Дневник

Quod sentimus loquamur,
quod loquimur sentiamus!

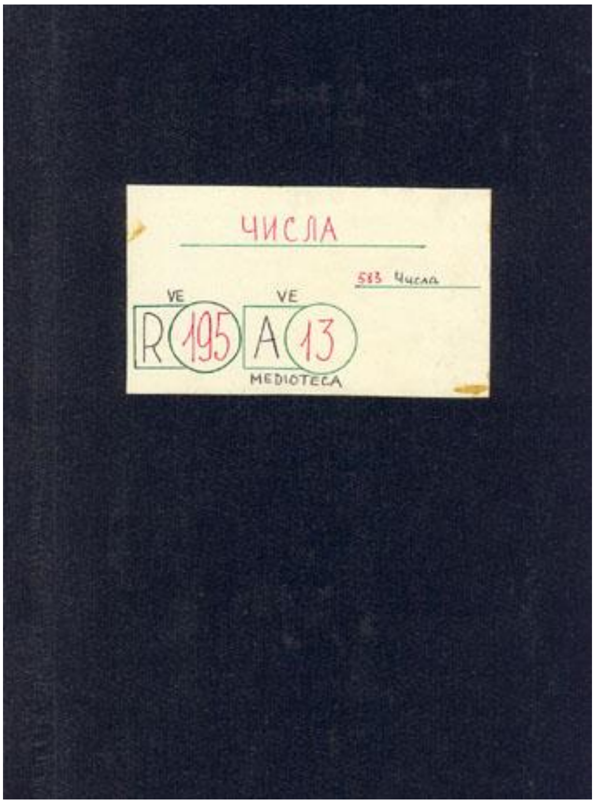
VEcordia

Извлечение R-NATUR3

Открыто: 2007.01.14 00:48
Закрыто: 2009.01.11 00:16
Версия: 2017.05.09 00:08

ISBN 9984-9395-5-3
Дневник «VECORDIA»

ISBN 9984-688-34-8
Валдис Эгле. «О природе чисел»



**Обложка сборника «Числа»
в Третьей Медиотеке**

Валдис Эгле

ЧИСЛА

Сборник «О природе чисел»
Часть 3-я

Impositum

Grīziņkalns 2017

Talis hominis fuit oratio,
qualis vita

10. Тетрадь QUANT

ЧИСЛА
Определение системы чисел

> Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу.
>
> *Исаак Ньютон*

Написано: 1979.01 – 1980.09 Рига

Медия QUANT (в Третьей Медиотеке медитация ЧИСЛА) содержит центральную работу сборника «О природе чисел», рассматривающую собственно числа.

1. Таинство чисел

1979.01
(раньше на 1 год, 3 месяца)

.1692. Людей издавна очаровывали и пленяли таинственные законы чисел. Две с половиной тысячи лет тому назад мыслитель из Кротона, имя которого теперь известно каждому школьнику, сделал из учения о числах религию, считая незыблемые законы чисел мистической основой всего мира. С тех пор люди узнали о числах очень много нового, выросла мощная наука математики, вышли на арену удивительные числа π и e, появились числа отрицательные и иррациональные, комплексные и трансфинитные, алгебры и кватернионы.

.1693. Но узнали ли люди, что такое число?

.1694. И я с детства видел что-то удивительное и таинственное в этих неожиданных и странных переплетениях и превращениях чисел. Меня поражало то, как функция может рассыпаться в ряд, и как ряд собирается в функцию. Мне было совершенно не понятно, почему, собственно, это число e появляется в самых неожиданных местах, почему, собственно, геометрическое число π должно равняться сумме каких-то там уменьшающихся дробей.

.1695. Законы чисел исследуются и открываются как законы физики или химии, числа изучаются как электричество или атом. Но кто может увидеть или потрогать число? Где они, эти странные объекты самой точной из наук? Они лишь абстрактные видения, какая-то тень, призрак, ничего материального! Разве это не удивительно?

.1696. Что же такое число? Какова их природа, откуда они, кто они, эти неуловимые солдаты самой стройной в мире шеренги? Я надеялся, что высшая школа даст мне ответ, но она лишь обрушила на меня новую лавину проделок этих невидимых существ. Я искал ответ в учебниках теории чисел, но нашел лишь утверждения о существовании множеств натуральных, рациональных, вещественных и комплексных чисел. Всё это было не то, что я искал. Теории чисел изучали законы, действующие в этих множествах, но ничего не говорили мне о том, откуда же, собственно, взялись сами числа, в чем их сущность, что такое – «число». Какой-то проблеск давали лишь подходы Кантора и Пеано, но этого слишком мало, это лишь шаг в нужном направлении, в то время, как впереди длинный путь.

.1697. В течение многих лет я вновь и вновь задумывался над таинственной сущностью чисел. За это время оформилось мое мировоззрение, которое я считаю взглядами неисправимого материалиста, постепенно я осознал, с какой стороны нужно подходить не только к числам, но и вообще ко всем явлениям этого мира.

.1698. И вот, из тумана таинства стали вырисовываться очертания здания, и я увидел нечто странное. Я увидел все знакомые вещи – числа, умножение, деление, функции – но какими необычно причудливыми они выглядели в новом свете!

.1699. Сейчас, мой читатель, Вы сами получите возможность судить об этом. Одна из целей этой медитации – взглянуть на числа с точки зрения материалистической теории отражения.

2. Цели медитации ЧИСЛА

1980.06
(через 1 год, 5 месяцев)

.1700. В этой медитации я поставил перед собой четыре основных цели:

.1701. 1) Описать с фундаментальной точностью (то есть: на языке Эуклидоле и так, чтобы это можно было реализовать на ЭВМ) алгоритмы, лежащие в основе одной (метрической) системы чисел.

.1702. 2) Рассмотреть с философской точностью две других системы чисел (линейных и планарных чисел).

.1703. 3) Этим дать:

.1704. а) углубление того, о чем я конспективно писал в НУМЕРИКЕ;

.1705. б) практическое применение идей, изложенных в ТЕОРИКЕ;

.1706. в) пример использования одного из аппаратов Эуклидола (аппарата АЛГОРИТМ).

.1707. Таким образом, эта медитация целиком опирается на медитации ТЕОРИКА и АЛГОРИТМ. В первой был описан общий подход к теориям, использованный здесь, во второй – используемый здесь аппарат описания теорий.

.1708. Собственно тема этой медитации – мои теперешние представления о природе чисел (трудности описания именно этих взглядов при помощи традиционных методов изложения теорий {.411} непосредственно заставили меня задуматься над самой теорикой). Эти взгляды я иногда называю теорией чисел: «теорией» потому, что, согласно системе понятий, принятой в ТЕОРИКЕ {.515}, любая часть отражения мира называется теорией, а «чисел» потому, что предмет этой теории – природа чисел. Но то, о чем говорится здесь – это не совсем то, что под словами «теория чисел» понимают в математике. Я не собираюсь здесь говорить ни о каких-то новых закономерностях в натуральном ряде, ни с точки зрения теорики систематически излагать и объяснять общеизвестные закономерности. Я здесь пытаюсь лишь уяснить, откуда взялись сами числа и что они из себя представляют. Я собираюсь остановиться там, где математика начинает {.2650}. Поэтому, чтобы избежать путаницы, лучше вместо слов «теория чисел» употреблять незадействованное слово «нумерика» (от латинского numerus – число).

.1709. Основные идеи этих представлений были уже описаны в конспективной медитации НУМЕРИКА {.170}. Поэтому в отношении изложения мыслей о числах эта медитация является расширенным повторением НУМЕРИКИ. Некоторые вопросы, достаточно подробно рассмотренные в НУМЕРИКЕ, я здесь не повторяю.

.1710. Этим описанием я хочу заодно дать пример практического применения идей, в общем виде изложенных в медитации ТЕОРИКА. Там были описаны основные принципы материалистического подхода к теориям, однако сказанное там еще в очень большой степени отвлеченно и неконкретно, из-за чего читатель легко мог прочитать в теорике не совсем то, что я хотел ему сказать.

3. История чисел

1979.12
(раньше на 6 месяцев)

.1711. Но сначала окинем взором Путь Чисел – историю того, как у людей складывались о них представления.

.1712. Сколь-нибудь ощутимое развитие понятие числа получило у людей сравнительно поздно. Анализ языков народов, современных, но первобытных, показывает, что еще совсем недавно их предки видели общее между этими тремя лодками и теми тремя лодками, но не видели общего между тремя лодками и тремя человеками: слово «три» в контексте с лодками в этих языках звучит совсем иначе, чем в контексте со словом «человек». Еще в веке 1800 многие народы Австралии и Полинезии имели в своем языке только два числительных: «один» и «два», а самое большое число, что они могли назвать, было «два–два–два».

.1713. Эти народы находились в том состоянии, в каком передовые народы пребывали 10–15 тысяч лет тому назад, и есть все основания думать, что у современных развитых народов в году 02000 (целых 30˙000 лет после появления человека современного типа – *Homo sapiens*) дела с числами обстояли не лучше, а про неандертальцев и питекантропов и говорить нечего.

.1714. Итак, далее первых нескольких членов натурального ряда, понятие о числах начало распространяться, видимо, только с неолита.

.1715. Первая система записи чисел была проста и изящна: сколько предметов было в измеряемой совокупности, столько черточек или зарубинок ставилось в ее обозначении. Но представьте себе, каково было приказчикам фараона, руководившим постройкой пирамид и управлявшим десятками, а то и сотнями тысяч человек! Когда ряды черточек стали слишком длинными, писцы задумались о том, как бы их сократить.

.1716. В веках 07000 – 07500 (то есть, в то время, когда строились пирамиды) в Египте появилась десятичная непозиционная система счисления, позволявшая записывать числа до ста миллионов. Запись самого большого числа – 99.999.999 – в этой системе требовала 72 знака. По сравнению со ста миллионами знаков предыдущей системы это была экономия значительная.

.1717. Около года 08000 в Вавилонии была создана первая позиционная система счисления с основанием 60, но обозначения чисел в ней не были однозначны и, не зная контекста, было невозможно установить, записано ли это, например, число 181 или 108001.

.1718. В веке 09500 в греческих колониях в Малой Азии появилась алфавитная ионийская система счисления, идея которой спустя 1500 лет через Византию дошла и до славян. Несмотря на то, что принципы, лежащие в ее основе, были сложнее, чем принципы Египетской системы, и что максимальные числа, которые можно записать, в ней были значительно меньше, чем у египтян, она была удобнее в повседневной жизни. Однако греческие астрономы пользовались не своей, а вавилонской системой.

.1719. Наконец, не позднее века 0400 в Индии появилась десятичная позиционная система счисления, которая впервые позволила компактно и однозначно записывать неограниченно большие числа. Начиная с века 0800 эту систему стали излагать арабы, в веке 0900 с ней познакомились завоеванные арабами испанцы, в веке 1100 вместе с другими арабскими знаниями, принесенными с Востока участниками крестовых походов, она проникла в Европу, и в веке 1600 дошла до России. В веке 1500 она стала в Европе доминирующей, а около 1700 года вытеснила алфавитную систему в России.

.1720. Хотя удобную систему обозначения сколь угодно больших натуральных чисел мир получил сравнительно поздно, но принципиальную возможность бесконечно продолжать натуральный ряд впервые четко осознали и описали греки в веке 09700, а именно: Эвклид и Архимед.

.1721. Дроби первыми стали употреблять египтяне около 08000 года. Правда, они признавали лишь дроби с числителем 1 и в порядке исключения дробь 2/3. Греки уже свободно обращались с различными дробными числами.

.1722. Таким образом, к началу нашей эры, когда погасла античная цивилизация и наступило средневековье, мир обладал системой чисел, состоявшей из бесконечного натурального ряда и положительных дробных чисел.

.1723. В веках 0500 – 1000 в Индии систематически применялись отрицательные числа, которые интерпретировались как долг. Когда широкое распространение получили алгебраические методы, итальянские математики века 1500 уже вовсю оперировали отрицательными числами. Одним из первых был врач и философ Джероламо Кардано (Cardano 1501/1506 – 1576), чье имя увековечено в предложенной им карданной передаче, которая используется почти во всех современных автомобилях.

.1724. Но окончательно равноправие отрицательных и положительных чисел было признано только после 1637 года, когда 41-летний Рене Декарт опубликовал свою аналитическую «Геометрию»[1], в которой положительные и отрицательные числа получили совершенно одинаковую интерпретацию.

.1725. Те же алгебраические уравнения, которые заставили итальянских математиков работать с выражениями вида $a–b$ при b больше a, привели их и к выражениям типа $\sqrt{–1}$. Первая мысль о мнимых числах появилась, видимо, у того же Кардано и у некоторых его соотечественников. (Действия с мнимыми числами впервые описаны в 1572 году в «Алгебре»[2] инженера Раффаэле Бомбелли (Bombelli ок. 1530 – 1572)).

.1726. Но опять, как и в истории с отрицательными числами, комплексные числа были окончательно признаны только после 1801 года, когда 24-летний сын немецкого водопроводчика и выпускник Геттингенского университета Карл Фридрих Гаусс (Gauss 1777–1855) в своих «Арифметических исследованиях»[3] дал такую их интерпретацию на плоскости, которая принципиально не отличалась от интерпретации других чисел.

.1727. Успех создания системы комплексных чисел из пары «прежних» чисел навел математиков на мысль о построении числовых систем из 3-х, 4-х и более компонентов. В 1843 году 38-летний профессор астрономии в Дублинском университете Уильям Роуан Гамильтон (Hamilton 1805–1865) предложил идею кватернионов – системы чисел из четырех элементов. Однако, если система комплексных чисел явилась усовершенствованием предыдущих систем, то есть, в ней не только соблюдались все свойства «прежних» систем, но она еще обладала и алгебраической замкнутостью, то в системе кватернионов уже не соблюдалась коммутативность (переместительность) умножения.

.1728. Член Прусской Академии Наук в Берлине Фердинанд Георг Фробениус (Frobenius 1849–1917) доказал, что ни при помощи 3-х, ни при помощи 5-ти и более компонентов невозможно построить даже такую систему, как кватернионы, то есть, в таких системах теряются еще больше свойств комплексных чисел.

.1729. Уже греки установили несоизмеримость диагонали и стороны квадрата, но к понятию иррациональных чисел они не пришли. В 1766 году 38-летний Берлинский академик, француз Иоганн Генрих Ламберт (Lambert 1728–1777) доказал иррациональность числа π, а в 1844 году 35-летний Парижский академик Жозеф Лиувилль (Liouville 1809–1882) доказал существование трансцендентных чисел, не удовлетворяющих никакому алгебраическому уравнению. Спустя 30 лет, в 1874 году Кантор показал, что множество алгебраических чисел счетно, а множество вещественных чисел несчетно, то есть, что трансцендентных чисел бесконечно много раз больше, чем алгебраических. В 1872 году одновременно 27-летний Георг Кантор и 41-летний ученик Гаусса Рихард Юлиус Вильгельм Дедекинд (Dedekind 1831–1916) дали каждый свое определение непрерывности множества вещественных чисел, а профессор Берлинского университета Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (Weierstraß 1815–1897) примерно в это же время предложил «цифровую» теорию вещественных чисел. Работами Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса закончилось построение системы вещественных чисел.

4. Исторические группы чисел

1979.12

.1730. Такова в основных чертах история того, как люди начали пользоваться различными числами. В этой истории можно выделить три больших этапа и, соответственно, три крупные группы чисел, которые были на этих этапах присоединены к числовой системе:

.1731. 1) После того, как погасла античная цивилизация, человечество обладало такой системой чисел, которые в современной терминологии называются положительными рациональными числами (впредь я их буду называть метрическими числами).

---

[1] Descartes Rene. «Geometrie». 1637.

[2] Bombelli Raphaele. «Algebra, parte maggiore dell' aritmetica, divisia in tre libri». Bologne, 1572.

[3] Gauss Carl Friedrich. «Disquisitiones Arithmeticae». 1801.

.1732. 2) У итальянских математиков необходимость в отрицательных и комплексных числах появилась почти одновременно и в одной и той же связи: при решении алгебраических уравнений. Как отрицательные, так и комплексные числа были признаны после того, как получили геометрическую интерпретацию в работах Декарта и Гаусса (впредь я эти числа буду называть ориентированными числами). Их появление было вызвано алгеброй, и их создание придало системе чисел алгебраическую замкнутость. Построение этой системы завершилось в начале века 1800.

