеством из второй ситуации;
г) совпадает).

.560. Теперь, когда мы так обрисовали диспозицию сил, расстановку границ, попытаемся разобраться, кто что утверждает.

.561. Я был уверен, что в традиционной математике теорема Кантора «вступает в силу», как только применима абстракция актуальной бесконечности, т.е., что она «действует» во второй и третьей ситуации. (Честно говоря, у меня были сильные подозрения, что в традиционной математике вообще обе эти ситуации не различаются достаточно четко, чтобы возник вопрос о том, где, собственно, применима теорема Кантора). Впрочем, может быть я опять стал жертвой своего невежества?

.562. Мои рассуждения в лекции, как легко увидеть, направлены против применимости теоремы Кантора к актуально бесконечным множествам во второй ситуации. В этой ситуации бессмысленно рассуждать о том, могут ли эти множества быть продуктами алгоритма, так как они, так сказать, по определению продукты бесконечного алгоритма, к которому применена абстракция актуальной бесконечности. И, таким образом, как я считаю, возражение Кикуста и Подниекса моим рассуждениям ничуть не вредит.

.563. Как я вижу разницу между двумя абстракциями, так вижу разницу и между (иначе как будто одинаковыми) вариантами одного и того же актуально бесконечного множества в зависимости от того, над каким вариантом процесса применялась абстракция актуальной бесконечности. На различении таких вариантов одного актуально бесконечного множества и построено всё мое рассуждение.

.564. Слово «потенциальные» в той фразе {.534}, которая цитировалась в возражении Кикуста и Подниекса, не является противопоставлением слову «актуальный» (не является намеком на потенциальную бесконечность), а противопоставляется слову «конкретные» (это намек на то, что алгоритм на самом-то деле не выполнялся). Это обычная терминология в Эуклидосе: есть «конкретные продукты», построенные отработавшим алгоритмом, и «потенциальные продукты», которые «в принципе мог бы» построить (не запускавшийся на самом деле) алгоритм.

.565. Итак, я оставляю в силе свое утверждение, что во второй ситуации (актуально бесконечные множества, полученные применением абстракции актуальной бесконечности) теорема Кантора либо несостоятельна, либо вносит ошибку *Homonytia* и не существует никакой разницы между мощностью множества Y^X и счетного множества.

.566. Если математика утверждает об актуально бесконечных множествах именно это, то мне остается только пожелать ей, чтобы она утверждала яснее, и не возникали впредь никакие недоразумения.

7. Третья ситуация

1981.09

.567. Теперь рассмотрим третью ситуацию. Применена абстракция предварительного существования. Объявлено (без всяких алгоритмов) о существовании континуума, обладающего определенными свойствами (очень похожими на свойства множества Y^X из предыдущей ситуации, но, кто знает заранее, может в чем-то и отличающимися). Надо исследовать вопрос о мощности этого множества.

.568. Возможны два варианта:

.569. а) наш континуум идентичен множеству Y^X из предыдущей ситуации (и тогда, конечно, к нему относятся все предыдущие выводы);

.570. б) наш континуум не идентичен актуально бесконечному множеству Y^X из предыдущей ситуации (и тогда, конечно, надо делать самостоятельные выводы о его мощности).

.571. Прежде, чем приступить к оценке мощности обоих вариантов континуума, мне хотелось бы оценить их значение с точки зрения материалистической математики (мне надоело говорить «мои взгляды», «мои воззрения» и т.д.; я лучше буду говорить «материалистическая математика», предполагая, что я представитель особого направления в математике даже в том случае, если останусь единственным представителем этого направления).

.572. В лекции (в главе «Алгоритмы математики» {.384}) есть такие слова: «Совпадение свойств, объявленных в аксиомах, со свойствами алгоритмов, работающих с информацией о внешнем мире, это совпадение и создает мостик от якобы совершенно произвольных аксиом к реальному миру (..). Конечно, математик может провозгласить в аксиомах какие только ему вздумается свойства своих неопределенных множеств. Но всегда или почти всегда можно будет подобрать алгоритмы работы с множествами, имеющие такие же свойства. И если найдут применение эти алгоритмы, то, значит, нашла применение и теория математика, придуманная совершенно из головы. Но, если математику всё же удастся придумать такие свойства (..), которыми не может обладать никакой алгоритм, то такая математическая теория никогда не найдет никаких применений, потому что не будет тогда мостика, ведущего от аксиом в реальный мир».

.573. Если придерживаться изложенных здесь взглядов, то серьезного исследователя вообще могут интересовать только такие «неопределенные (первоначально)» множества, свойства которых совпадают со свойствами потенциальных продуктов каких-то алгоритмов, то есть, со свойствами множеств первой и второй рассмотренных категорий. Конечно, можно объявить о существовании континуума, не идентичного множеству Y^X из второй ситуации, как и о существовании чертей (или ангелов) на острии иглы, можно и рассуждать о том и другом, но и стоят тогда эти рассуждения одинаково.

.574. Из концепций материалистической математики о роли и сущности математики следует, что эта наука в принципе может приносить пользу только в том случае, если ее рассуждения и выводы (в какой бы внешней форме они не проводились) остаются адекватными рассуждениям о каких-то алгоритмах и их продуктах.

.575. С точки зрения материалистической математики тот вариант континуума, который не совпадает с множеством Y^X из второй ситуации, просто не представляет интереса, и в лекции (где вообще излагалось лишь основное) я его исключил из поля зрения.

.576. Здесь, разумеется, можно посвятить несколько строк и такому континууму.