.1733. 3) Самой последней была создана система вещественных чисел; ее построение закончилось в десятилетии 1870. Причиной ее возникновения была уже не алгебра, а исследования бесконечности и непрерывности (впредь я эти числа буду называть континуальными числами).

.1734. Как читателю хорошо известно, эта историческая классификация никак не соответствует общепринятой теперь иерархии чисел, по которой сначала вводятся натуральные числа, потом целые, которые до ввода дробей уже затрагивают понятие отрицательного, потом прибавлением дробных чисел вводятся рациональные, потом решается вопрос об иррациональных числах и непрерывности, и лишь потом вводятся комплексные числа.

.1735. Традиционная иерархия чисел, конечно, кажется логичной, но я всё же хочу обратить внимание читателя на то, что она не соответствует тем усилиям, которые человечеству пришлось приложить для построения той или иной системы чисел. Кроме того, я хочу напомнить читателю и то, что система комплексных (и вещественных, и уже целых) чисел несимметрична, что ось положительных чисел всё же играет особую роль, какой нет ни у какой другой оси, что те числа, которые я назвал ориентированными, никак не могут обойтись без модуля, абсолютного значения, без характеристики теми числами, которые я назвал метрическими, и что даже сама запись метрических чисел самостоятельна, а запись ориентированных чисел представляет собой комбинирование обозначений метрических чисел между собой и с различными знаками.

.1736. На эти «мелочи» я хотел обратить внимание читателя, прежде чем приступить к рассмотрению чисел в свете теорики.

.1737. Итак, история рисует нам три принципиально разные группы чисел. Имеет ли эта картина хоть какой-нибудь смысл, имеет ли какую-нибудь опору под собой? Где искать ответ на этот вопрос?

.1738. Тот подход, каким я приблизился к числам, описан в ТЕОРИКЕ. Настоящая медитация целиком опирается на изложенные там мысли. Медитация ЧИСЛА является, с одной стороны, примером и конкретным воплощением идей ТЕОРИКИ, а, с другой стороны, ТЕОРИКА служит теоретическим фундаментом для ЧИСЕЛ. Я, наверно, уже надоел читателю бесконечными ссылками на ТЕОРИКУ, но всё же я хочу напомнить ему еще два принятых там положения:

.1739. 1) Всякая теория в голове человека – это часть общего отражения, и является набором номиналий и алгоритмов {.753} – следовательно, и системы чисел не могут быть ничем иным, как тоже набором номиналий и алгоритмов.

.1740. 2) Судьей строгости рассуждений я избрал ЭВМ {.598}: если то, о чем я говорю, можно реализовать на ЭВМ, то я рассуждаю достаточно строго, хотя это может быть совсем не похоже на то, что привыкли обозначать словом «строго» математики, и, с другой стороны, если какую-то часть своих представлений я не могу реализовать на ЭВМ, то они еще не обладают фундаментальной точностью.

.1741. В свете этих двух положений и отправимся к числам: для того, чтобы понять, что такое числа, надо разобрать, какие именно алгоритмы и номиналии составляют их теорию; чтобы понять, какой должна быть классификация чисел, надо сначала разобрать классификацию этих алгоритмов, лежащих в основе систем чисел, а сами алгоритмы надо считать описанными точно и строго только тогда, когда они описаны так, что их можно реализовать на ЭВМ. (А реализует их Эуклидос, если они описаны на Эуклидоле).

5. Основания арифметики

1980.05
(через 5 месяцев)

.1742. Определение на Эуклидоле:

```
1§.          ОРТ   Алгоритм      (НА)
                   Материал      (МАТ)
                   Продукт       (РАТ)
                   Конец         (ЕМ)
                   Создать       (СЕ)    %
```

.1743. Определение на Эуклидоле:

```
2§.          АЛГОРИТМ   Метрочисел.
             МАТЕРИАЛ   Базокванта     (Множество).
             ПРОДУКТ    Квантолина     (Изокванта)
                        Релокванта     (Соотношение)
                        Нумерлина      (Изонумера)
                        Денотлина      (Изоденота)
                        Партокванта    (Изопарта)
                        Пропоркванта   (Пропорция)
                        Эталоны,       Р         %
```

.1744. Определение на Эуклидоле:

```
3§.          АЛГОРИТМ   Равномощности.
             МАТЕРИАЛ   База, Эталон.
             ПРОДУКТ    Изок.
       А1    ТЕХ   База (а,е)
             ВО    А2
             ТЕХ   Эталон(е)
             ВО    А3
             ХА    е               ; не кончился ни элемент базы, ни эталон.
             В     А1
       А2    ТЕХ   Эталон(е)
             ВЕ    А3
             МО    Изок, База(а)   ; кончились одновременно.
       А3    ХА    а               ; один кончился раньше.
             ХО    е
             ТЕХ   База(а)
             ВЕ    А1
             КОНЕЦ      %
```

.1745. Определение на Эуклидоле:

```
4§.    В1    ЕХ    Равномощности:
                   Базокванта, Эталоны, Изокванта(к).
       В2    ТЕХ   Базокванта(а,к)
             ВО    В3
             СОЗДАТЬ    Эталоны(к)
             ХА    к
             В     В1
       В3    ХА    а
             ТЕХ   Базокванта(а)
             ВЕ    В2      %
```

.1746. Определение на Эуклидоле:

```
5§.          ХО    а
             ХО    е
             ХО    к
       С1    МО    Соотношение(к), Множество(а)
             МО    Соотношение(к), Множество(е)
             ВО    С2
             ХА    к
```

```
                XA    e
                B     C1
          C2    XA    a
                XO    e
                TEX   Множество(a)
                BE    C1      %
```

.1747. Определение на Эуклидоле:

```
6§.             XO    к
          E1    XO    a
          E2    TEC   Соотношение(a,0),Изокванта(к)
                BO    E3
                MO    Изонумера(к), Соотношение(a)
          E3    TEC   Соотношение(a,1), Изокванта(к)
                BO    E4
                MO    Изоденота(к), Соотношение(a)
          E4    XA    a
                TEX   Соотношение(a)
                BE    E2
                XA    к
                TEX   Изокванта(к)
                BE    E1      %
```

.1748. Определение на Эуклидоле:

```
7§.             АЛГОРИТМ  Сечения.
                МАТЕРИАЛ  Секомое, Секатор.
                ПРОДУКТ   Пересечение, Дополнение.
          A1    TEC   Секомое(р), Секатор
                BO    A2
                MO    Пересечение, Секомое(р)
                B     A3
          A2    MO    Дополнение, Секомое(р)
          A3    XA    р
                TEX   Секомое(р)
                BE    A1
                КОНЕЦ         %
```

.1749. Определение на Эуклидоле:

```
8§.             XO    a
                XO    e
                XO    к
          H1    EX    Сечения:
                      Изонумера(a), Изоденота(e)
                      Пересечение=Изопарта(к).
                XA    к
                XA    e
                TEX   Изоденота(e)
                BE    H1
                XA    a
                XO    e
                TEX   Изонумера(a)
                BE    H1      %
```

.1750. Определение на Эуклидоле:

```
9§.             АЛГОРИТМ  Измерения.
                МАТЕРИАЛ  Измеряемое, мера.
                ПРОДУКТ   Частное(Отмер), Остаток.
          A1    СОЗДАТЬ   Отмер(к).
          A2    TEX   Мера(a)
                BO    A3
                TEX   Измеряемое(e)
```

```
                  ВО        А4
                  МО        Отмер(к), Измеряемое(е)
                  ХА        а
                  ХА        е
                  В         А2
        А3        ХО        а
                  ХА        к
                  В         А1
        А4        МОМА              Остаток, Отмер(к)
                  ОМ                Отмер(к)
                  КОНЕЦ
                  МОРТ              Измерить (Измерения)          %
.1751. Определение на Эуклидоле:
    10§.          АЛГОРИТМ          Старшинства.
                  МАТЕРИАЛ          Соотношение1, Соотношение2.
                  ПРОДУКТ           Старшее, Младшее, Одинаковые,
                                    С1, С2, Ч1, Ч2, О1, О2, КЕУ.
                  МОА       С1, Соотношение1
                  МОА       С2, Соотношение2
        А1        ИЗМЕРИТЬ          С1(0), С1(1)
                                    Частное = Ч1, Остаток = О1.
                  ИЗМЕРИТЬ          С2(0), С1(1)
                                    Частное = Ч2, Остаток = О2.
        А2        ТЕХ       Ч1(а)
                  ВО        А3
                  ТЕХ       Ч2(а)
                  ВО        А4
                  ХА        а
                  В         А2
        А3        ТЕХ       Ч2(а)
                  ВЕ        А7
                  В         А5
        А4        ТЕХ       Ч1(а)
                  ВЕ        А8
        А5        ТЕХ       О1(0)
                  ВО        А9
                  ТЕХ       О2(0)
                  ВО        А10
                  ОМ        С1, С1(0)
                  ОМ        С2, С2(0)
                  МОМА              С1(1), О1
                  МОМА              С2(1), О2
                  ОМА       Ч1
                  ОМА       Ч2
                  ТЕХ       КЕУ(0)
                  ВЕ        А6
                  СОЗДАТЬ           КЕУ(0)
                  В         А1
        А6        ОМ        КЕУ
                  В         А1
        А7        ТЕХ       КЕУ(0)
                  ВЕ        1Больше
                  В         2Больше
        А8        ТЕХ       КЕУ(0)
                  ВЕ        2БОЛЬШЕ
        1Больше             МО        Старшее, Соотношение1
                            МО        Младшее, Соотношение2
```

```
                                  В        Все
                  2Больше         МО       Старшее, Соотношение2
                                  МО       Младшее, Соотношение1
                                  В        Все
                  А9      ТЕХ     О2(0)
                          ВО      Одинаковы
                          В       2Больше
                  А10     ТЕХ     О1(0)
                          ВЕ      1Больше Одинаковы
                          МО      Одинаковые, Соотношение1
                          МО      Одинаковые, Соотношение2
                  Все     КОНЕЦ
                          МОРТ    Сравнить (Старшинства)          %
.1752. Определение на Эуклидоле:
          11§.            ХО      а
                          МОА     Пропорция(0), Изопарта(а)
                  К1      ХА      а
                          ХО      к
                  К2      СРАВНИТЬ        Изопарта(а,0), Пропорция(к,0)
                                          Старшее = Р.
                          ТЕХ     Изопарта(а,0), Р
                          ВО      К4
                          ТЕХ     Пропорция(к+1)
                          ВО      К3
                          ХА      к
                          В       К2
                  К3      МОА     Пропорция(к+1), Изопарта(а)
                          В       К1
                  К4      ТЕС     Пропорция(к,0), Р
                          ВО      К5
                          СЕ      Пропорция(к)
                  К5      МОА     Пропорция(к), Изопарта(а)
                          В       К1      %
.1753. Определение на Эуклидоле:
          12§.            АЛГОРИТМ        Увеличения (Увеличить).
                          МАТЕРИАЛ        =сВкЕ, =сСкЕ.
                          ПРОДУКТ         =сАкЕ.
                          МОА     сАкЕ(0), сВкЕ(0)
                          МОА     сАкЕ(0), сСкЕ(0)
                          МО      сАкЕ, сВкЕ(1)
                          КОНЕЦ           %
.1754. Определение на Эуклидоле:
          13§.            АЛГОРИТМ        Уменьшения (Уменьшить).
                          МАТЕРИАЛ        =ВАКЕ, =ВВКЕ.
                          ПРОДУКТ         =ВСКЕ.
                  А1      ТЕХ     ВВКЕ(а)
                          ВО      А2
                          ХА      а
                          В       А1
                  А2      МО      ВСКЕ, ВАКЕ(а)
                          ХА      а
                          ВЕ      А2
                          КОНЕЦ           %
.1755. Определение на Эуклидоле:
          14§.            АЛГОРИТМ        Выравнивания (Выравнить).
                          МАТЕРИАЛ        =А1, =А2.
                          ПРОДУКТ         =А3, =А4.
```

```
        В1      ТЕХ     А2(1,а)
                ВО      В2
                МОА     А3(0), А1(0)
                МОА     А3(1), А1(1)
                ХА      а
                В       В1
        В2      ТЕХ     А1(1,к)
                ВО      В3
                МОА     А4(0), А2(0)
                МОА     А4(1), А2(1)
                ХА      к
                В       В2
        В3      КОНЕЦ           %
```

.1756. Определение на Эуклидоле:

```
15§.            АЛГОРИТМ        Метросложения (Сложить).
                МАТЕРИАЛ        Слагаемое(1), Слагаемое2, Область1.
                ПРОДУКТ         Сумма, =М1, =М2, =М3, =СР.
                ТЕХ     СР(0)
                ВЕ      А2
                ХА      а
                ТЕХ     Область1(а)
                ВО      А3
                В       А1
        А2      МО      Сумма, Область1(а)
        А3      КОНЕЦ           %
```

.1757. Определение на Эуклидоле:

```
16§.            АЛГОРИТМ        Метровычитания (Вычесть).
                МАТЕРИАЛ        Уменьшаемое, Вычитаемое, Область2.
                ПРОДУКТ         Разность, =В1, =В2, =В3, =ВР.
                МО      Разность, Уменьшаемое
                МО      Разность, Вычитаемое
                ВЫРАВНИТЬ               Уменьшаемое(0), Вычитаемое(0), В1, В2.
                УМЕНЬШИТЬ               В1, В2, В3.
        А1      СРАВНИТЬ        Область2(а,0), В3
                Одинаковые      = ВР.
                ТЕХ     ВР(0)
                ВЕ      А2
                ХА      а
                ТЕХ     Область2(а)
                ВО      А3
                В       А1
        А2      МО      Разность, Область2(а)
        А3      КОНЕЦ           %
```

.1758. Определение на Эуклидоле:

```
17§.            АЛГОРИТМ        Переворота (Перевернуть).
                МАТЕРИАЛ         =А.
                ПРОДУКТ         =В.
                МО      В, А(1)
                МО      В, А(0)
                КОНЕЦ           %
```

.1759. Определение на Эуклидоле:

```
18§.            АЛГОРИТМ        Базирования.
                МАТЕРИАЛ        =АКВ, =ВКС.
                ПРОДУКТ         =АКС.
                МОА     АКС(0), АКВ(0)
                МОА     АКС(1), ВКС(1)
                КОНЕЦ           %
```

.1760. Определение на Эуклидоле:

```
19§.          АЛГОРИТМ   Приравнивания (Приравнить).
              МАТЕРИАЛ   =П1, =П2.
              ПРОДУКТ    =П3, =П4.
       В1     ТЕХ    П2(0,а)
              ВО     В2
              МОА    П3(0), П1(0)
              МОА    П3(1), П1(1)
              ХА     а
              В      В1
       В2     ТЕХ    П1(1,к)
              ВО     В3
              МОА    П4(0), П2(0)
              МОА    П4(1), П2(1)
              ХА     к
              В      В2
       В3     КОНЕЦ      %
```

.1761. Определение на Эуклидоле:

```
20§.          АЛГОРИТМ   Метроумножения (Умножить).
              МАТЕРИАЛ   Множимое, Множитель, Область3.
              ПРОДУКТ    Произведение, =У1, =У2, =У3, =УР.
              МО     Произведение, Множимое
              МО     Произведение, Множитель
              ПРИРАВНИТЬ         Множимое(0), Множитель(0), У1, У2.
              ЕХ     Базирования: У1, У2, У3.
       А1     СРАВНИТЬ   Область3(а,0), У3
              Одинаковые = УР.
              ТЕХ    УР(0)
              ВЕ     А2
              ХА     а
              ТЕХ    Область3(а)
              ВО     А3
              В      А1
       А2     МО     Произведение, Область3(а)
       А3     КОНЕЦ      %
```

.1762. Определение на Эуклидоле:

```
21§.          АЛГОРИТМ   Метроделения (Делить).
              МАТЕРИАЛ   Делимое, Делитель, Область4.
              ПРОДУКТ    Результат, =Д1, =Д2, =Д3, =ДР.
              ПЕРЕВЕРНУТЬ        Делитель(0), ДР(0).
              УМНОЖИТЬ           Делимое, ДР, Область4, Результат.
              КОНЕЦ      %
```

.1763. Определение на Эуклидоле:

```
22§.          АЛГОРИТМ   Экстраполяции (Экстра).
              МАТЕРИАЛ   Левое, Правое.
              ПРОДУКТ    Продолжение, =Л, =П.
              ВЫРАВНИТЬ  Левое, Правое, Л, П.
       А1     ТЕХ    П(0,а)
              ВО     А2
              МОА    Продолжение(0),П(0)
              ХА     а
              В      А1
       А2     ТЕХ    Л(1,к)
              ВО     А3
              МОА    Продолжение(1), Л(0)
              ХА     к
              В      А2
```

```
        A3      КОНЕЦ         %
```

.1764. Определение на Эуклидоле:

```
23§.            АЛГОРИТМ      Интерполяции (Интра).
                МАТЕРИАЛ      Нижнее, Верхнее, Счетчик.
                ПРОДУКТ       Внутренние (Корень), =Н, =В, =С, =Е.
                МОА     Н, Нижнее
                МОА     В, Верхнее
                МОА     Е, Н
        А0      МОА     Корень(0), Нижнее
                МОА     Корень(1), Е
        А1      ТЕХ     Счетчик(а+1)
                ВО      А2
                ЭКСТРА        Левое = Корень(а)
                              Правое = Корень(а+1)
                              Продолжение = Корень(а+2).
                ХА      а
                В       А1
        А2      СРАВНИТЬ      Корень(а+1), Верхнее
                              Старшее = С.
                ТЕС     Корень(а+1), С
                ВЕ      А3
                ТЕС     Верхнее, С
                ВО      А6
                ОМА     Н
                МОА     Н, Е
                СЕ      Е(0,0)
                СРАВНИТЬ      Е, В, Младшее = С.
                ТЕС     Е, С
                ВЕ      А4
                ОМ      Е(0,0)
                ОМА     С
                МОА     С, Е(0)
                МОА     Е(0), С
                ОМА     С
                МОА     С, Е(1)
                МОА     Е(1), С
                СЕ      Е(0,0)
                В       А4
        А3      ОМА     В
                МОА     В, Е
                ОМ      Е(0), Е(0,0)
                СРАВНИТЬ      Е, Н, Старшее = С.
                ТЕС     Е, С
                ВЕ      А4
                СЕ      Е(0,0)
                ОМА     С
                МОА     С, Е(0)
                МОА     Е(0), С
                ОМА     С
                МОА     С, Е(1)
                МОА     Е(1), С
                ОМ      Е(0), Е(0,0)
        А4      ХО      а
        А5      ОМА     Корень(а,0)
                ОМА     Корень(а,1)
                ОМА     Корень(а)
                ХА      а
```

```
                TEX    Корень(а)
                ВЕ     А5
                ХО     а
                В      А0
        А6      КОНЕЦ          %
```

.1765. Определение на Эуклидоле:

```
24§.            АЛГОРИТМ       Метровозведения (Возвести).
                МАТЕРИАЛ       =База, Показатель, Область5.
                ПРОДУКТ        Степень, =Ч, =О, =Т, =Р, =П.
                Измерить       показатель (0,0), показатель (0,1),
                               частное = Ч, остаток = О.
                МОА    Т(0), База(0,0)
                МОА    Т91), База(0,1)
                МОА    Р(0), База(0,1)
                МОА    Р(1), База(0,1)
        А1      TEX    Ч(а)
                ВО     А2
                ЭКСТРА         Р, Т, П.
                МОА            Т, П
                ХА             а
                В              А1
        А2      ЭКСТРА         Р, Т, П.
                ИНТРА          Т, П, Показатель(0,1), Р.
        А3      TEX    О(к+1)
                ВО     А4
                ХА     к
                В      А3
        А4      СРАВНИТЬ       Область5(е,0), Р(к)
                               Одинаковые = Т.
                TEX    Т(0)
                ВЕ     А5
                ХА     е
                TEX    Область(е)
                ВО     А6
                В      А4
        А5      МО     Степень, Область(е)
        А6      КОНЕЦ          %
```

.1766. Определение на Эуклидоле:

```
25§.            АЛГОРИТМ       Метроопераций.
                МАТЕРИАЛ       Метрочисла (Метрочисло).
                ПРОДУКТ        Метросложение
                               Метровычитание
                               Метроумножение
                               Метроделение
                               Метровозведение.
        А1      СЛОЖИТЬ        Метрочисло(а), Метрочисло(е)
                               Область1 = Метрочисла
                               Сумма = Метросложение(к).
                ВЫЧЕСТЬ        Метрочисло(а), Метрочисло(е)
                               Область2 = Метрочисла
                               Разность = Метровычитание(к).
                УМНОЖИТЬ       Метрочисло(а), Метрочисло(е)
                               Область3 = Метрочисла
                               Произведение = Метроумножение(к).
                ДЕЛИТЬ         Метрочисло(а), Метрочисло(е)
                               Область4 = метрочисла
                               Результат = метроделение(к).
```

```
ВОЗВЕСТИ     метрочисло(а), метрочисло(е)
             Область5 = метрочисла
             Степень = метровозведение(к).
ХА     к
ХА     е
ТЕХ    метрочисло(е)
ВЕ     А1
ХО     е
ХА     а
ТЕХ    метрочисло(а)
ВЕ     А1
КОНЕЦ        %
```

6. О предыдущей главе

1980.05

.1767. То, что Вы видели в предыдущей главе, больше похоже на программы для ЭВМ, чем на часть работы, посвященной вопросам математики.

.1768. Однако то, что Вы там видели, – это описания подлинных оснований арифметики – науки о числах. Как любая теория, теория чисел представляет собой набор алгоритмов, по которым человек обрабатывает информацию о внешнем мире, и набор множеств, построенных по этим алгоритмам или определяемых ими. Описывать эти алгоритмы лучше всего на языке, специально предназначенном для описания алгоритмов (какими должны быть такие языки, нам показала наука компьютеров). С фундаментальной точностью Вы говорите тогда, когда можете втолковать то, о чем Вы говорите, даже машине.

.1769. В предыдущей главе основные алгоритмы отражения, лежащие в основе арифметики, были описаны с фундаментальной точностью. Отперфорируйте это, введите в ЭВМ, и Эуклидос построит Вам множества метрических, ориентированных и континуальных чисел, а также отношения {.714} сложения, вычитания, умножения и т.д. Вместо таинственных «множеств чисел», законы которых каким-то чудом дают результаты, соответствующие действительности, перед Вами предстанут совершенно прозаичные, но зато реальные и материальные объекты вроде таблиц и программ, записанных в памяти ЭВМ. Имея перед глазами эти таблицы и программы, сформулируйте по-новому интересующие Вас вопросы, и Вы увидите, что во многих случаях достаточным будет правильно поставить вопрос, чтобы ответ стал ясным сам собой.

.1770. Конечно, можно утверждать, что те объекты, которые Эуклидос построит у себя в памяти ЭВМ, это лишь тень, лишь подражание, лишь модель «настоящих» чисел. Нет, мой читатель, в голове человека существуют, правда, не идентичные, но аналогичные объекты, и никаких других чисел нигде в мире не существует. Разница между числами в голове человека и в голове Эуклидоса непринципиальная, поэтому можно смело разбираться в том, что делает Эуклидос.

.1771. Я уверен, что большинство читателей ограничились общим взглядом, проскользнувшим по страницам предыдущей главы, и даже не пытались вникнуть в суть написанного там, проломиться сквозь джунгли Эуклидола. Но это не беда, сейчас я начну по параграфам разбирать написанное там, и когда мы дойдем до последнего параграфа, то и медитация эта будет близка к концу.

.1772. Представим себе, что мы отперфорировали всё, что там написано, и уже ввели в машину, на которой работает Эуклидос. Он оттранслировал всю нашу теорию и запомнил ее в виде структур АТМ и АВМ {.1570}. Теперь машина стоит и ждет, что мы скажем ей дальше. В этот момент мы и делаем весь разбор, описанный в следующих главах.

7. Изокванты

1980.01
(раньше на 4 месяца)

.1773. В первом параграфе {.1742} я настроил Эуклидос так, чтобы он вместо некоторых базисных мнемоник использовал русские слова {.1553}.

.1774. Во втором параграфе {.1743} начинается изложение собственно теории, то есть, одного из ее алгоритмов, а именно: алгоритма метрических чисел. Материал этого алгоритма называется базоквантой. Это множество каких-то множеств. В тот момент, когда мы делаем свой разбор, это абстрактное множество задано только самим алгоритмом (Эуклидос пока что запомнил только алгоритм, у него нет никаких предположений о том, какой на самом деле может быть базокванта). Но мы в любой момент можем оператором EXT (см. {.1588}) построить какую только нам вздумается базокванту и потом оператором EXEC заставить Эуклидос реализовать алгоритм на этой конкретной базокванте.

.1775. По данному алгоритму Эуклидос построит целую кучу множеств (эти множества мы скоро будем подробно разбирать). Но пока алгоритм не реализован на конкретной базокванте, всё это – абстрактные множества.

.1776. В третьем параграфе {.1744} описан один вспомогательный алгоритм – алгоритм равномощности (мы имеем полное право перебивать описание одного алгоритма описанием другого). Ему подаются два материала: база (это какое-то множество множеств) и эталон, а продуктом алгоритма является множество (подмножество базы) всех тех множеств из базы, которые равномощны эталону. (Равномощны – это я говорю для Вас, Эуклидос, конечно, не знает, что такое «равномощны», и в данном третьем параграфе я ему как раз это и объясняю).

.1777. В четвертом параграфе {.1745} описывается первая часть алгоритма метрических чисел. Многократно применяя алгоритм равномощности и создавая всё более мощные эталоны, строится первый из продуктов алгоритма метрических чисел: квантолина, содержащая изокванты. Вот как всё это можно было бы описать на человеческом языке:

.1778. Возьмите исходное множество B (называемое базоквантой), состоящее из множеств B(к), и поместите все пустые множества B(к) в одно создаваемое множество A(0), все те множества B(к), которые содержат один элемент, поместите в другое создаваемое множество A(1), все B(к), составленные из двух элементов, поместите в A(2) и т.д.

.1779. Любое из множеств A(е) впредь называется изоквантой, а множество A, составленное из изоквант, называется квантолиной.

.1780. Все множества одной изокванты равномощны между собой, то есть, содержат одинаковое число элементов. Число непустых изоквант в квантолине зависит от того, какие множества имелись в базокванте. Квантолина является порядком, то есть, для этого алгоритма не всё равно, как размещены изокванты в квантолине.

.1781. Если в базокванте будут вообще отсутствовать множества, состоящие из, например, трех элементов, то Эуклидос построит пустое множество Изокванта(3), но оно всё равно будет построено (пока в базокванте есть более мощные множества). Создание изоквант прекращается тогда, когда построена изокванта, содержащее самое мощное множество базокванты.

.1782. Поскольку классификация множеств проводится на основе возможностей построения тех или иных множеств по тому или иному алгоритму {.689}, то изокванты можно считать таксонами классификации {.686} множеств базокванты, проведенной по разобранному только что алгоритму.

.1783. Легко понять, что при любой конкретной интерпретации этого алгоритма, базокванта будет конечной, и конечной будет также и квантолина. Но также легко понять и то, что сам алгоритм не ставит абсолютно никаких ограничений величины элементов базокванты и тем самым величины квантолины. В этом смысле (и только в этом смысле) можно говорить, что квантолина бесконечна, изоквант бесконечно много и что классификация множеств по мощности имеет бесконечно много таксонов.

.1784. Для интерпретатора после первого этапа ввода информации, когда введен сам алгоритм, но нет еще конкретного интерпретируемого материала, этот алгоритм представлен в виде некоторого набора битов (АТМ), а квантолина – в виде номиналии (АВМ), обозначающей абстрактное бесконечное множество, связанное с этим алгоритмом. После второго этапа ввода (операторов EXT и EXEC) это множество станет конкретным и конечным; пока что оно абстрактно и бесконечно. Тогда его ограничит материал; теперь же оно задано только алгоритмом, а алгоритм его не ограничивает.

.1785. При любой реализации алгоритма (для интерпретатора вообще) и базокванта, и квантолина всегда конечны и конкретны. Но, если рассматривать только сам алгоритм, без конкретной базокванты (и рассматривать этот алгоритм может не только человек, но и какая-нибудь специальная программа: я назову ее анализатором), то с точки зрения такого анализатора квантолина бесконечна, так как алгоритм не ограничен и при наличии соответствующей базокванты его реализация могла бы продолжаться всё дальше и дальше.

8. Понятие числа

1980.01

.1786. Теперь появляется довольно естественный соблазн поставить знак равенства между квантолиной и множеством натуральных чисел. По сути дела именно так поступили в семидесятых годах прошлого века Георг Кантор, имя которого не перестает появляться на страницах моих медитаций, и в восьмидесятых годах итальянец Джузеппе Пеано (Peano 1858–1932). Первый построил систему натуральных чисел исходя из того, что (пользуясь терминологией этой медитации) изокванты содержат равномощные множества, а второй – исходя из того, что алгоритм изоквант создает изокванты в определенном порядке.

.1787. Подход Пеано является несколько более общим, чем подход Кантора, так как всё, что вытекает из отношения следования, относится не только к алгоритму изоквант, но в равной степени и к вообще любому неограниченному алгоритму, который создает свои продукты в определенном порядке следования. Поэтому я впредь буду называть все такие алгоритмы алгоритмами Пеано. Алгоритм изоквант – один из многочисленных алгоритмов Пеано.

.1788. Но от соблазна строить систему натуральных чисел на основе квантолины я всё же воздержусь. Я принял то понимание сущности числа, которое высказано в словах, ставших эпиграфом этой медитации. Я и раньше считал Исаака Ньютона величайшим ученым всех времен и народов {VIEWS.788}, и теперь только лишний раз убедился, что этот удивительный гений видел дальше всех, куда бы он не смотрел. Теперь распространено мнение, что подход Ньютона приемлем для систем рациональных и вещественных чисел, но не годится для натуральных и комплексных чисел.

.1789. Вряд ли читатель будет меня упрекать в том, что я излишне преклоняюсь перед авторитетами и слепо следую традициям, хотя в основу всех систем чисел от натуральных до комплексных (и до кватернионов, чисел Кэли и вообще всех, какие только можно придумать) я положил единый подход, единый взгляд, – подход своего кумира.

.1790. Итак – число для меня – «отвлеченное отношение величины к другой величине», или, в терминах теорики, таксоны классификации соотношений между множествами. Не таксоны классификации самих множеств, чем является изокванта, а соотношений между ними. То или иное множество чисел в моих глазах – это классификация {.686} множества соотношений {.710} между различными множествами. Как всякая классификация, система чисел состоит из классифицирующих алгоритмов, по которым интерпретатор (человеческий или машинный) может расставить конкретные соотношения по таксонам классификации, и из номиналий абстрактных множеств, которыми оперирует анализатор (человеческий или машинный), исследующий только сам алгоритм без конкретного материала.

.1791. Всякое множество чисел – классификация соотношений, но не всякая классификация соотношений является множеством чисел.

.1792. Построить множество чисел (при описании теории), таким образом, означает: описать алгоритмы, задействованные при классификации соотношений, и абстрактные множества, связанные с этими алгоритмами. Именно этим сейчас и займемся.

9. Первичная классификация

1980.01

.1793. В части алгоритма, описанной в параграфе 5 {.1746}, из базокванты строится релокванта – множество соотношений между множествами базокванты. Это можно было бы сделать и при помощи алгоритма развертки {.707} и алгоритма произведения {.701}, которые позволяют оперировать соотношениями с любым числом членов. Но поскольку нам достаточно соотношений с двумя членами, то здесь множество соотношений строится более простым (и менее общим) способом. Это лишний раз показывает, что рассматриваемые нами алгоритмы могут быть описаны и реализованы тысячами близких способов и что положение вещей здесь примерно такое же, как в мире программирования для ЭВМ (где одна задача может быть запрограммирована по-разному).

.1794. Каждый элемент релокванты (одно соотношение двух множеств из базокванты) состоит из двух множеств, это порядок {.700} из двух множеств.

.1795. Возьмите релокванту P, состоящую из соотношений P(c) и поместите в одно создаваемое множество H(0) все те соотношения P(c), в которых первый член соотношения принадлежит изокванте A(0), в другое создаваемое множество H(1) все те соотношения P(c), в которых первый член соотношения принадлежит изокванте A(1) и т.д.