.577. Итак, при помощи абстракции предварительного существования объявлено о существовании множества, называемого «континуум». С первого взгляда кажется, что структура (состав элементов) самого этого множества и структура его элементов очень похожи на структуру множества Y^X из второй ситуации. Если окажется, что это всё же не так, то данный объект потеряет значимость с точки зрения материалистической математики. Если окажется, что наш континуум идентичен прежнему множеству Y^X, то к нему будут применены и прежние выводы о мощности.

.578. Большого значения выбор между этими двумя случаями не имеет, но всё же взвесим некоторые «за» и «против».

8. О теории алгоритмов

1981.09

.579. Теория алгоритмов (как мне это говорил Кикуст) утверждает, что континуум не может быть построен по какому-то алгоритму (то есть, не может быть идентичен прежнему нашему Y^X) на основании следующего рассуждения: Предположим, что имеется алгоритм A, строящий континуум (множество C). Тогда можно написать алгоритм B, который (или одновременно с алгоритмом A, или интерпретируя его) при помощи диагонального метода будет строить элемент E, который никогда не будет построен алгоритмом A, но в то же время по всем признакам принадлежит множеству C. Из этого делается вывод, что множество C не может быть построено по алгоритму A.

.580. Сохраняя предыдущие обозначения, придадим им более общий смысл и взглянем на проблему с более общей точки зрения. Пусть вообще какой-то алгоритм A претендует на то, что он строит вообще какое-то множество C. Как могут обстоять дела с алгоритмом B, строящим какой-то элемент E множества C?

.581. С моей точки зрения здесь возможны три ситуации:

.582. а) существует алгоритм B, совершенно независимо от алгоритма A строящий элемент E, который принадлежит множеству C, но которого нет среди продуктов алгоритма A (бесспорное доказательство того, что алгоритм A не строит множество C);

.583. б) существует алгоритм B, параллельно с тем, что алгоритм A строит множество C, строящий элемент E, который не может быть в C (с выводами повременим);

.584. в) не существует таких алгоритмов, какие описаны в пунктах (а) {.582} и (б) {.583} (бесспорное доказательство того, что алгоритм A строит множество C).

.585. Выводы в первом и третьем случае не вызывают сомнений. Как же быть со случаем (б)? Теория алгоритмов делает в случае (б) такой же вывод, как и в случае (а), тем самым игнорируя разницу между независимым и зависимым (от алгоритма A) построением элемента E алгоритмом B.

.586. Если бы теорию алгоритмов строил я, то не стал бы перемешивать случаи (а) и (б), а различал бы везде все три ситуации. В случае (б) я говорил бы, что алгоритм A всё же строит множество C (так как алгоритм B не может задать отличающийся элемент «заранее», а лишь, параллельно с работой алгоритма A, копаясь в его продуктах, интерпретируя его и т.д.), но что при этом A и C, конечно, отличаются от тех, которые имеем в случае (в). (Не столь важно как говорить в этом случае, сколь важно различать ситуации).

.587. При такой системе понятий у меня отпал бы вопрос о мощности континуума, а вместо этого я начал бы исследовать, почему в одних случаях алгоритм B, описанный в (б), существует, а в других случаях нет, чем обусловлено, от чего зависит его существование, т.е., чем отличаются алгоритмы A и множества C в случаях (б) и (в) (этот анализ я еще проведу в одной из следующих глав {.600}).

.588. Я думаю, что от такой перестройки системы понятий теория алгоритмов только выиграла бы. Но вернемся к той теории алгоритмов, представителями которой являются Кикуст и Подниекс.

.589. Итак, ее вывод о невозможности алгоритмического построения континуума мне кажется крайне сомнительным, я предложил альтернативную систему понятий, но даже если и согласиться с данным выводом, то он не имеет никакого значения для материалистической математики, так как может доказать лишь бессмысленность понятия континуума.

9. Что открыл Кантор ?

1981.09

.590. В предыдущей главе я предложил теории алгоритмов использовать такую систему понятий, которая различает не два случая:

.591. – алгоритм B может построить элемент E множества C, не имеющийся среди продуктов алгоритма A;

.592. – алгоритм B не может построить такой элемент E;

.593. а три случая:

.594. а) алгоритм B может построить элемент E независимо от алгоритма A;

.595. б) алгоритм B может строить элемент E, но только параллельно с работой алгоритма A (интерпретация алгоритма A алгоритмом B – это тоже реализация алгоритма A, т.е. его работа);

.596. в) алгоритм B не может построить элемент E.

.597. В случае {.595} (при континууме и диагональном процессе) мы имеем дело с двумя бесконечными процессами, которые, так сказать, «переплетаются» и не могут «оторваться» друг от друга. Алгоритм A не может построить очередной элемент отображения так, чтобы этот каверзный B не мог предложить альтернативу, но и B, не узнав сперва об очередном шаге A, не может своей альтернативы выдвинуть.

.598. Такова ситуация {.595}, и она на мой взгляд всё же отличается как от ситуации {.594}, так и от ситуации {.596}, и если какая-то теория этой разницы не видит, то с моей точки зрения это просто не делает ей чести.

.599. Если бы в ситуации {.595} не было бы этого «каверзного» алгоритма B, то ни у кого не было бы и ни малейших сомнений в том, что алгоритм A всё же строит множество C (и что ситуации {.595} и {.596} идентичны). Можно ли из существования такого B сделать вывод, что A не строит множество C ?

.600. В предыдущей главе я такой вывод назвал «крайне сомнительным» и обещал разобраться, почему же в некоторых случаях можно придумать такой «каверзный» алгоритм B, а в других случаях нельзя; чем это обусловлено.