.1796. Любое из множеств H(к) я впредь буду называть изонумерой, а множество H, составленное из изонумер, буду называть нумерлиной.

.1797. Возьмите релокванту P, состоящую из соотношений P(c) и поместите в одно создаваемое множество E(0) все те соотношения P(c), в которых второй член соотношения принадлежит изокванте A(0), в другое создаваемое множество E(1) – все те соотношения P(c), в которых второй член соотношения принадлежит изокванте A(1) и т.д.

.1798. Любое из множеств E(к) я впредь буду называть изоденотой, а множество E, составленное из изоденот, буду называть денотлиной.

.1799. Так можно описать на словах то, что делается в параграфе 6 {.1747}: построение рядов изонумер и изоденот. Легко увидеть, что оба эти алгоритма (изонумер и изоденот) являются алгоритмами Пеано, похожими на алгоритм изоквант.

.1800. Алгоритмы изонумер и изоденот создают пустые изонумеры H(к) и изоденоты E(к) в случае, если в релокванте нет соотношений, в которых соответственно первый или второй член соотношения принадлежал бы изокванте A(к).

.1801. В параграфе 7 {.1748} описан знакомый нам уже алгоритм сечения {.646}.

.1802. Пересечение изонумеры и изоденоты я буду называть изопартой, а множество всех изопарт – партоквантой (это сказано в параграфе 8 {.1749}).

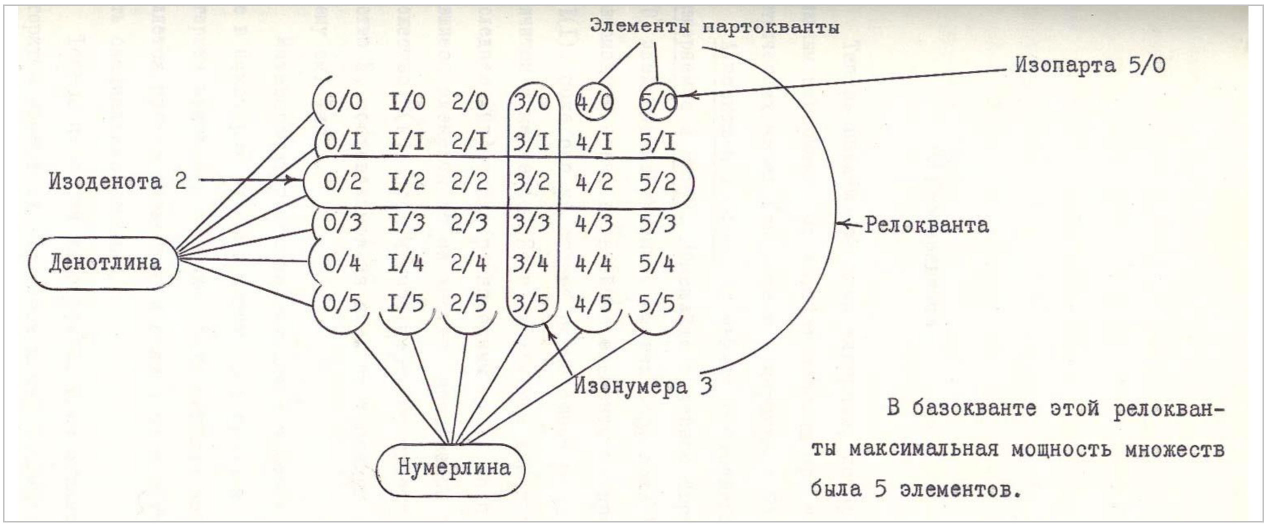
.1803. Изонумера содержит все те соотношения, в которых первые элементы равномощны, изоденота – все те соотношения, в которых вторые элементы равномощны, а изопарта – все те соотношения, в которых равномощны одновременно и все первые элементы между собой, и все вторые между собой.

.1804. При реализации этих алгоритмов на конкретной базокванте нумерлина и денотлина окажутся равномощными между собой и с квантолиной, а партокванта будет содержать p^2 элементов, если квантолина содержит p элементов.

.1805. Легко видеть, что нумерлина и денотлина – это две независимые группировки {.679} релокванты, а изонумеры и изоденоты – это таксоны 1-ой степени в некоторой классификации. Изопарты – таксоны второй степени в этой классификации. Множество, составленное из всех изонумер, изоденот и изопарт (объединение нумерлины, денотлины и партокванты) – это некоторая классификация релокванты или множества соотношений базокванты. Эту классификацию соотношений я буду называть первичной. Схему см. в Фиг.1 {.1807}.

.1806. Эта классификация не соответствует никакой из традиционных множеств чисел, или, иными словами, она еще не является множеством чисел в традиционном понимании (хотя нет серьезных причин, запрещающих считать ее первым множеством чисел). В этой классификации соотношение множества из 4 элементов к множеству из двух элементов (соотношение 4/2) и соотношение 6/3 принадлежат к различным таксонам (изопартам), в то время, как, например, по той классификации, которая называется рациональными числами, оба эти соотношения должны попасть в один таксон – в «число 2».

.1807. Фиг.1. Первичная классификация релокванты



В базокванте этой релокванты максимальная мощность множеств была 5 элементов.

10. Пропоркванта

1980.01

.1808. Теперь введем еще один алгоритм, который окажется самым главным алгоритмом из задействованных при построении системы метрических чисел (он описан в параграфе 9 {.1750}):

.1809. Алгоритм измерения. Возьмите соотношение двух множеств (измеряемое и меру). Помещайте в первое строящееся множество Е(0) элементы измеряемого до тех пор, пока Е(0) не станет равномощным мере, дальнейшие элементы измеряемого помещайте в Е(1), пока оно не станет равномощным мере, и т.д., пока не кончится измеряемое. Если измеряемое кончилось раньше, чем последнее Е(к) стало равномощным мере, то поместите эти оставшиеся элементы во множество, называемое остаток. Любое множество Е(к), равномощное мере, называется отмером, множество Е, составленное из всех построенных отмеров – частным. Схему см. Фиг.2 {.1820}.

.1810. Интерпретатор всегда создает и частное и остаток, которые в некоторых случаях могут быть пустыми. Легко видеть, что алгоритм измерения не может быть никогда закончен, если мерой является пустое множество и если в этом случае не предпринимать специальные решения.

.1811. Теперь построим классификацию релокванты, основанную на алгоритме измерения. При этом можно начинать непосредственно с релокванты, обойдя и не используя первичную классификацию, но можно отправляться и от партокванты (это не имеет принципиального значения). Первый путь выглядит более стройным потому, что в этом случае задействовано меньшее число различных алгоритмов, но человеку второй путь более приятен.

.1812. Вспомните, что изонумеры и изоденоты создавались их алгоритмами в определенном порядке следования подобно изоквантам. При определении же партокванты порядок создания изопарт не имел значения. Суть новой классификации заключается в том, чтобы разместить изопарты в определенном порядке на основе алгоритма измерения, а, если на основе этого алгоритма не удается определить, в каком порядке должны следовать изопарты, то считать эти таксоны одним и тем же таксоном, и обе изопарты объединить.

.1813. Для этого познакомимся с алгоритмом, позволяющим упорядочить изопарты (он описан в параграфе 10 {.1751}).

.1814. Алгоритм старшинства. Возьмите два каких-нибудь соотношения и примените к каждому из них алгоритм измерения. Если оба соотношения имеют равномощные частные, то измеряйте в обоих соотношениях меру остатком (то есть примените алгоритм измерения, используя в качестве измеряемого меру предыдущего измерения, а в качестве меры – остаток предыдущего измерения). Если частные вторых измерений опять равномощны, то проведите третье измерение, используя в качестве измеряемого меру второго измерения, а в качестве меры – остаток второго измерения. Так продолжайте до тех пор, пока не встретите отличающиеся по мощности частные или пока остаток хотя бы в одном из соотношений не окажется пустым. Если алгоритм закончился при первом, третьем, пятом и т.д. (нечетном) измерении, то старшим считайте то соотношение, в котором последнее частное содержит больше элементов, а при равномощных частных – то соотношение, в котором последний остаток содержит больше элементов (а второе соотношение считайте младшим). Если же алгоритм закончился на втором, четвертом и т.д. (четном) шаге, то обозначения «старшее» и «младшее» присваивайте наоборот. Если алгоритм закончился появлением пустого остатка в обоих соотношениях одновременно, то считайте эти соотношения одинаковыми.

.1815. Разумеется, такие понятия, как «четные», «нечетные» слишком сложны для Эуклидоса. На самом деле всё реализуется простым переключателем – элементом, хорошо известным всем программистам. В алгоритме старшинства (в том виде, как он описан в параграфе 10) в качестве переключателя используется специальное множество КЕУ, в которое то помещается, то удаляется единственный элемент. Естественно, что можно в Эуклидол встроить и специальные команды (операторы) установки, снятия и проверки переключателей.

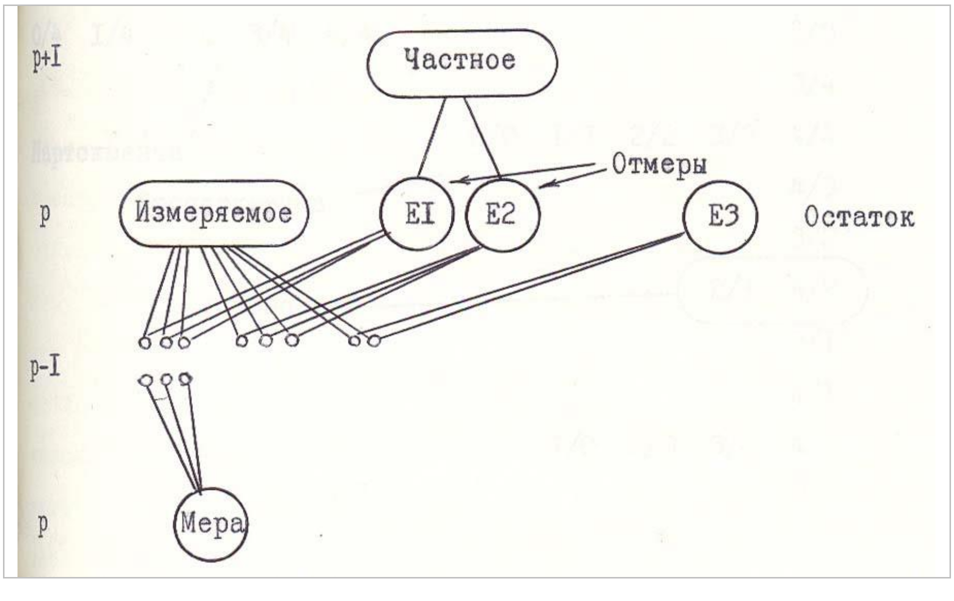
.1816. Теперь при помощи этого алгоритма упорядочим партокванту (это описано в параграфе 11 {.1752}):

.1817. Алгоритм пропорций. Возьмите первую изопарту из партокванты и все ее элементы поместите в первое создаваемое множество P(к). Возьмите один элемент (одно соотношение) из второй изопарты и один элемент (одно соотношение) из P(к). Алгоритмом старшинства определите, какое из этих соотношений старше. Если соотношение из P(к) младше, то поместите все элементы второй изопарты в новое создаваемое множество P(к+е), которое поместите в множество P за множеством P(к). Если соотношение из P(к) старше, то аналогично создайте множество P(к-е), которое поместите в P до P(к). Если оба соотношения одинаковы, то поместите все элементы изопарты в P(к). Возьмите следующую изопарту и аналогичным образом либо создайте новое множество P(р), находящееся в P за всеми P(к), элементы которых младше элементов P(р) и перед всеми теми P(к), элементы которых старше элементов P(р), либо объедините ее с предыдущими изопартами, содержащими одинаковые по старшинству соотношения.

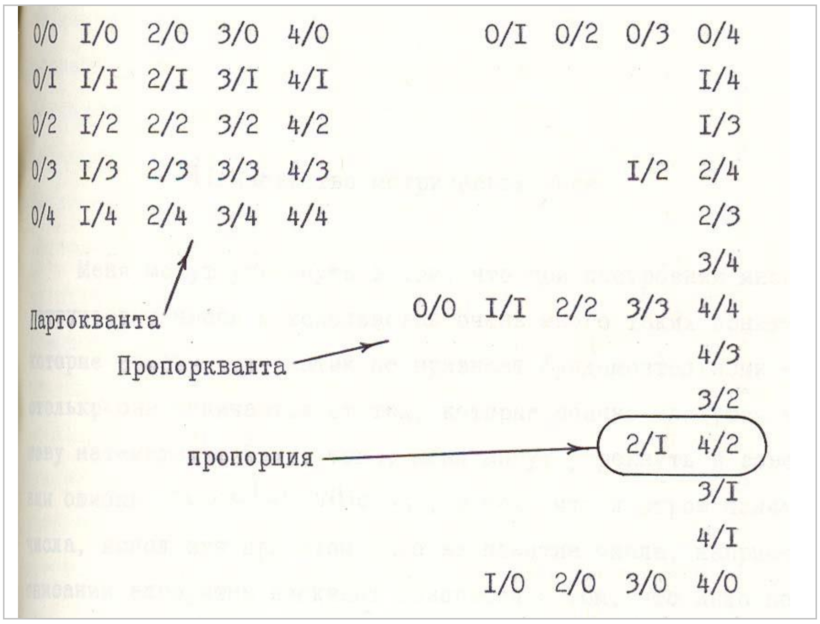
.1818. Таким образом Вы получите порядок P множеств P(к), которые являются объединением одной или нескольких изопарт и которые содержат одинаковые (согласно алгоритму старшинства) соотношения. Любое множество P(к) называется пропорцией, а множество P (множество всех пропорций) пропорквантой. Схему см. Фиг.3 {.1821}.

.1819. Пропорканта и есть множество метрических чисел (или, по традиционной терминологии: ноль и положительные рациональные числа).

.1820. Фиг.2. Алгоритм измерения



.1821. Фиг.3. Упорядочение партокванты



11. Множество метрических чисел

1980.01

.1822. Меня могут упрекнуть в том, что при построении множества метрических чисел я использовал очень много таких понятий, которые ни один математик не признает фундаментальными – настолько они отличаются от тех, которые обычно кладутся в основу математики. Более того, меня могут упрекнуть в совершении ошибки *circulus vitiosus*, в том, что я строю понятие числа, используя при этом само же понятие числа, например, в описании алгоритма изоквант {.1778} говорится о том, что надо поместить все множества, составленные из одного элемента в одну изокванту, из двух элементов – в другую и т.п.

.1823. Но дальновидный читатель не сделает такого упрека. Все эти алгоритмы описаны и на Эуклидоле с фундаментальной точностью, и можно заставить ЭВМ реализовать их. Такое описание не содержит никаких понятий о числе и подобных вещах; там фигурирует только очень ограниченный набор точно оговоренных команд {.638} и {.1621}. Эти команды, то есть действия, предписанные ими, и есть те действительно фундаментальные «понятия», на которых построено множество метрических чисел. Там фигурируют (и то лишь образно выражаясь) такие понятия, как «следующий элемент», «еще следующий», «еще» и «существует ли следующий?».

.1824. Машинный интерпретатор по таким описаниям алгоритмов может построить все фигурирующие выше множества: и нумерлину, и денотлину, и партокванту и пропоркванту, то есть «множество метрических чисел». Разумеется, что при любой реальной базокванте все эти множества будут конечными, конкретными. Очевидно также, что эти алгоритмы не ставят абсолютно никаких ограничений базокванте, то есть, что они пригодны для обработки сколь угодно больших множеств в базокванте. На этом основании при рассмотрении только самих алгоритмов, при отсутствии реальной базокванты и игнорируя всякие доводы об ограничениях в ресурсах (памяти, времени) той вычислительной системы, которая алгоритмы реализует (мозг, ЭВМ) можно утверждать, что партокванта или пропорканта (множество метрических чисел) бесконечны. Только на таком основании можно говорить о бесконечности этих множеств, и забывать об этом, по-моему, означает допускать очень большую неточность.

.1825. Что же в свете этого означает утверждение «существует число р/е»? Здесь можно выделить при более точном подходе три самостоятельных утверждения:

.1826. 1) Алгоритмы позволяют при достаточно длительном продолжении их работы построить данный таксон (если имеются соответствующие соотношения между множествами).

.1827. 2) У интерпретатора в базокванте имеется данное соотношение множеств.

.1828. 3) Данное соотношение множеств имеется в реальном мире.

.1829. В первом смысле бесконечность множества метрических чисел наиболее очевидна. Не надо только забывать, что любой реальный интерпретатор погибнет раньше, чем дойдет до «последних» возможностей алгоритма.

.1830. Во втором смысле очевидна конечность множества чисел. В мозге не происходит никаких ядерных реакций, значит все процессы мозга совершаются не ниже, чем на молекулярном уровне. Следовательно, при конечном числе атомов в мозге, как бы ни кодировались конкретные множества, там не может иметь место любое соотношение между конкретными множествами. Тем более это относится к ЭВМ.

.1831. Решение вопроса о бесконечности множества метрических чисел в третьем смысле зависит от представлений физики. Если пространство и время непрерывны и бесконечно делимы, или Вселенная бесконечна, то в реальном мире существуют какие угодно соотношения между множествами. Если же пространство-время имеет квантовую структуру и Вселенная ограничена, то наибольшим действительно существующим (в третьем смысле) числом является таксон, куда входит соотношение кванта пространства-времени ко всей Вселенной. Вопрос о непрерывности физического пространства и о бесконечности Вселенной нельзя считать решенным. Представления о непрерывности значительно подорваны идеями квантовой механики, а представления о бесконечной Вселенной – общей теорией относительности и Большим Взрывом.

.1832. Теперь рассмотрим иерархию чисел. По традиционной иерархии сначала вводятся натуральные, потом целые, рациональные и т.д. числа. Постепенно развертывая Идею отражения {.452} и стараясь сохранить единое понимание чисел всех типов, я пришел к выводам, противоречащим этой традиционной концепции. Первым самостоятельным уровнем чисел оказались положительные рациональные числа (метрические) – классификация, основанная на алгоритме измерения.

.1833. Но зато этот уровень оказался в полном согласии с исторической классификацией чисел. Можно утверждать, что человечество (точнее: передовые его представители) к началу нашей эры в полной мере овладели алгоритмом измерения и всем, что из него следует.

.1834. Сначала люди построили те таксоны метрической классификации, которые получаются, когда алгоритм старшинства заканчивается на первом же шаге, после одного единственного измерения, завершившегося без остатка. Это подмножество пропоркванты и есть натуральные числа. Потом люди освоили таксоны, получаемые законченным на втором шаге алгоритмом старшинства (дроби с числителем один). Лишь позже алгоритм старшинства был освоен полностью.

.1835. Итак, натуральные числа оказались подмножеством метрических чисел, получаемым наиболее коротким выполнением алгоритма. Принципиального отличия от остальных метрических чисел они не имеют, так как основаны на тех же алгоритмах.

12. Множество систем чисел

1980.09
(через 8 месяцев)

.1836. Теперь настало время приостановить стремительный ввод всё новых и новых алгоритмов и абстрактных множеств, называемых причудливыми словами, и в философском спокойствии осмыслить достигнутые результаты.

.1837. Под словом «число» я, вслед за Ньютоном, понимаю множество «одинаковых» соотношений между множествами. Определить, когда соотношения одинаковы и когда нет, можно только по тому или иному алгоритму. От этого алгоритма и будет зависеть то, какие числа, то есть, какие таксоны «одинаковых» соотношений, появятся в «множестве чисел». То или иное множество чисел – это та или иная классификация (множество таксонов), проведенная на основе того или иного алгоритма.

.1838. Первую классификацию я провел на основе алгоритма измерения (отсюда и название «метрические числа»). Алгоритм старшинства – это лишь программа многократного применения алгоритма измерения, а алгоритм пропорций – многократного применения алгоритма старшинства. При построении первичной классификации были задействованы также другие алгоритмы. Но главным специфичным именно для пропоркванты алгоритмом остается алгоритм измерения.

.1839. Само собой разумеется, что все эти алгоритмы и все номиналии этих абстрактных множеств существуют не «вообще», а в конкретных головах отдельных людей или, например, в отдельных ЭВМ в определенный момент времени. Один человек может обладать этими алгоритмами в полной мере или в выкристаллизованном виде, у другого же они могут теряться во множестве схожих и приблизительных алгоритмов, но это не меняет сути дела. У людей эти алгоритмы, видимо, представлены целой серией различных переплетающихся и пересекающихся их вариантов, и даже для ЭВМ на Эуклидоле они могут быть описаны различными способами. В связи с этим может появиться вопрос: «а какой же из них настоящий алгоритм, на котором основывается прекрасное здание чисел?». Увы, нет «настоящего» алгоритма чисел; мы можем выбрать алгоритм по критериям «короче», «быстрее», «элегантнее» и т.д., но мы всегда должны помнить, что отобранный нами алгоритм – лишь представитель целого семейства близких алгоритмов, и что в реальном мире в головах людей не всегда работает именно наш «наиболее элегантный» алгоритм, реальная жизнь мало считается с красотой математического идеала.

.1840. Всё, что описано в одном тексте на Эуклидоле (и что преподносится Эуклидосу за одно выполнение) – это одна теория. Я буду считать, что можно написать различные теории чисел (по-разному описать алгоритмы), но что в рамках одной определенной теории алгоритмы фиксированы однозначно.

.1841. Но тот, у кого нет сомнений в справедливости общего подхода теорики, кто вместе со мной думает, что ключ к пониманию природы чисел нужно искать в человеческих алгоритмах отражения внешнего мира, тот со всей отчетливостью должен понимать, что нет «настоящих» чисел, что различные системы чисел можно создавать с такой же легкостью, с какой программисты создают различные варианты программ или, скажем, с такой же свободой, с какой можно создавать различные неэвклидовые геометрии. Четкое осознание этого факта я считаю первым значительным специфически математическим результатом от применения идей теорики к математике.

.1842. Таким образом, нумерика относится к традиционной арифметике примерно так же, как геометрия Лобачевского относится к традиционной геометрии Эвклида. И это не просто внешнее сравнение; обе эти ситуации имеют глубочайшее сходство. Геометрия Эвклида – это не что иное, как набор алгоритмов, а именно: тех алгоритмов, по которым человек создает у себя представление о пространстве. Открытие геометрии Лобачевского и других неэвклидовых геометрий – это на самом деле открытие того факта, что могут иметь место и другие алгоритмы восприятия пространства, похожие, но вместе с тем отличающиеся. Аналогично нумерика показывает, что, кроме традиционных, могут существовать и другие алгоритмы создания чисел.

.1843. Но есть и одно различие между ситуациями «Эвклид – Лобачевский» и «арифметика – нумерика». Алгоритмы трехмерной эвклидовой геометрии миллионы лет тому назад были встроены естественным отбором в мозг предков человека. Такого статуса алгоритмы неэвклидовых геометрий добиться не могут (внешне это выглядит так, что трехмерное эвклидово пространство человек может «наглядно» представить, а другие геометрии не может). В этом смысле эвклидова геометрия более «естественна», чем другие геометрии. Алгоритмы традиционной арифметики же не имеют такого особого статуса в мозге человека, и нумерику любой может освоить так же легко, как и традиционную арифметику. Более того, те алгоритмы чисел, та система чисел, которую я описывал здесь, более «красива», чем традиционная (если руководствоваться хорошо знакомыми всем программистам интуитивными критериями «красоты» алгоритма, программы). В этом смысле нумерика, в отличие от неэвклидовых геометрий, не менее, а более «естественна», чем традиционная арифметика.

.1844. Итак, те системы чисел, которые я Вам предлагаю, мой читатель, это не единственные возможные, а «более естественные» в некотором смысле. Эта «большая естественность» или «красота алгоритма» заключается в том, что алгоритмы выбраны наиболее простые, и все системы чисел строятся на единой основе.

.1845. В традиционной арифметике натуральные числа вводятся из мощности множества (если следовать Кантору) или из отношения порядка (если следовать Пеано), рациональные числа строятся из натуральных чисел при помощи арифметических операций, иррациональные числа вводятся как сечения в области рациональных (если следовать Дедекинду) или вообще как вереницы цифр (если следовать Вейерштрассу), а комплексные числа определяются как пара вещественных. Таким образом, какая-либо унификация в приемах создания систем чисел отсутствует. Иными словами: алгоритмы, лежащие в основе традиционных систем чисел, чрезвычайно разнообразны.

.1846. Я же предлагаю такой подход к созданию систем чисел, при котором, как было описано в НУМЕРИКЕ, все числа в любой системе имеют одну и ту же природу и отличаются лишь в мелких деталях, а именно: любое число всегда – множество одинаковых соотношений между множествами, а системы чисел различаются тем, как определить, когда эти соотношения одинаковы. Поэтому я и считаю нумерику более красивой и естественной, чем традиционная арифметика.

.1847. Предложение внутренне более простой и логически стройной системы чисел вместо традиционной, я считаю вторым значительным результатом идей теорики в специфически математической области (после {.1841} установления самого факта возможности строить различные системы чисел).

13. Линейная ориентация

1980.06
(раньше на 3 месяца)

.1848. Метрические числа представляют собой множества «одинаковых» соотношений между множествами, причем «одинаковость» определяется при помощи алгоритма измерения. Эти множества можно при желании построить и как конкретные множества, но в общем-то мы их подвергаем анализу как абстрактные множества, то есть, как множества, которые «потенциально могут быть построены» по данному алгоритму. Изучение свойств этих абстрактных множеств – это фактически изучение свойств тех алгоритмов, которыми они заданы.

.1849. Натуральные числа представляют собой подмножество метрических чисел, а именно: это те метрические числа, при построении которых алгоритм измерения закончился на первом же шаге. Натуральное число 4, это то же самое, что метрическое число 4/1, ему принадлежат соотношения 4/1, 8/2 и т.д. Принципиального, более существенного отличия от остальных метрических чисел натуральные числа не имеют. Говорят: «натуральные числа появляются в результате счета», но что же такое счет (например, элементов какой-нибудь совокупности), если не измерение этого множества другим множеством, состоящим из одного элемента?

.1850. Но анализ алгоритма измерения и других алгоритмов, лежащих в основе системы метрических чисел, не пролил ни малейшего света на то, что такое, например, отрицательные числа. В учебниках принято переходить к отрицательным числам посредством операции вычитания: в результате такого расширения предыдущего множества чисел, чтобы «операция вычитания была всегда выполнима».

.1851. Я же попытаюсь ввести понятие отрицательных чисел на той же основе, на которой вводились метрические числа, а именно: как таксоны классификации одинаковых соотношений.

.1852. Кроме того, в системе метрических чисел операция вычитания всегда выполнима (согласно определению этой операции алгоритмами уменьшения и метровычитания, о которых речь пойдет ниже): если вы прикажете Эуклидосу по описанным алгоритмам вычесть число 4/1 из числа 2/1, то Эуклидос вовсе не растеряется и не сломается, а преспокойно ответит, что искомым числом является 0/1. Конечно, можно упрекнуть оба эти определяющие алгоритма в несовершенстве, но я считаю, что этот ответ не такой уж и бессмысленный (если у Вас имеются 2 яблока, а Вы хотите съесть 4, и удовлетворяете свое желание как можете, то останутся у Вас вовсе не –2, а 0 яблоков). А минус два Вы можете получить совсем в другом множестве чисел, построенном по совсем другим алгоритмам и при помощи операций, тоже определенных совсем другими алгоритмами.

.1853. Что же это за множество чисел и откуда оно берется?

.1854. Допустим, что какими-нибудь алгоритмами у нас построено какое-то упорядоченное множество B множеств B(к). Теперь рассмотрим алгоритм, позволяющий определить расстояние в этом порядке B от какого-нибудь B(a) до другого какого-нибудь B(e). Этот алгоритм на словах описывается так:

.1855. Алгоритм расстояния. Пусть на вход алгоритма даны порядок B(a) и B(e) в нем. Двигаясь по списку элементов от B(a) вперед или назад поместите в создаваемое множество P элемент B(a), потом B(a+1), если B(e) находится в B(a) или B(a–1), если B(e) находится перед B(a), и т.д. до тех пор, пока в строящееся множество не будет помещен элемент B(e–1) или B(e+1). Множество P называется расстоянием от B(a) до B(e) в порядке B, называемом линией.

Если B(e) находилось за B(a), то множество, называемое направлением, постройте пустым, а в противном случае поместите в него один элемент.

.1856. Таким образом алгоритм расстояния строит два множества: одно фиксирует величину расстояния, другое – направление.

.1857. Введение специального множества для «хранения» информации о направлении расстояния может показаться искусственным приемом. Но несомненно, что человек как-то знает направление ориентированных множеств. Неумолимые законы обработки информации говорят, что это знание не может появиться из ничего; раз человек располагает этой информацией, значит, она должна быть как-то закодирована в нем. Возможно, что в голове человека она кодируется весьма сложно и с большой избыточностью. Но на самом деле для кодирования направления «туда и обратно» требуется всего лишь один бит. Именно такое положение и наблюдается в том, как эти сведения кодирует Эуклидос.

14. Линейные числа

1980.01
(раньше на 5 месяцев)

.1858. Теперь при помощи проверки линейной ориентации все расстояния, признанные алгоритмом метрочисел одинаковыми, и попавшие в одну изокванту, можно разделить на две группы, на ориентированные вперед и ориентированные назад, то есть, каждая изокванта распадается на две части, на две линизокванты, а из квантолины образовывается множество всех линизоквант – линквантолина.

.1859. Используя в алгоритмах, создавших изонумеры и изоденоты, вместо изоквант линизокванты, получим вместо каждой изонумеры две линизонумеры и вместо каждой изоденоты – две линизоденоты (множество всех линизонумер назовем линнумерлиной, а множество всех линизоденот – линденотлиной). Если теперь взять пересечения линизонумер и линизоденот, то вместо каждой изопарты получим четыре линизопарты (множество их всех называется линпартоквантой).

.1860. Итак, каждая изопарта распадается на четыре части. У соотношений из этих частей общее то, что у всех их одинаковы по мощности измеряемые и у всех одинаковы меры, но в первой из частей как измеряемые, так и меры идут вперед; во второй части измеряемые идут вперед, а меры назад; в третьей – измеряемые назад, а меры вперед, и, наконец, в четвертой части как измеряемые, так и меры идут назад.

.1861. Теперь из каждой пропорции можно образовать две линпропорции, объединяя в одну те две линизопарты, в которых измеряемые и меры ориентированы одинаково, а в другую – те две, в которых измеряемые и меры ориентированы по-разному. Первую я называю положительной, вторую отрицательной линпропорцией. Множество всех линпропорций я называю линпропорквантой.

.1862. Линпропорканта и есть множество рациональных чисел. Я называю линпропорции также линейными числами. Множество линейных чисел было построено по тем же принципам, как и множество метрических чисел: это множества одинаково ориентированных соотношений между множествами. Разница между метрическими и линейными числами состоит только в том, что во втором случае более «придирчиво» определялось, когда же соотношения одинаковы: учитывалась при этом не только величина множеств, но и их направление (в одном из двух возможных направлений).

.1863. Если натуральные числа остались подмножеством метрических чисел (то есть, нумерика здесь ничего не изменила по сравнению с традиционным мнением), то совершенно иначе дела обстоят с линейными числами. Множество линейных чисел «шире» множества метрических чисел, но это два самостоятельных множества; метрические числа никак не являются подмножеством линейных чисел. Традиционное мнение в этом вопросе основано на смешении двух объектов (двух неэквивалентных множеств) – числа *p* и числа +*p*. Из-за этого традиционные системы чисел получаются несимметричными, числу +*p* приписываются свойства числа *p*, не имеющиеся у числа –*p*.

.1864. Вместо того, чтобы считать метрические числа подмножеством линейных чисел, нумерика считает одно линейное число подмножеством одного метрического числа.

.1865. Эти отношения похожи на отношения между множествами людей, говорящих на языке и говорящих на его диалектах. Допустим, что жители Прибалтики принадлежат к трем множествам людей, говорящих на языках:

а) эстонском;
б) латышском;
в) литовском.

.1866. Таким образом, мы имеем множество (назовем его множеством «языки»), содержащее три элемента.