.601. Сейчас я попытаюсь это сделать, но только от самого общего случая (когда B – вообще какой-то алгоритм) перейду к более частному (когда B – именно диагональный процесс), что для наших целей достаточно.

.602. Предположим, что алгоритм A строит множество XY (декартово произведение множеств X и Y) и попытаемся теперь придумать такой же «каверзный» алгоритм B, т.е., иными словами, применить к множеству XY диагональный процесс:

.603.

X	y	XY
0	0	0 - 0
I	I	0 - I
2		I - 0
...		I - I
		2 - 0
		2 - I
		...

.604. В этом примере в качестве X взят натуральный ряд, в качестве Y – множество, состоящее из элементов 0 и 1.

.605. Попытаемся применить к XY диагональный процесс и построить элемент, отличающийся от всех остальных (тот самый элемент, который в теории алгоритмов доказал бы, что XY нельзя построить по алгоритму A, а в теории множеств доказал бы, что XY имеет большую мощность, чем X).

.606. В третьем столбике подчеркнуты элементы пар, затронутые этим диагональным процессом. Процесс обрывается после второй пары, потому что в каждой паре только два элемента.

.607. Ну что ж, возьмем декартово произведение трех множеств. Теперь диагональный процесс оборвется после третьей (теперь уже) тройки.

.608. Не надо обладать чрезвычайными способностями, чтобы понять, что какое конечное число множеств мы не перемножали бы декартовым произведением, диагональный процесс (хоть и будет доходить всё дальше и дальше) всё же никогда не будет «благополучно» доведен до конца.

.609. Что необходимо для того, чтобы его завершить? Необходимо, чтобы число элементов в каждом элементе результирующего множества было бесконечным (точнее, стремилось к бесконечности вместе с приближением к бесконечности ряда X, т.е., было пропорционально X).

.610. Итак, этот «каверзный» алгоритм B (диагональный процесс) можно будет придумать и применить тогда, когда алгоритм A будет обладать такой особенностью, что в результирующем множестве будет создавать не только бесконечное (точнее, неограниченно растущее) число элементов самого результирующего множества, но и бесконечное число элементов в каждом его элементе.

.611. Именно эта особенность отличает алгоритмы A из ситуаций {.595} и {.596}. Но, простите, какое отношение эта особенность имеет к возможности построения множества C алгоритмом A или к мощности (числу элементов) множества C? На мой взгляд она имеет отношение только к числу элементов в элементах множества C (надеюсь, математики могут отличить эти два числа).

.612. В лекции, в главе о Канторе имеются такие слова {.438}: «Но если так, то что же доказал Кантор (..)? Иными словами, почему диагональный процесс Кантора можно провести над множеством Y^X и нельзя провести над множеством XY? Секрет здесь в том, что число элементов в каждом элементе множества Y^X (число пар) растет пропорционально числу элементов в X, но не зависит от X (..) во множестве XY (..). Это и есть то различие, которое обнаружил Кантор. Но оно не имеет ни малейшего отношения к мощности множеств, к соображениям о числе элементов или о возможности установления взаимно однозначного соответствия между элементами бесконечных множеств».

.613. Эти слова очень сжато отвечают на вопрос, поставленный в предыдущей главе {.587}: «Чем отличается алгоритмы A и множества C в случаях {.595} и {.596}, почему в одном случае алгоритм B существует, а в другом нет?».

.614. Итак, я считаю, что Кантором была открыта объективно существующая разница между двумя группами бесконечных множеств (и тем самым между алгоритмами, их строящими). Эта разница заключается в том, что в одной группе множеств число элементов в их элементах постоянно, фиксировано, а в другой группе множеств число элементов в их элементах меняется и бесконечно растет. Но эта объективно существующая разница не имеет никакого отношения ни к возможностям построения данных множеств по алгоритмам, ни к мощности этих множеств (т.е., к соображениям о числе элементов и возможностях установления взаимно однозначного соответствия).

.615. Попытки делать из этой объективной разницы подобные выводы в моих глазах свидетельствуют только о туманности и расплывчатости понятий и нестрогости мышления.

.616. Тот умственный ход, который математики здесь делают в случае бесконечных множеств, для конечных выглядел бы так: Допустим, что мы имеем множества A и B, в обоих p элементов (где p конечно). Элементы обоих множеств, в свою очередь, представляют собой множества. Только элементы множества A конечны, а элементы B бесконечны. И нужно быть истинным математиком, нужно быть до глубины души проникнутым математической интуицией и математическим духом, чтобы из этого сделать вывод, что множество B имеет большую мощность, чем A, и что множество B нельзя построить ни по какому алгоритму. Простые смертные вроде меня не способны на столь грациозный умственный аллюр.

.617. Итак, подводя итоги обсуждению этих вопросов, я могу сказать, что ни на шаг не отступил от своей позиции. Наоборот, чем глубже я вникаю в эти вопросы, тем больше убеждаюсь, что традиционная расплывчатость основных понятий и нестрогость мышления, характерные для современной (т.е. – устаревшей) математики, здесь дала просто смешные результаты.

.618. Я предложил путь, как математическое мышление сделать более строгим и точным. Но пока что никто не прислушивается к моим словам. И всё же я верю, что когда-нибудь математика будет поставлена на разумные основания, ибо ничто не может поколебать мое убеждение, что и среди математиков должны попадаться люди, способные мыслить четко, ясно и логично.

1994.12.26 17:57 понедельник
(через 13 лет, 3 месяца)
Второе Рождество

.619. Ах, какое самоуверенное заявление автора! «Ничто не может поколебать...»! Однако ж Подниекс и Кикуст поколебали. Теперь я очень сомневаюсь в том, что среди математиков могут попадаться люди, способные мыслить. (Про «четко, ясно и логично» уж помолчим).

10. Две системы понятий

1981.10
(раньше на 13 лет, 2 месяца)

.620. Третий семинар в ВЦ ЛГУ не состоялся, так как я на него не явился. Утром 1 октября 1981 года я вручил Кикусту настоящий сборник со всем предыдущим текстом. Сборник был в ВЦ ЛГУ ровно две недели. Вечером 14 октября Кикуст передал мне его вместе со следующей запиской:

* * *

.621. К лекциям о математике и оценке семинара. (*Оригинальный текст записки см. в* {.2092} – *ред.*).

.622. Кантор открыл следующую вещь.

.623. Определение 1. Множества A и B будем называть эквивалентными, если существует однозначное отображение множества A в множество B и однозначное отображение множества B в множество A (т.е., каждому элементу первого множества соответствует свой элемент второго множества).

.624. Определение 2. Обозначим через ℵ (A) множество всех подмножеств A.

.625. Теорема. Никакое множество A не эквивалентно с ℵ (A).

.626. Доказательство. Пусть существует однозначное отображение множества ℵ (A) в множество A, которое обозначим через F.

.627. Определим: $m_0 = \{ F(m) \mid F(m) \notin m \}$. Из этого определения сразу вытекает, что $F(m_0) \in m_0 \Leftrightarrow F(m_0) \notin m_0$. Полученное противоречие позволяет нам сделать вывод теоремы.

.628. Вопрос: Что означает существование неэквивалентных множеств?

.629. Классическим математикам оно позволяет развить понятие числа элементов в бесконечных множествах.[11]

* * *

.630. Это сжатое изложение того, что каждый может прочитать в любом учебнике, было всё, чем ВЦ ЛГУ отреагировал на мой сборник. Не были, таким образом, высказаны ни какие-либо утверждения о несостоятельности моих построений и рассуждений, ни о их состоятельности. Как и прежде, в ВЦ ЛГУ не нашлось сил, желания или времени, чтобы разобрать мое рассуждение.

.631. Конечно, каждый имеет право заниматься тем, чем он хочет заниматься, и я не хочу и не собираюсь заставлять кого бы то ни было разбирать то, что он не хочет разбирать. Я только фиксирую тот факт, что в настоящее время против моей концепции не выдвинуты никакие контраргументы.

.632. Что же касается сжатого пересказа учебника (с которым, можете не сомневаться, я достаточно знаком), то я могу только еще раз (без всякой надежды, что это повлияет на ход дела) кратко повторить то, что говорил уже много раз на сотнях страниц своих сборников.

.633. Пусть мой уважаемый оппонент возьмет свою записку и покажет ее какому-нибудь пастуху с каких-нибудь гор. Я уверен, что этот пастух ничего не поймет в этом. Почему? Потому, что здесь используется целая система понятий, и для понимания сказанного требуется эту систему знать. Надо знать, например, что такое «определение», что такое «множество», что такое «однозначное отображение», когда оно «существует», и когда не существует – и т.д. и т.п. Пастух этой (весьма обширной) системой понятий не обладает.

.634. Я такой системой понятий обладаю (по крайней мере в размере, достаточном для понимания того, что оппонент мне сказал). Но у меня другая беда. Я обладаю двумя системами понятий. Кроме системы классической математики у меня есть и другая (увы, тоже весьма

[11] **В.Э. 2009.01.30** (через 27 лет, 3 месяца и 10 дней): Эта записка (как и многие другие) показывает просто шокирующую тупость «профессора» Кикуста и стоящей за ним всей этой шайки «математиков» из Латвийского университета. Им предлагают концепцию, объясняющую математику исходя из понятий мозгового компьютера. Чтобы оценить такую концепцию, нужно посмотреть эти объяснения; чтобы ей возразить, нужно указать, какие именно математические вещи в такой концепции нельзя объяснить. Но пастухи, забравшиеся в преподаватели Латвийского университета, не способны (или намеренно не желают?) понять даже самой элементарной этой основы. Они способны лишь с тупостью, достойной попугаев, непрерывно кудахтать одно и то же, повторяя фразы учебников. Боже мой, какие ничтожества!

обширная) система понятий, которую я теперь называю системой материалистической математики.

.635. И вот, в свое время я начал с того, что стал из системы классической математики (обозначим ее через К) переводить различные утверждения в систему материалистической математики (обозначим ее через М). Я читал книги по системе К и в уме прикидывал, как же это будет выглядеть в системе М. И долго всё шло гладко. Числа, операции, функции, множества, алгебра, уравнения, дифференциалы, аксиомы – всё получало адекватный перевод в систему М. Правда, иногда по-другому расставлялись акценты, то, что было первостепенным в системе К (как аксиоматический метод, например, или формализм), стало второстепенным в системе М, а на первый план выдвигалось другое (как алгоритмы обработки информации о множествах), но, всё равно, адекватный перевод из системы К в систему М существовал.

.636. И вдруг: бац! – место, которое невозможно адекватно перевести в систему М так, чтобы оно сохранило хоть какой-то смысл и значение. Что бы это значило? Почему везде получается, а здесь не получается? Может быть в системе К это место просто недостаточно четко разработано? Но как же оно может быть ошибочным, если математика имеет столь широкое применение на практике? А, оказывается, как раз это место-то и не имеет никаких приложений на практике. Уравнения имеют, дифференциалы имеют, а кардинальные числа не имеют, хоть ты лопни! Так, значит, нет объективных препятствий к тому, чтобы признать это ерундой. Но, конечно, отсутствие приложений – это лишь необходимое, но вовсе не достаточное условие несостоятельности теории.