.1867. Множество людей, говорящих на эстонском языке, распадается на три подмножества говорящих на следующих диалектах:

а) прибрежном;
б) северном;
в) южном.

.1868. Множество людей, говорящих на латышском языке, распадается на три подмножества говорящих также на трех диалектах:

г) видземском;
д) ливонском;
е) латгальском.

.1869. Множество людей, говорящих на литовском языке, распадается на два подмножества говорящих на двух диалектах:

ж) жямайтском;
з) аукштайтском.

.1870. Таким образом, мы имеем множество (назовем его множеством «диалекты») из 8 элементов.

.1871. Множество «языки» находится с множеством «диалекты» в таких же отношениях, как множество метрических чисел с множеством линейных чисел. Множество «языки» – не подмножество множества «диалекты», так как в списке диалектов от (а) до (з) нет таких элементов, как «латышский», «эстонский», «литовский». Зато «латгальский» – подмножество «латышского».

.1872. Разумеется, конечно, что здесь дело изящества алгоритмов, лежащих в основе системы чисел. Разумеется, можно построить и такую систему чисел, в которой (как это делается по традиции) отрицательные числа вводятся при помощи алгоритмов операции вычитания. Но, если Вы напишете (например, на Эуклидоле), программу, которая будет создавать число $-p$ (например, путем вычитания числа p из числа 0, где p и 0 принадлежат множеству ранее построенных натуральных чисел), то наверняка Вы обнаружите, что Ваша программа так же легко может создать и число $+p$ путем вычитания числа 0 из числа p. Но объект p и объект $+p$ никак не один и тот же объект хотя бы уже потому, что один принадлежит материалам, а другой продуктам Вашего алгоритма. И Вам придется применять особые ухищрения (то есть – лишать алгоритм простоты и изящества), чтобы заставить свою программу не генерировать эти «лишние» числа $+p$ и силой смешать p и $+p$ вместе.

.1873. Второе отличие, вносимое нумерикой в систему рациональных чисел – это то, что там, где традиция видит лишь один ноль, нумерика видит целых три не эквивалентных друг другу объекта: метрическое число «0» и два линейных числа «–0» и «+0». Все эти объекты являются столь же полноправными множествами, как и все другие метрические и линейные числа (и эти множества вовсе не пусты, если только в соотношениях релокванты допускаются и пустые множества, что вполне естественно).

15. Планарная ориентация

1980.01

.1874. Точно так же, как мы перешли от метрических чисел к линейным (усложнив алгоритм определения «одинаковости» соотношений), перейдем и к тем числам, которые соответствуют традиционным комплексным числам. При этом не имеет принципиального значения то, отправляться ли к ним исходя из множества метрических или линейных чисел.

.1875. Пополним алгоритм измерения таким алгоритмом, который учитывает ориентацию множеств уже не на прямой, а на плоскости: алгоритмом планарной ориентации.

.1876. Любой человек без особого труда может отличить, когда отрезки, нарисованные на бумаге, параллельны и когда расположены под каким-нибудь углом. Мне кажется отсюда очевидным, что он располагает соответствующим алгоритмом распознавания ориентации. Однако машинная реализация алгоритма планарной ориентации в отличие от алгоритма измерения, достаточно сложна. Это показывает, что и в голове человека алгоритм (или алгоритмы) такой ориентации реализуются весьма сложными программами.

.1877. Хотя классификация соотношений, основанная на этом алгоритме (комплексные числа) была создана человеком позже метрической классификации, но сами алгоритмы ориентации люди получили в наследство от своих далеких предков. Такое несоответствие между сложностью алгоритма ориентации и тем, как рано, по сравнению с алгоритмом измерения, он был освоен предками человека, вызвано тем простым обстоятельством, что естественному отбору совершенно всё равно, сможет ли животное отличить, нападают ли на него семнадцать или восемнадцать волков, но совсем не всё равно, сможет ли он различить, с какой стороны на него нападают и, следовательно, куда надо бежать.

.1878. Алгоритм планарной ориентации – часть сложной системы восприятия человеком пространства. Я надеюсь когда-нибудь написать посвященную пространству медитацию, в которой поразмыслить над восприятием человеком пространства от теории относительности до комплексных чисел. В данной же медитации я алгоритм планарной ориентации подробно рассматривать не буду. Мне кажется очевидным, что люди этим алгоритмом обладают, и этого пока достаточно.

.1879. Итак, по алгоритмам планарной ориентации каждый таксон метрических (или линейных) чисел можно разбить на «бесконечное» количество подмножеств, которые содержат соотношения, не только одинаковые по мощности множеств, но «одинаковые» и по соотношению направления множеств на плоскости (разумеется, что «бесконечность» числа таксонов такая же, как и бесконечность квантолины – это бесконечность алгоритма, выполнение которого можно всегда продолжать).

16. Планарные числа

1980.06
(через 5 месяцев)

.1880. Аналогично тому, как мы построили различные множества при определении линейных чисел {.1858}, на базе алгоритмов планарной ориентации можно определить планизокванты, планквантолину, планизонумеры, планизоденоты, планнумерлину, планденотлину, планизопарты, планпартокванту, планпропорции и планпропоркванту. Множество планпропорций я называю также планарными числами.

.1881. Линейные и планарные числа объединяет то, что при их построении в дополнение к алгоритму измерения для определения «одинаковости» соотношений применялись разные алгоритмы, учитывающие ориентацию множеств. Поэтому можно говорить об ориентированных числах вообще, подразумевая под этим линейные и планарные числа.

.1882. Несмотря на то, что необходимость в ориентированных на прямой и ориентированных на плоскости числах (в отрицательных и комплексных) появилась у итальянских математиков одновременно, опять-таки сначала были освоены случаи более простой ориентации «туда или сюда».

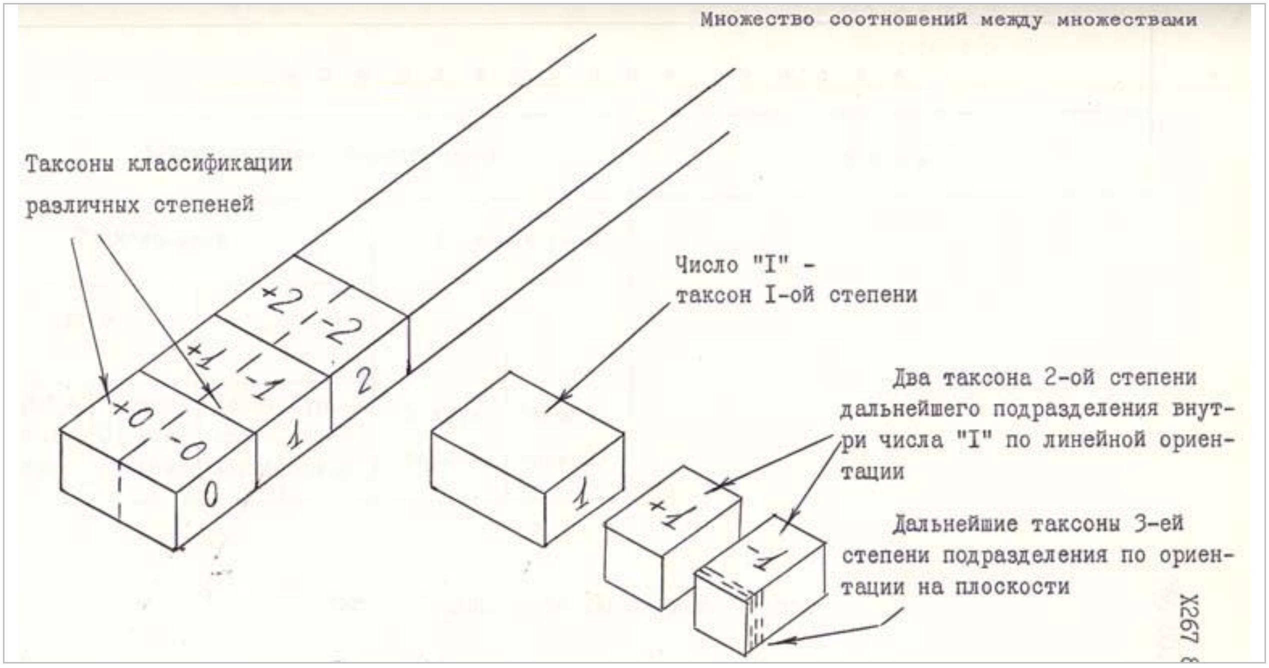
.1883. Последовательный переход от метрических чисел к линейным и потом к планарным путем усовершенствования алгоритма классификации соотношений легко наводит на мысль о продолжении этого процесса. Во-первых, в рамках ориентированных чисел появляется естественный соблазн построить числа, ориентированные в трехмерном, в четырехмерном и т.д. пространстве. Во-вторых, так же естественно появляется мысль о расширении множества метрических чисел не на основе учета ориентации, а на основе учета чего-то другого. Такие множества, разумеется, могут быть построены, но это выходит за пределы темы настоящей медитации. Здесь я ограничиваюсь комплексными (планарными) числами.

.1884. Итак, множество комплексных чисел в моих глазах и в свете нумерики – это трехступенчатая классификация соотношений. Таксоны первой степени {.686} построены по алгоритму измерения, потом каждый такой таксон разбит на два таксона второй степени по алгоритмам линейной ориентации и, наконец, по алгоритмам планарной ориентации разбивается на таксоны комплексных чисел.

.1885. Такая иерархия чисел продолжает противоречить традиционной. Но, помимо того, что она согласуется с этапами истории чисел, она еще и симметрична: ни один таксон второй степени (или третьей) не привилегирован в роли модуля других таксонов. Все они одинаковы (равноправны), модуль всех их – это тот таксон первой степени, частью которого является данный таксон второй или третьей степени (см. Фиг.4 {.1887}).

.1886. Понятия метрических, линейных и планарных чисел построены на более единой основе (все они – множества «одинаковых» соотношений) по сравнению с классическими системами чисел, где натуральные числа появляются «в результате счета», рациональные – в результате арифметических операций, а комплексные и вовсе кажутся каким-то гибридом двух чисел.

.1887. Фиг.4. Образование чисел

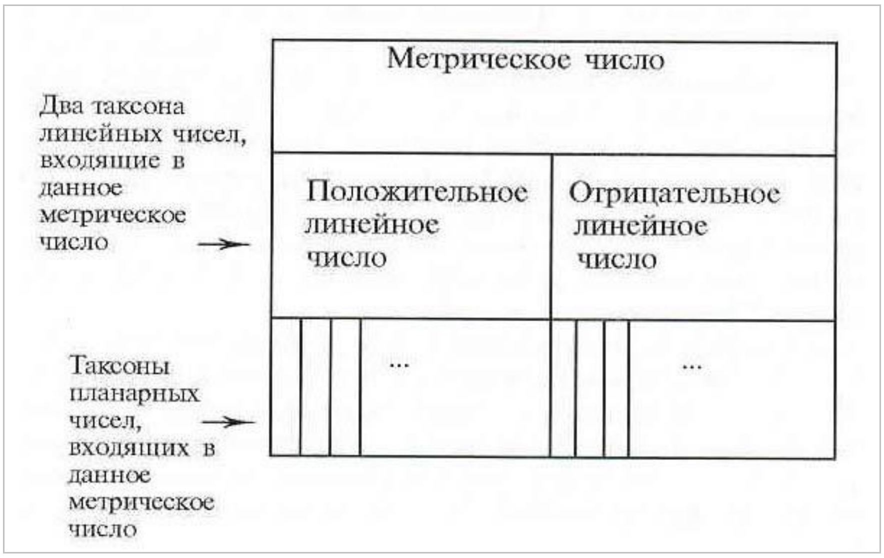


.1888. Фиг.5. Традиционная классификация чисел

Комплексные числа							
Действительные (Вещественные)							Мнимые
Рациональные					Иррациональные		
Целые			Дробные		Положительные	Отрицательные	
Натуральные	0	Отрицательные	Положительные	Отрицательные			

.1889. Фиг.6. Алгоритмическая классификация чисел

.1890. Фиг.7. Классификация одного числа



17. О нумерике

1980.06

.1891. Природу иррациональных чисел я достаточно подробно рассмотрел уже в {.231}. В основе иррациональных чисел лежит не какой-нибудь один, а несколько различных алгоритмов. Эти алгоритмы не являются алгоритмами классификации соотношений, но похожи на последние тем, что также создают множества одинаковых соотношений (то есть, числа).

.1892. Образно выражаясь, иррациональные числа появляются там, где эти алгоритмы нереализуемы интерпретатором. Однако, как мы увидим в дальнейшем, для математических рассуждений нам важна не столько интерпретация (реализация) алгоритмов, сколько их анализ, так сказать, «сверху», не прибегая к их реализации. И тогда реализуемый и нереализуемый алгоритм ничем не отличаются. Псевдоинтерпретатор {.1687} построит объект – «результат» алгоритма извлечения квадратного корня из «2» так же легко, как и из «4».

.1893. Теперь, окидывая взором историческую классификацию чисел, приведенную в начале этой медитации {.1730}, можно сказать, что она полностью соответствует классификации нумерики. Усилия, которые людям пришлось приложить для освоения всё новых и новых чисел, были прямо пропорциональны количеству освоенных алгоритмов. Сначала люди освоили алгоритм измерения (его они осваивали даже по частям: сначала первый шаг, порождающий натуральные числа, потом второй шаг, порождающий дроби с числителем «один» {.1721} и, наконец, остальные шаги). Полностью алгоритм измерения освоила античная цивилизация. Потом люди освоили алгоритм линейной ориентации (завершил Декарт {.1724}), потом планарной (завершил Гаусс {.1726}). После этого стали осваивать другие алгоритмы, приводящие к псевдотаксонам – континуальным числам {.1729}.

.1894. Я уже говорил, что фактически, в действительности, в истории создания человечеством числовых систем в людских головах не применялся какой-нибудь один определенный вариант основополагающих алгоритмов, будь то алгоритмов из описанных здесь, будь то тех, которые с фундаментальной точностью нигде не описаны, но которые лежат в основе традиционной системы чисел.

.1895. Фактические алгоритмы, работающие в головах людей, создавались природой, биологической системой. Природа не творит вещей таких простых и четких, лишенных ненужных деталей, как программы на Эуклидоле, описанные в этой медитации. Если человеку нужно соединить телеграфной линией две точки, то он протягивает провода по прямой. Если природе нужно соединить две точки (например, рецептор в коже и головной мозг), то она протягивает нервное волокно со всевозможными изгибами и логически ничем не оправданными излишествами. Аналогично, если мне нужен алгоритм, определяющий систему чисел, то я пишу программу на Эуклидоле, которая создает числа и не делает ничего лишнего. Если же природе нужен такой алгоритм, задающий систему чисел, то она создаст кучу мозговых программ, которые делают всё что угодно, и заодно создают еще и числа. Но как сущность созданной человеком прямой телеграфной линии и сущность созданного природой извилистого нервного волокна одинаково состоит в том, что это линии передачи информации между двумя точками, так сущность созданных мною спартанских минимальных алгоритмов и сущность созданных природой избыточных и пышных алгоритмов одинаково состоит в том, что это – программы обработки информации о внешнем для обрабатывающего субъекта мире.

.1896. В природе, в головах людей в чистом виде нет ни моих, описанных здесь, алгоритмов, ни алгоритмов, задающих традиционные системы чисел. Но историческая, хронологическая классификация чисел совпала с их классификацией по нумерике, в то время, как историческая классификация полностью расходится с традиционной. Я вижу в этом неявное свидетельство того, что мои алгоритмы ближе к природным, чем традиционные.

.1897. Если под словами «настоящие числа» понимать такую систему чисел, алгоритмы которой ближе к природным, человеческим алгоритмам, то в таком смысле можно утверждать, что нумерика вскрывает «истинную природу» чисел (не говоря даже о том, что нумерика показывает «истинную природу» чисел уже в том смысле, что все числа – потенциальные продукты каких-то алгоритмов).

18. Программы чисел

1980.06

.1898. Одним из первых возражений против моей концепции числа было то, что «люди приходят к понятию числа, но при этом ни малейшего понятия не имеют о каких-то там программах».

.1899. Если у Вас, мой читатель, появились такие мысли, то Вы (по моей ли, по Вашей ли вине) абсолютно ничего не поняли из всего мною сказанного.