.637. Недостаточную четкость этого места в системе К я и хотел показать своими предыдущими рассуждениями. Повторение всем известных высказываний в системе понятий К я никак не могу признать достойным мне ответом.

.638. Вот что я думаю об этих высказываниях в системе понятий К:

.639. К определению 1 {.623}: оно расплывчато (в первую очередь потому, что не известно, что означает слово «существует», а также слова «множество» и «соответствует»).

.640. К определению 2 {.624}: оно расплывчато (потому что недостаточно ясно, что подразумевается под словами «множество всех подмножеств» и какое его «существование» имеется в виду прежде, чем его как-то обозначать).

.641. К теореме {.625}: из-за расплывчатости предыдущих определений утверждение теоремы расплывчато.

.642. К доказательству {.626}: имея столь расплывчатые основные понятия бессмысленно что-либо доказывать.

.643. К вопросу {.628}: понятие «неэквивалентных множеств» расплывчато и бессмысленно говорить о существовании или несуществовании таких множеств.

.644. К ответу {.629}: я стопроцентно с ним согласен. На базе расплывчатых понятий «классические математики» развили громадную туманную теорию.

.645. Конечно, если не подвергать сомнению точность основных понятий (если, например, не различать разновидности актуально бесконечных множеств в зависимости от того, над каким процессом применена абстракция актуальной бесконечности и т.д.), то «Кантор прав и всё окей», как я это писал уже раньше {.550}. Если мой оппонент хотел сказать именно это своей запиской, то он зря старался, я же этого не отрицаю.

.646. Но я подвергаю сомнению именно точность основных понятий (использованных в приведенных оппонентом определениях). И подвергаю сомнению из-за невозможности адекватного перевода данных утверждений из системы понятий К в систему понятий М. Теорема Кантора появляется в лекции только как пример тех (редких) случаев, когда такой перевод дает осечку.

.647. В лекции и метамедитации СЕМИНАР (в том числе в главе «Что открыл Кантор?» {.590}) я пытался показать, как теорема Кантора выглядит в системе понятий М. В ответ мой оппонент написал мне как она выглядит в системе понятий К.

.648. Мне жаль, что никто не желает обсуждать систему понятий М. Но мне известны и причины этого. Для освоения системы понятий М требуются усилия, сравнимые с теми, которые необходимо приложить вышеупомянутому пастуху {.633}, чтобы освоить систему понятий К. А это большие усилия.

.649. Именно это, а не какие бы то ни было логические контраргументы против моих рассуждений, как я считаю, является причиной отсутствия успеха моих построений.

.650. Но, даже если расценивать содержание записки Кикуста как полноценное возражение против того, что именно открыл Кантор, даже тогда без всякого ответа остаются мои соображения о различении трех ситуаций вместо двух {.541}, об абстракциях актуальной бесконечности и предварительного существования {.554} и даже о различении зависимого и независимого «каверзного алгоритма B» {.583} и о выводах из его существования {.614}, словом, без всякого ответа остается всё то, что составляет собственно логический костяк моей концепции.

.651. Кикуст и Подниекс не сказали на счет этого ни «да», ни «нет».

.652. Итак, Кикуст и Подниекс, выдвинувшие против моей лекции единственный контраргумент и получившие ответ с логическими аргументами в начале и порядочной дозой иронии в конце, отделались молчанием насчет тех логических соображений, которые я выдвинул в своем ответе.

.653. Чем же объясняется их молчание? Я вижу этому только одно объяснение. Вряд ли они стали бы скрывать свои возражения, если бы располагали какими-нибудь логическими доводами против моих рассуждений. Видимо они находятся в некотором замешательстве: с одной стороны им нечего возразить, а, с другой стороны, они не могут допустить мысли, чтобы этот безумец, этот дикарь, этот человек со стороны мог быть прав вопреки мнению величественной науки.

11. Рассуждение о Системах

1981.10

.654. Одновременно с проведением и обсуждением семинара в ВЦ ЛГУ передо мной встала задача прокомментировать медиотеку П.К. В этой связи я написал «Рассуждение о Системах», в котором говорится о том, как, на мой взгляд, нужно обращаться с чужими сочинениями. Это рассуждение сделано перед лицом необходимости мне комментировать чужие сочинения. Но в равной степени это относится и к случаю, когда другие комментируют мое сочинение. Поэтому мне показалось вполне уместным привести это рассуждение здесь и даже закончить им метамедитацию СЕМИНАР, сделав его как будто подведением итогов семинара в ВЦ ЛГУ и вообще моих первых контактов с математиками. Вот «Рассуждение о Системах» {.1416}:

* * *

.655. Итак, передо мной стоит задача прокомментировать медиотеку П.К. Какими же принципами руководствоваться при комментировании? Писать о чужих сочинениях можно по-разному.

.656. Можно, например, указывать: «Это написано или придумано хорошо», «это плохо», «здесь интересно», «там не хватает, надо доработать» и т.д. Так наставник комментирует работу ученика, руководитель диссертанта, а иногда и какой-нибудь критик с завышенным самомнением узурпирует себе право так рассуждать о сочинении автора. Если кто-нибудь взялся бы подобным образом комментировать мою медиотеку, то он подвергся бы весьма реальному риску получить от меня послание, в котором я, используя все ресурсы своего красноречия, старался бы «смешать его с дерьмом».

.657. Комментируя чужое сочинение, можно поступать и так: читать данную работу и, следуя ассоциациям, записывать всё, что приходит в голову. Этот стиль свободного эссе весьма распространен. Но для меня и он не подходит. Мне нужна система, нужна взаимосвязь частей, переплетение элементов, внутренняя логика, нужно, чтобы «общий принцип связывал всё» (*ср.* {PSYHE.426} – *ред.*).

.658. И поэтому всегда, когда я сижу над чужой работой, я воспринимаю ее как Систему. Как Систему, которую нужно сравнить с моей Системой. Именно сравнить, а не критиковать или хвалить. Критика и хвала, правда, будут вытекать из результатов сравнения. Например, если в каком-то месте эта другая Система будет отличаться от моей, то я начну приводить аргументы, обоснующие мой выбор в противовес выбору оппонента (и здесь вместе с аргументами логическими (но обязательно вместе с ними) могут появиться и подколки и ирония). Всё это тогда, конечно, можно будет считать и критикой чужого мнения, но можно это считать и в большей степени оправданием моего собственного решения. А на самом деле это всегда в первую очередь сравнение двух систем.

.659. Эти две системы могут в чем-то совпадать. Тогда я отмечу данный факт (и в моем голосе, конечно, прозвучат одобрительные ноты).

.660. Может оказаться и так, что в чужой Системе я увижу что-то такое, чего нет в моей Системе, но что очень для нее подходит. Тогда я немедленно включу это в свою Систему, и в адрес автора рассматриваемой Системы польется поток похвал и вознесений.

.661. Таковы в самых основных чертах те принципы, которые руководят мною, когда я стою перед чужими работами или взглядами. Как видно, всё основывается на сравнении двух систем, это самое фундаментальное, остальное вторично и вытекает из сравнения.

.662. Естественно, что эти принципы симметричны, то есть, что я ожидаю, чтобы тот, кто берется что-то говорить о моих сочинениях или взглядах, противопоставил моей Системе свою Систему. Конечно, любой критик ту или иную Систему всегда имеет и выступает с ее позиций. Но вся беда в том, что если критик написал две-три странички рецензии, то в них его Система не видна. Нет в них явного и открытого противопоставления и сравнения двух систем. Нет того, что является, как я это только что описал, с моей точки зрения самым главным в комментировании чужих работ.

.663. Написать обширную рецензию с изложением своей Системы, с противопоставлением ее рассматриваемой Системе, с их сравнением, конечно, нелегко. Так что же, маленькие рецензии вообще нельзя писать? Писать, конечно, можно, но в маленьких рецензиях и толку мало.

.664. Я об этом рассуждал так много не только потому, что мне предстоит комментировать медиотеку П.К., но и потому, что мои собственные сочинения уже длительное время подвергаются комментированию со стороны других людей. И если до сих пор ни один из тех, кто что-то говорил или писал о моих работах, не смог ни на миллиметр сдвинуть меня с моей позиции, то в этом виновато вовсе не мое упрямство, а то, что до сих пор не могло быть и речи о том, чтобы кто-нибудь противопоставил моей Системе свою Систему и провел их сравнение (а это, наверное, единственное, что на меня может повлиять).

.665. С моей точки зрения у меня до сих пор вообще не было противника. Пусть против моей Системы встанет другая Система, объясняющая то же самое, что объясняю я! Пусть ее автор или сторонник проведет ее сравнение с моей (с приведением аргументов в пользу ее)! Пусть она выдержит такое сравнение, проведенное мною (естественно, с приведением аргументов в мою пользу)! Вот тогда, только тогда можно будет говорить, хороша или плоха моя Система, удачна или неудачна.

.666. Моя Система огромна. Это цельное мировоззрение, охватывающее всевозможные вопросы от Большого Взрыва до психологии любви. Мои математические воззрения или взгляды об искусственном интеллекте – лишь частные проявления этого мировоззрения. И противопоставить ей в целом можно тоже только цельное мировоззрение. Это, разумеется, нетривиально.

.667. В качестве примера можно привести наши взаимоотношения с П.К. Он написал о моем сборнике «О природе чисел» {NATUR} две короткие рецензии (пункты {NATUR.2563} – {NATUR.2571} и {NATUR.2631} – {NATUR.2639} диалога «ПК») и примерно то же самое повторил и в устных разговорах. В пункте {NATUR.2631} он, например, пишет: «утверждения В.Э. о том, что такое математика, нельзя воспринимать всерьез, о чем они сами и свидетельствуют». Я мог бы воспринимать всерьез это утверждение П.К. только в том случае, если бы он сказал, что же такое математика согласно Системе П.К., то есть, если бы он в этом вопросе провел сравнение систем. Однако он лишь отвергает мое понимание математики, не противопоставляя ему ничего. Подобная ситуация наблюдается сплошь и рядом.

.668. (Но что тут говорить об отсутствии сравнения, если с П.К. происходят еще более удивительные вещи. В ответ на его рецензии я пишу в диалоге ПК длинные пояснения своего понимания природы и предмета математики, П.К. отвечает в пункте {NATUR.2764} что он «не возражает» и в пункте {NATUR.2755} что «причины нашего взаимонепонимания имеют лишь терминологическую природу», а после этого, как ни в чем не бывало, продолжает считать мой общий взгляд на математику не имеющим значения и недостойным публикации, хотя речь идет не больше и не меньше, чем о переопределении или уточнении определения всего предмета всей математики (!). Разве это не удивительно?).

.669. Но вернемся к сравнению систем. Итак, пока я не увижу другую Систему, которая лучше моей, вряд ли найдется такая критика, которая смогла бы заставить меня изменить свою позицию.