.1900. Взгляните на эти три пятна краски:

a a e

.1901. Электромагнитные волны, отраженные бумагой и несущие информацию о форме этих пятен, создают их изображение в сетчатке Вашего глаза. Можно сделать устройство, похожее на телевизионную камеру, которое закодирует изображения этих пятен в памяти машины. Я могу Вам написать программу, которая определит, что два первых пятна одинаковы, а третье от них отличается (программа, распознающая вообще любые образы, слишком сложна, чтобы я ее брался написать, но программу, различающую столь простые и к тому же представленные в фиксированном положении изображения, написать не трудно). Сейчас важно одно:

машина может отличить первые два пятна от последнего только в том случае, если в ней работает соответствующая программа.

.1902. Вы, мой читатель, тоже можете различить эти пятна. Из этого я делаю вывод, что Вы тоже обладаете соответствующей программой. А то, знаете ли Вы о существовании этой программы, или не подозреваете о ней, не имеет никакого значения.

.1903. Точно так же дела обстоят и с числами. Одно то, что у Вас появилось понятие о числах, служит для меня свидетельством того, что у Вас отработали соответствующие программы. Если Вы и не подозреваете о существовании этих программ, то это не имеет здесь никакого значения: мало ли о каких механизмах своего организма Вы и понятия не имеете.

.1904. В этой медитации с фундаментальной точностью (то есть, с такой точностью, что можно это реализовать на ЭВМ) были описаны только алгоритмы, лежащие в основе системы метрических чисел (алгоритмы, которые задают множество метрических чисел и операции над ними).

.1905. Об алгоритмах, лежащих в основе системы линейных и планарных чисел, я рассуждал лишь с философской точностью (то есть, не приводил описания этих алгоритмов на Эуклидоле).

.1906. Описать на Эуклидоле алгоритмы, задающие систему линейных чисел, нет никакой проблемы. Если я этого не сделал, то только потому, что хотел экономить силы и время (свои и читателя). Эта медитация мало что выиграла бы, если бы к длинным рядам операторов Эуклидола {.1742} прибавилось бы еще столько же. Главное уже достигнуто – на Эуклидоле описаны алгоритмы, задающие полностью одну систему чисел. Описать вторую (линейные числа) – работа механическая.

.1907. Иначе обстоят дела с системой планарных чисел. В настоящее время (июнь 1980) я не могу однозначно ответить, можно ли при помощи Эуклидола (в теперешнем его виде) описать алгоритмы восприятия пространства, или же для этого требуется применение иных внутримашинных структур Эуклидоса. Я намерен еще исследовать этот вопрос.

.1908. Но это никак не подрывает основные выводы медитации: если даже для описания алгоритмов восприятия пространства требуются иные внутренние структуры (не линейные списки, а сети, напоминающие плоскость сетчатки глаза или трехмерные переплетения нейронов мозга), то всё равно алгоритмы обработки этих структур остаются алгоритмами, а числа – множествами «одинаковых» (согласно этим алгоритмам) соотношений.

1994.06.03 14:51 пятница
(через 14 лет, 0 месяцев)

.1909. Примечание 1994 года к пункту {.1907}: нет никаких проблем описать планарные числа на «ассемблере Эуклидола». Ответ, собственно, содержался уже в материалах 1980–1981 годов, например, в {.1842}, в {.2664}. Чтобы описать планарные числа, нужно пользоваться, как и для линейных {.1857} двумя множествами, только второе множество в случае планарных чисел будет не вырожденное (0 или 1 элемент) – а полное. Эвклидова плоскость есть не что иное, как абстрактное множество, заданное двумя «линейками»; эвклидово пространство – тремя «линейками».

19. Дилетанты и профессионалы

1980.06
(раньше на 14 лет, 0 месяцев)

.1910. Всем материалистически настроенным людям в общем-то ясно, что «математика отражает реальные связи внешнего мира». Но весь вопрос состоит в том, чтобы разобрать, рассмотреть по шагам тот путь, который ведет от реальных, материальных вещей до математических абстракций. Именно это я и пытаюсь сделать в своей работе.

.1911. Нередко встречаются такие утверждения, как «сложение связано с объединением непересекающихся множеств» и т.п., но всё дело заключается в том, чтобы во всех подробностях разобрать тот механизм, который ведет от непересекающихся множеств к тернарному отношению сложения.

.1912. Меня могут упрекнуть в том, что я – дилетант в математике, берусь рассуждать о ее основаниях. «Не кажется ли вам, что, прежде чем рассуждать о математике, не мешало бы знать саму математику?» – слышится мне вопрос. Да, я признаюсь, что изучал математику только в размере обычного университетского (или институтского) курса для инженеров (да и то основательно забыл).

.1913. Но теперь представьте на миг, мой читатель, что предметом математики и на самом деле являются программы некоторого процессора в мозге. Сделайте такое допущение на минуту! И тогда сразу всё представляется в совершенно другом свете: на протяжении веков этим процессором и этими программами занимались люди, которые имели чрезвычайно смутное представление о том, что такое вообще процессоры и программы для них. Зато я только этим и занимался всю свою жизнь. Так что вопрос о профессионалах и дилетантах не так уж и прост.

.1914. Для меня (и для Вас, если Вы допустили, что предметом математики и на самом деле являются алгоритмы мозга) вся система понятий, терминологии, методов, обозначений, символики традиционной математики представляется удивительно причудливыми. На самом деле это рассуждения о программах, описания алгоритмов, но, боже мой, разве так описывают программы!

.1915. Представьте себе, что я написал маленькую программу на Ассемблере-360:

```
         USING       A,1
         USING       B,2
         USING       C,3
M1       TM    A1,1
         BO    M2
         MVC   B(1),A
         LA    2,1(2)
         B     M3
M2       MVC   C(1),A
         LA    3,1(3)
M3       LA    1,1(1)
         B     M1
```

.1916. Эта программа из поля А пересылает байты либо в поле В, либо в поле С в зависимости от значения крайнего правого бита в этом байте. Программа эта не проверяет никаких условий конца, и на машине будет работать до аварийного останова.

.1917. Теперь представьте себе, что вместо того, чтобы говорить и писать то, что я только что сказал, я начинаю излагать что-то подобное этому: «Существуют бесконечные множества А, В, С, природой которых мы не интересуемся, так как это первичные термины в нашем аксиоматическом построении. Аксиома 1: В является подмножеством А. Аксиома 2: С является подмножеством А. Аксиома 3: Пересечение С и В пусто», и т.д.

.1918. В программистских кругах меня просто высмеяли бы, если бы я так описывал свои программы. Попробуйте представить себе, в какой кошмар превратилось бы описание какой-нибудь операционной системы, если идти по этому пути (не следствие ли таких методов непроходимые джунгли математики?).

.1919. Я не хочу ни уменьшить роль и значение математики, ни отказаться от каких-либо ее результатов и выводов (если они хоть что-нибудь стоят, разумеется). Я только думаю, что средства описания (терминология, символика и т.д.) и во многом вся система понятий, применяемые в традиционной математике, мало приспособлены к описанию тех объектов, которые она изучает, так как эти средства создавались без ясного понимания природы изучаемых объектов. От того, что эти средства станут более приспособленными, математика может только выиграть.

.1920. Я знаю людей, для которых нет более священного храма, чем математика, и которые, сравнивая свое святилище с программированием для компьютеров, с явным высокомерием говорили, что жрецами математики могут быть лишь избранники, в то время, как презренным программированием может заниматься каждый из толпы. Моя работа, видимо, будет личным оскорблением для них, так как я утверждаю не что иное, как то, что математика – всего лишь раздел программирования, причем ее программы относительно просты, что и придает им ту стройность, которой так поклоняются тысячи математиковерных.

1994.06.03 16:54 пятница
(через 14 лет, 0 месяцев)

.1921. Когда я в прошлом году вводил это в компьютер, я в файле тут сделал такую пометку себе на память для последующей доработки при редактировании:

.1922. Здесь добавить:
.1923. – математиковерным был Гейдеман {.801};
.1924. – но сравни Кикуст в «репликах» {CANTO.2058};
.1925. – Кикуст об этой главе – «собрание глупостей» {.2636}, а на самом деле здесь великолепное рассуждение!

.1926. Но, пожалуй, не стоит ничего к этому добавлять в более развернутом виде. Самой пометкой уже всё сказано.

20. О нумерации

1980.09
(раньше на 13 лет, 9 месяцев)

.1927. Теперь задумаемся о том, как построенные нами числа обозначать. Вы скажете, что тут нет никакой проблемы, что давно уже существуют общеизвестные способы обозначения чисел и что нет никакой необходимости придумывать что-то новое. Что ж, по своему обыкновению (*ср.* {VIEWS.513} – *ред.*) я выдвину некоторые принципы кодировки чисел и, если традиционная система обозначения чисел удовлетворит этим принципам, то всё в порядке, иначе придется придумывать что-то новое.

.1928. Но, прежде чем заняться этим, я хотел бы вместе с читателем твердо уяснить две вещи.

.1929. Во-первых, мне хотелось бы, чтобы везде, где это важно, твердо различали два объекта: само число и его обозначение, и никогда их не путали. Вот вам примеры различных обозначений числа 10: 1010, 12, 10, A, X, десять. Одно и то же число здесь записано (закодировано, обозначено) в двоичной, в восьмеричной, в десятичной и в шестнадцатеричной позиционных системах счисления, и в двух непозиционных – в римской и русско-словесной.

.1930. В общем-то легко понять, что ни одна из приведенных групп значков не является самим числом 10, что само число существует, так сказать, где-то в стороне, а эти значки – лишь символы, обозначения самого числа, что в принципе можно придумать сколько угодно способов обозначения чисел и что в любом случае всё здесь основывается на взаимно однозначном соответствии между числами и группами тех или иных значков, организованных тем или иным способом.

.1931. Несмотря на кажущуюся простоту этих вопросов, путаница в понятиях числа и его обозначения чрезвычайно широко распространена, и даже я сам иногда грешу в этом смысле.

.1932. Вторая вещь, которую я хотел бы четко выяснить, прежде чем заняться кодированием чисел, это позиционный принцип нумерации. О нем я писал уже в {.1384}, но не помешает здесь еще раз к этому вернуться. Рассмотрим этот вопрос на примере десятичной системы счисления.

.1933. Итак, если мы собираемся что-то нумеровать по позиционному принципу, то избираем некоторое множество букв, которое назовем базой нумерации (в примере: буквы 0123456789). Буквой здесь (см. {.603}) называется множество «одинаковых» знаков, а знаком – материальный объект любой природы. Говоря о базе нумераци, будем различать мощность базы (то есть, количество букв в базе) и состав базы (то есть – начертание значков или вообще природа знаков). В нашем примере мощность базы: десять букв, а состав – значки приведенного выше начертания.

.1934. Легко понять, что мощность базы в десять букв исторически была обусловлена только тем совершенно случайным биологическим фактором, что у человека на одной руке пять пальцев, и очевидно, что выбор такой мощности базы не имел никакого отношения к соображениям о лучшей базе. Лучше было бы избрать базу, мощность которой представляет собой какую-нибудь степень двойки. Еще школьником восьмого класса я пришел к выводу, что наилучшей системой счисления была бы шестнадцатеричная. Систему счисления я выбирал по следующим критериям:

.1935. а) чтобы базу системы счисления можно было делить пополам вплоть до единицы (иными словами: база – степень двойки);

.1936. б) чтобы квадратный корень из базы был натуральным числом;

.1937. в) чтобы база была как можно ближе к десяти.

.1938. Тогда я обозначил шесть недостающих цифр греческими буквами и составил таблицу умножения для шестнадцатеричной системы счисления. Намного позже я узнал, что такая система счисления принята в вычислительной системе IBM, только для недостающих цифр используются не греческие, а латинские буквы.

.1939. Самостоятельно придуманная «нетрадиционная» система счисления и таблица умножения для нее были, я думаю, довольно нетривиальными достижениями для школьника восьмого класса, в школе никогда ничего и не слышавшего даже о самой возможности существования иных систем счисления, кроме десятичной (в то время в школах не было такого предмета, как информатика). Позже, когда на «Минск-22» пользовались восьмеричной системой счисления, я продолжал обращаться к шестнадцатеричной, написал программу перевода из 8-ричной и 10-тичной в 16-ричную... Я по сей день продолжаю считать шестнадцатеричную систему счисления наилучшей.

.1940. Легко также понять, что вместо традиционного состава букв (0123456789) можно было взять любой другой (например, такой: АБВГДЕЖЗИЙ) и что от этого ничуть не страдала бы десятичная система счисления. Единственное действительно важное ограничение здесь то, что мощность базы должна быть минимум два, то есть, база из одной буквы выродила бы всю идею позиционного кодирования.

.1941. После того, как избрана база определенной мощности и состава, по простому линейному алгоритму (алгоритму Пеано {.1787}) можно генерировать неограниченный ряд символов, комбинируя, перебирая буквы базы. Эту линейную последовательность символов (называемых номерами) можно сопоставить с любой другой последовательностью объектов произвольной природы.

.1942. Таким образом, всем известный способ кодирования натуральных чисел в десятичной системе счисления – это один определенный способ позиционной нумерации при базе мощности 10 и в составе значков, именуемых цифрами. Этот способ я буду называть поэтому десятичной цифровой нумерацией или просто цифровой нумерацией.

.1943. Таким образом, в общем-то применение цифровой нумерации не имеет ничего общего с числами. Когда мы обозначили цифровой нумерацией, например, квартиры в доме, то, конечно, имеется и соответствие между квартирами и натуральными числами, также обозначенными при помощи цифровой нумерации, но, согласитесь, что в номерах квартир нам гораздо важнее система значков, чем абстрактные математические понятия о числах. Тем не менее, очень распространено мнение, что при нумерации мы сопоставляем квартирам именно натуральные числа. Это может послужить первым примером путаницы понятий числа и его обозначения {.1931}.

.1944. Алгоритмы позиционной нумерации, по которым мы можем генерировать в неограниченном количестве всё новые и новые номера, являются алгоритмами Пеано. Они позволяют нумеровать элементы не только конкретных упорядоченных множеств, но и элементы абстрактных множеств, продуктов того или иного алгоритма Пеано. Образно говоря, алгоритм генерации номеров и тот алгоритм Пеано, продукты которого нумеруются, могут быть «синхронизованы», их очередные шаги сопоставлены. Именно это и дает возможность бесконечного присваивания номеров.

.1945. Воспользуемся этим, чтобы при помощи десятичной цифровой нумерации обозначить изокванты, первые продукты алгоритма метрических чисел (я использовал именно десятичную цифровую нумерацию только для того, чтобы сохранить максимальное сходство с традиционными обозначениями).

.1946. Итак, первые десять изоквант я буду обозначать соответственно символами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, вторые десять символами 10, 11, 12, ... и т.д., то есть, комбинациями десяти различных значков, образованными по всем известному алгоритму. Не следует думать, что я обозначил изокванты натуральными числами. Я обозначил их комбинациями значков определенного начертания, и только. Если где-нибудь и когда-нибудь этими значками обозначалось и что-то другое, то можно считать это совпадение чистой случайностью. В принципе я мог сам изобрести новые значки, причем не в количестве десяти, а в любом другом.

.1947. Теперь я буду говорить об изокванте 0, изокванте 1, изокванте 532 и т.д. Аналогично я буду говорить об изонумере 33, изоденоте 1521 и т.д. Этот способ я буду использовать всюду, где мы встретимся с алгоритмами Пеано. Комбинация знаков, обозначающая продукты алгоритма Пеано (то есть, символ, образованный по указанному правилу) называется номером продукта.

.1948. Изопарту я буду обозначать двумя номерами, разделенными наклонной чертой, а именно: перед чертой номер той изонумеры, в которую изопарта входит, а после черты номер изоденоты, включающей изопарту. К примеру – буду говорить об изопарте 4/2, изопарте 1521/0 и т.д.

.1949. Если какое-нибудь соотношение принадлежит, например, изопарте 4/2, то и про это соотношение я буду говорить как про соотношение 4/2.

.1950. Хотя всё это я описал только здесь, но фактически пользовался этими обозначениями уже давно, полагаясь на интуицию читателя.

21. Обозначения чисел

1980.09

.1951. Теперь мы подошли к главному вопросу всех этих рассуждений о нумерации и обозначении: к вопросу о том, как обозначать числа (в Эуклидоле или вообще по принципам, согласованным с Эуклидолом).