.670. И, опять-таки, эта ситуация симметрична. Вряд ли кто-нибудь (особенно в математике) примет мою Систему, пока я не сделаю противопоставление и сравнение ее с Системой традиционной математики (которая в полном объеме настолько грандиозна, что можно с уверенностью сказать: сам я это не сделаю никогда; речь может идти только о сравнении с какой-то подсистемой). О необходимости этого я говорил много раз во многих местах и повторяю это еще раз. (Сошлюсь только, например, на пункты {NATUR.2650}, {NATUR.2651} диалога ПК, где выражаются сомнения, стоило ли вообще вступать в контакты с математиками прежде, чем я вошел в «Сад математики», то есть, не провел сравнение систем в каком-то конкретном вопросе математики).

.671. Итак, чтобы переубедить меня (если вообще это возможно), требуется сравнение другой Системы с моей. Для убеждения моих оппонентов требуется, как минимум, сравнение моей Системы с другой. Ни то, ни другое пока не сделано; и то, и другое требует очень много работы. И поэтому мы имеем то, что мы имеем: я стою на своем, а оппоненты на своем.

3. Глоссарий сборника «Преобразование»

1982.04
(через 6 месяцев)

.672. 32 термина
47 словарных гнезд

.673. Абстрактное множество – см. Множество Абстрактное. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,8).

.674. Абстракция актуальной бесконечности – прием мышления, при котором некоторый бесконечный процесс начинают считать завершившимся, а его продукты – созданными во всей их бесконечности. Физическая сущность этой абстракции состоит в том, что вычислительная система субъекта начинает оперировать номиналией абстрактного множества, определяемого бесконечным алгоритмом, так, как она оперировала бы с номиналией реализованного ею алгоритма. (СЕМИНАР,5).

.675. Абстракция предварительного существования – прием мышления, при котором существование некоторого (умственно воображаемого) объекта предполагается раньше, чем выясняются его отношения с другими объектами и возможности построения его по какому-то алгоритму из других объектов. Физическая сущность этой абстракции состоит в создании номиналии, не связанной ни с какими другими структурами, существующими в вычислительной системе субъекта. (СЕМИНАР,5,6).

.676. Аксиоматический метод – способ описания умственных объектов, при котором описание начинается с Абстракции предварительного существования. Подавляющее большинство аксиоматически описанных объектов (и все, имеющие практическое значение) являются потенциальными продуктами тех или иных алгоритмов. Таким образом, аксиоматический метод практически является альтернативным способом описания потенциальных продуктов алгоритмов или, в конечном счете, самих этих алгоритмов. Аксиоматический метод доминировал в описаниях алгоритмов мышления в эпоху, когда не были разработаны более точные способы описания алгоритмов и особенно когда люди еще не видели за феноменом мышления проходящую по тем или иным алгоритмам деятельность некоторой вычислительной системы (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,17,20,23).

.677. Алгоритм изоквант – в узком смысле слова: один определенный алгоритм, описанный на Эуклидоле. В более общем смысле – любой алгоритм, при помощи Алгоритма равномощности создающий потенциально бесконечный ряд Изоквант, т.е., классов равномощных множеств. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,11).

.678. Алгоритм равномощности – в узком смысле слова: один определенный алгоритм, описанный на Эуклидоле. В более общем смысле – любой алгоритм, позволяющий установить, равномощны ли два Конкретных множества или нет. Алгоритм равномощности играет решающую роль при определении системы натуральных чисел. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,11).

.679. Алгоритмы вторичные – алгоритмы мышления, оперирующие с цифрами и другими знаками. Существование изоморфизмов между системами Первичных и Вторичных алгоритмов позволяет при решении практических задач заменить Первичные алгоритмы Вторичными. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,14,22).

.680. Алгоритмы первичные – алгоритмы мышления, оперирующие множествами и составляющие главный предмет математики. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,14,22).

.681. Вторичные алгоритмы – см. Алгоритмы Вторичные. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,14,22).

.682. Зависимое соответствие – см. Соответствие Зависимое. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,24 СЕМИНАР,5).

.683. Изокванта – множество, элементами которого являются равномощные множества. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,11).

.684. Квантолина – множество всех Изоквант, бесконечный ряд множеств, потенциальных продуктов Алгоритма изоквант. Отождествляется с множеством натуральных чисел в системе Традиционных чисел. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,11).

.685. Конкретное множество – см. Множество Конкретное. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,8).

.686. Конструктивная математика – см. Математика Конструктивная. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,25 СЕМИНАР,5).

.687. Континуум – умственный объект, существование которого объявлено при помощи Абстракции предварительного существования. В зависимости от нюансов аксиоматически объявленных свойств континуума, могут быть два его варианта: континуум, не совпадающий с множеством вещественных чисел как продуктов некоторой системы алгоритмов, и континуум, совпадающий с таким множеством. Первый вариант не имеет практического значения, второй вариант обладает всеми свойствами системы потенциальных продуктов алгоритмов. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,24 СЕМИНАР,5,7).

.688. Линейные числа – см. Числа Линейные. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,5).

.689. Математика конструктивная – направление в математике, считающее, что действительно существуют только такие математические объекты, для которых можно указать алгоритм (умственного) построения, и требующее математические рассуждения проводить только о таких объектах. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,25 СЕМИНАР,5).

.690. Математика материалистическая – направление в математике, считающее, что действительно существуют только материальные объекты, и требующее любое математическое рассуждение согласовать с этим постулатом. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,25 СЕМИНАР,7).

.691. Математический формализм – см. Формализм Математический. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,8,23).

.692. Материалистическая математика – см. Математика Материалистическая. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,25 СЕМИНАР,7).

.693. Метрические числа – см. Числа Метрические. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,5).

.694. Множество – одно из самых фундаментальных понятий Материалистической Математики. Согласно концепции, принятой в материалистической математике, множество существует тогда и только тогда, когда существует (в виде материальной структуры) его Номиналия в вычислительной системе субъекта. При наиболее строгом подходе существование двух номиналий означает существование двух множеств (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,8).

.695. Множество абстрактное – наиболее распространенный вид множеств. Определяется тем, что в вычислительной системе существует только номиналия самого множества, но нет номиналий его элементов. Вместо этого имеется алгоритм, позволяющий субъекту относительно любого объекта решить, принадлежит ли тот данному множеству, или нет. В более общем смысле слова абстрактными множествами называются вообще все потенциальные продукты и материалы алгоритмов работы с Конкретными множествами. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,8).

.696. Множество конкретное – самый первичный вид Множеств. Определяется тем, что в вычислительной системе субъекта имеется как номиналия самого множества, так и номиналии всех его элементов. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,8).

.697. Множество неопределенное – вид множеств, при котором существует лишь «одинокая» номиналия множества, не привязанная ни к каким другим объектам в вычислительной системе субъекта. Появляется в результате Абстракции предварительного существования и обычно в дальнейшем уточняется при помощи Аксиоматического метода. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,10,17).

.698. Независимое соответствие – см. Соответствие Независимое. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,24 СЕМИНАР,5).

.699. Неопределенное множество – см. Множество Неопределенное. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,10,17).

.700. Номиналия – физический объект, кодирующий множество в вычислительной системе субъекта. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,8 СЕМИНАР,6).

.701. Обобщенное понятие (у субъекта B об объектах некоторого класса C) – физическая структура (именуемая номиналией), построенная в вычислительной системе субъекта B и используемая этой системой в качестве стандартного кода для продукта некоторого алгоритма А, позволяющего обнаружить изоморфизм между объектами класса С. Иными словами – обобщенное понятие – это Абстрактное множество, определяемое алгоритмом А, по которому субъект В устанавливает наличие изоморфизма (сходства) между объектами класса С. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,4).

.702. Паритерные числа – см. Числа Паритерные. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,5,6).

.703. Первичные алгоритмы – см. Алгоритмы Первичные. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,14,22).

.704. Планарные числа – см. Числа Планарные. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,5).

.705. Реалия – физический объект, вне субъекта соответствующий его номиналии. Не для всех множеств существуют реалии. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,8).

.706. Содержательный (в математике) – способ, противоположный формальному (см. Формализм Математический). Содержательные (рассуждения, теории и т.д.) касаются Первичных алгоритмов и множеств, в то время, как формальные – Вторичных алгоритмов и знаков. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,18).

.707. Соответствие (между абстрактными множествами) – результат процесса, проводимого субъектом по определенному алгоритму и образующего пары потенциальных продуктов двух других алгоритмов (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,24 СЕМИНАР,5).

.708. Соответствие зависимое – Соответствие, установленное между потенциальными продуктами двух алгоритмов, один из которых вызывается другим и работает с продуктами этого другого. В большинстве случаев зависимое соответствие между продуктами двух алгоритмов установить невозможно. Теорема Кантора фиксирует этот факт для некоторого подмножества связанных алгоритмов. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,24 СЕМИНАР,5).

.709. Соответствие независимое – Соответствие, установленное между потенциальными продуктами двух алгоритмов, не вызывающих друг друга и не работающих с продуктами друг друга. Независимое соответствие между продуктами двух бесконечных алгоритмов можно установить всегда. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,24 СЕМИНАР,5).

.710. Традиционные числа – см. Числа Традиционные. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,6).

.711. Формализм математический – направление в математике, требующее полностью оговорить Вторичные алгоритмы. Материалистическая математика требует того же самого относительно Первичных алгоритмов. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,18,23).

.712. Числа – Абстрактные множества, определяемые тем или иным алгоритмом сравнения множеств. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,12).

.713. Числа линейные – одна из систем Паритерных чисел, определяемая алгоритмом классификации пар, учитывающим мощность членов пары и их ориентацию на прямой. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,5).

.714. Числа метрические – одна из систем Паритерных чисел, определяемая алгоритмом классификации, учитывающим только мощность членов пары. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,5).

.715. Числа паритерные – три системы чисел (потенциальных продуктов классифицирующего алгоритма), при которых в качестве определяющего алгоритма используются соответственно три алгоритма классификации пар множеств по мощности и ориентации членов пары. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,5,6).

.716. Числа планарные – одна из систем Паритерных чисел, определяемая алгоритмом классификации пар, учитывающим мощность членов пары и их ориентацию на плоскости. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,5).

.717. Числа традиционные – система чисел, при которой для базисного подмножества (натуральных чисел) в качестве определяющего алгоритма используется алгоритм классификации множеств по мощности (Алгоритм Равномощности), а для дальнейших расширений – алгоритмы арифметических операций. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,6).

.718. Эуклидол – один из многочисленных возможных языков изложения теорий, ориентированных на обработку теорий компьютером. Разработан с учетом концепций теорики и Материалистической математики. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,10,17,19).

.719. Эуклидос – одна из многочисленных возможных реализаций языка Эуклидола, система программ, моделирующая некоторые аспекты интеллектуальной деятельности человека. Разработана в ИЭВТ на ЕС ЭВМ под операционной системой Диспетчер. (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ,10,17,19).

* * *

1996.04.18 15:10
(через 14 лет, 0 месяцев)

.720. (*Прим. ред*.: этот документ является копией машинописного глоссария 15-го тома Третьей Медиотеки, воспроизведенной без попыток приспособить ее к современным компьютерным глоссариям Ведды).

Оглавление