.1952. Числа – это множества одинаковых соотношений между множествами. Как вообще, по каким принципам их обозначать? Числа (метрические или линейные) расположены в ряд по величине (согласно алгоритму старшинства). Однако алгоритм, создающий этот ряд, не является алгоритмом Пеано, так как продолжение алгоритма после какого-нибудь шага p приведет к нарушению, модификации (пополнению) ряда, созданного до шага p. Это исключает возможность просто пронумеровать числа по позиционному принципу. Поэтому за основание возьмем нумерацию изоквант, а числа будем обозначать несколькими номерами в зависимости от того, каким изоквантам принадлежат или принадлежали бы те или иные множества в соотношениях из данного числа или множества, построенные из этих соотношений.

.1953. Рассмотрим, к примеру, метрическое число «четыре». Это число является множеством и состоит из таких соотношений (пар) множеств, как 4/1, 8/2, 12/3 и т.д. (то есть, пар, где одно множество содержит 4, другое 1 элемент и т.д.). Возьмем за первый способ обозначения метрического числа обозначение любого из соотношений, входящих в число. Тогда число «четыре» можно обозначить любым из приведенных ниже способов: 4/1, 8/2, ... и т.д. Это обозначение состоит из номера изокванты, к которой принадлежит измеряемое, знака «дробь» и номера той изокванты, к которой принадлежит мера.

.1954. Этот способ основан на использовании номеров тех изоквант, которым принадлежат сами члены соотношений. Второй способ обозначения метрических чисел будет основан на использовании номеров тех изоквант, которым принадлежали бы частное, остаток (построенные по алгоритму измерения) и мера. Для обозначения числа сначала будем ставить номер изокванты частного, потом знак «кавычки», дальше номер изокванты остатка, знак «дробь» и номер изокванты меры. Число «четыре» этим способом можно записать как 4″0/1, как 4″0/2 и т.д. Число 5/3 можно записать как 1″2/3 и т.д.

.1955. При этом способе записи допускаются три модификации (сокращения):

.1956. а) число типа 4″0/1 (то есть, когда остаток пустой, и мы имеем дело с натуральным числом) можно обозначить сокращенно как: 4;

.1957. б) число типа 0″1/2 (то есть, когда частное пустое) можно обозначить сокращенно как 1/2 (в этом случае обозначение вторым, данным способом совпадает с обозначением первым способом);

.1958. в) число типа 1″5/100 (то есть, когда мера – степень десятки) можно обозначать сокращенно как 1″05 (добавляя к номеру изокванты остатка слева нули так, чтобы общее количество цифр совпадало с количеством нулей в номере изокванты меры).

.1959. Таким образом получились допустимыми почти все общепринятые способы обозначения положительных рациональных чисел, за исключением:

.1960. а) вместо десятичной точки (или запятой) используется десятичная кавычка (я не мог допустить, чтобы точка или запятая одновременно использовалась в Эуклидоле и для обозначения конца предложения или разделения операндов и как часть обозначения числа; что же касается силы традиции, то традиция использования точки в конце предложения или запятой между операндами ничуть не слабее традиции использования этих знаков в десятичных дробных обозначениях чисел; от одной традиции пришлось отказаться);

.1961. б) не допускается (согласно принципам, принятым в {.618} нелинейная запись типа

.1962.

$$4\frac{1}{2}.$$

.1963. Если обозначения метрических чисел в Эуклидоле (и вообще в моих медитациях) остались сравнительно близкими к традиционным, то обозначения ориентированных чисел расходятся уже сильнее.

.1964. Поскольку каждое (будь то линейно, будь то планарно) ориентированное число является подмножеством какого-нибудь метрического числа, то мне показалось логичным обозначать их записью метрического числа, к которой добавлено обозначение ориентации. Итак, если вслед за обозначением метрического числа идет знак «!» (например, 1/2!), то это обозначение линейно ориентированного числа, а если знак «?», то это обозначение планарно ориентированного числа (восклицательный знак ассоциируется у меня с прямой, а изгиб вопросительного – с окружностью на плоскости).

.1965. В скобках (в качестве подоперандов знака ориентации) указывается характеристика ориентации. Ориентация характеризуется тем метрическим числом, к которому принадлежит соотношение дуги действительного поворота при данной ориентации в противоположное направление (таким образом, поворот на 180 градусов характеризуется числом 1, поворот на 360 градусов – числом 2 и т.д., а поворот на 30 градусов – числом 1/6). Таким способом можно охарактеризовать как ориентацию линейную, так и планарную (характеристиками линейной ориентации будут только натуральные числа, планарной же – любые метрические числа).

.1966. Обозначения характеристик ориентации могут быть сокращены по модулю 2, так как ориентация 0 и ориентация 2 – одно и то же. Единица ориентации (ориентация с характеристикой 1) эквивалентна 180 градусам или π радианам. Я считаю ее более естественной и удобной единицей, чем градусы или радианы (как легче писать: π/2 или 1/2, 3π/2 или 1″5 и т.д.?). Особенно это видно, характеризуя ею линейную ориентацию.

.1967. В характеристиках ориентации допускается замена характеристики 0 на знак «+» и характеристики 1 на знак «–» (обычно это делается в обозначениях линейных чисел, но допускается и в обозначениях планарных). Алгоритмические языки всегда очень страдали от непоследовательности традиционной математической символики, выражающейся в том, что арифметические операции сложения и вычитания обозначаются теми же символами, что и знак вещественного числа (во многих языках программирования их творцы осмелились на изобретение отличающихся символов).

.1968. В Эуклидоле использование знаков «+» и «–» для характеристики ориентации линейных чисел имеет второстепенное значение из-за наличия характеристики числами, и, кроме того, эти знаки заключаются в скобки как подоперанды знака ориентации и не могут быть перепутаны со знаками арифметических операций.

.1969. Ниже приведены несколько примеров обозначения ориентированных чисел в Эуклидоле и по традиции:

.1970.	1″31!(+)	+1.31
	1/2!(0)	$-\frac{1}{2}$
	5?(1/5)	$5(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$

.1971. Запись Эуклидола унифицирована для обоих типов ориентации, в компактности записи проигрывает традиционному способу для линейных, но выигрывает для планарных чисел.

.1972. В текстах, написанных не на Эуклидоле, я сохраняю за собой право использовать параллельно традиционные способы обозначения чисел и «эуклидозированную» запись. При этом я обычно считаю, что метрические, линейные и планарные числа, хоть и соответствуют рациональным положительным (с нулем), рациональным и комплексным числам, но всё же что это объекты другие, заданные другими алгоритмами, и что запись способом Эуклидола указывает, что речь идет об этих числах, в то время, как запись традиционным способом указывает, что речь идет о традиционных числах.

.1973. Итак, числа можно обозначать на Эуклидоле при помощи номеров изоквант в количестве от одного (например: 8) до шести (например: 8″3/5?(3″2/3)), используя при этом еще знаки ″/!?().

.1974. Число вообще может быть обозначено знаком № (или # – для Эуклидола это одно и то же {.1425}), а само обозначение числа может быть дано в скобках как подоперанды знака №, например:

№ (4″2)

.1975. Для обозначения какого-то отвлеченного числа используются обычные символы Эуклидола (а не только отдельные буквы, как в математике), причем этим символом может заменяться:

.1976. а) всё число, например: № (A)

.1977. б) обозначение модуля или ориентации, например: № (A!(+)) или № (4?(A))

.1978. в) один отдельный номер изокванты в обозначении, например: 4″1/A.

.1979. Как обычно, такая замена означает, что данный компонент варьирует.

22. Проблема континуума

1980.07
(раньше на 2 месяца)

.1980. Теперь, когда мы рассмотрели природу рациональных (метрических) и иррациональных (континуальных) чисел, будет весьма интересно взглянуть на некоторые знаменитые проблемы традиционной математики с точки зрения нумерики и теорики.

.1981. Считается, например, общеизвестным, что множество вещественных чисел имеет большую мощность по сравнению с множеством рациональных чисел. Целое столетие математиков мучила «проблема континуума»: вопрос о том, существует ли какое-нибудь множество, имеющее мощность промежуточную между мощностями множеств рациональных и вещественных чисел.

.1982. Поскольку этот вопрос непосредственно касается чисел, то я рассмотрю его здесь, в этой медитации. Что говорит нумерика и теорика о большей мощности множества вещественных чисел?

.1983. В главе ТЕОРИКА,8 {.480} я имел «неосторожность» высказать следующие слова, которые каждый уважающий себя математик, видимо, должен был посчитать пределом наглости дилетанта:

.1984. «Да простят меня математики всего мира, но разговоры о том, что в бесконечном числе бесконечных множеств столько же элементов, сколько и в одном из них, где-то в глубине души я всё же считаю столь же глубокомысленными, как и рассуждения о том, сколько ангелов поместятся на острии иглы... Я нахожу эти рассуждения недостаточно точными».

.1985. Математики очень любят говорить о том, что их наука – идеал точности и строгости. У меня же несколько иное мнение: меня поражает то, как математики могут десятилетиями говорить о чем-то, не зная, о чем они говорят. Сейчас читатель получит возможность хоть немножко заглянуть в те картины, которые я имею перед глазами, когда отпускаю подобные «шпильки» в адрес математиков.

.1986. Разберем классическое доказательство Кантора, приводящее к выводу о большей мощности континуума (множества вещественных чисел) по сравнению со счетным множеством натуральных чисел.

.1987. В своем доказательстве Кантор использует представление вещественных чисел, данное Вейерштрассом, поэтому начнем с него. В теории Вейерштрасса вещественные числа представляются как бесконечные последовательности цифр, состоящие из целой части и бесконечной десятичной дроби (периодической в случае рациональных и непериодической в случае иррациональных чисел).

.1988. Кантор сравнивает множество натуральных чисел и множество вещественных чисел, заключенных между двумя целыми числами (например: между 0 и 1), то есть «ничтожную» долю всех вещественных чисел. Он показывает, что даже эта «ничтожная доля» имеет мощность, неизмеримо большую, чем всё множество натуральных чисел, так как невозможно перенумеровать эти вещественные числа натуральными числами.

.1989. Доказательство ведется от противного. Сначала делается предположение, что нам удалось как-то пронумеровать все вещественные числа, заключенные между 0 и 1. Начало этого бесконечного списка может выглядеть, например, так:

.1990.

1	0,**3**14...
2	0,2**7**1...
3	0,99**9**...
...	...

.1991. (Совершенно безразлично, в каком порядке в этом списке перечисляются вещественные числа).

.1992. Теперь строится новое число по следующему принципу: сначала пишем

0,

.1993. потом смотрим на первую цифру за запятой в первом числе из нашего пронумерованного списка (она в примере подчеркнута) и пишем в новое, строящееся число всё что угодно, только не эту цифру (в примере: не 3, а, например, 1):

0,1

.1994. Теперь смотрим на вторую цифру второго числа (она подчеркнута) и пишем в строящееся число любую цифру, кроме 7, например, 5:

0,15

.1995. Так продолжая, получаем число, которое явно вещественное число из интервала между 0 и 1 и, тем не менее, отличается от любого из перечисленных в нашем списке чисел по крайней мере в одной цифре. Значит в нашем списке содержались не все вещественные числа, и предположение, что нам удалось перенумеровать натуральными числами все вещественные числа в данном интервале, не верно.

.1996. Следовательно, пронумеровать вещественные числа натуральными невозможно, и множество вещественных чисел имеет мощность большую, чем множество натуральных чисел. Таково классическое доказательство Георга Кантора.

23. Объекты Вейерштрасса

1980.07

.1997. Теперь рассмотрим всё это с точки зрения теорики и нумерики. Во-первых: что же такое вейерштрассовы вереницы цифр? Разумеется, каждый вправе называть словом «число» всё, что угодно, лишь бы он это четко оговорил. Я называю числом множества одинаковых соотношений между множествами и резервирую для них это название. Вейерштрассовы вереницы имеют к этим множествам весьма косвенное отношение, поэтому я их впредь буду называть не числами, а «объектами Вейерштрасса» (от этого, конечно, ничего не меняется).

.1998. Мы уже разобрались в том, что «4», «IV», «четыре» – это разные обозначения одного и того же числа, и что, следовательно, ни одно из этих объектов не является собственно числом, а лишь его обозначением, в то время, как само число – это нечто другое.

.1999. Десятичная позиционная система счисления – это всего лишь один из (многочисленных возможных) способов кодирования натуральных чисел. Возможность позиционной нумерации чисел обусловлена тем, что алгоритм, создающий позиционные номера, и алгоритм, создающий натуральные числа, – оба являются алгоритмами Пеано, создающими линейный «бесконечный» ряд продуктов, и поэтому их продукты могут быть сопоставлены.

.2000. Короче: надо различать множество чисел (натуральных), заданное одним алгоритмом, и множество номеров (той или иной системы счисления), заданное другим алгоритмом.

.2001. Объекты Вейерштрасса по своей природе похожи на номера, то есть, они – обозначения чисел. Естественно, что бесконечные вейерштрассовы вереницы цифр, к тому же в бесконечном количестве, нигде в мире не существуют. Речь у нас опять идет о потенциальных продуктах определенного алгоритма, позволяющего создавать эти вереницы до любой длины и в любом количестве.

.2002. Можно ли утверждать, что между объектами Вейерштрасса и вещественными числами (то есть, продуктами некоторых алгоритмов, работающих с множествами) можно установить такое взаимно однозначное соответствие, какое мы установили между номерами и натуральными числами? В некотором смысле можно, хотя это требует обширных уточнений и оговорок, в которые не будем здесь вдаваться, так как наша цель – разобраться в доказательстве Кантора, а он рассматривал объекты Вейерштрасса независимо от того, какое они имеют отношение к тем объектам, которые я называю вещественными числами.

.2003. Итак, с точки зрения теорики Кантор сравнивал два алгоритма: алгоритм позиционной нумерации и алгоритм построения объектов Вейерштрасса. В данном случае эти алгоритмы оперировали знаками десяти разновидностей (цифр). Легко понять, что во всем этом ничего существенного не изменится, если вместо «арабских» цифр брать любые другие знаки (или вообще объекты другой природы) и не в количестве десяти, а в любом другом (начиная с двух), то есть, если брать другую базу нумерации. Я воспользуюсь этим и перейду на двоичную систему счисления, так как в этом случае легче составить полные и обозримые перечни комбинаций знаков.

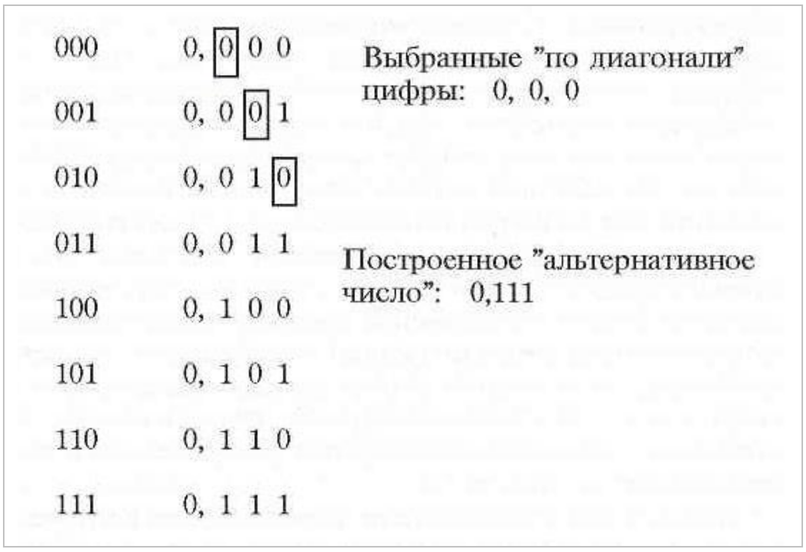
24. Доказательство Кантора

1980.09
(через 2 месяца)

.2004. Сначала рассмотрим, как оба сравниваемых алгоритма будут работать «с конечными множествами», а потом посмотрим, что произойдет, если их неограниченно продолжать. Допустим, что работа алгоритма нумерации ограничивается всего тремя знаками, а работа алгоритмов объектов Вейерштрасса – тремя знаками после запятой.

.2005. Итак, оба алгоритма отработали и создали: один «все существующие натуральные числа», а другой – «все существующие вещественные числа в интервале между 0 и 1». Вот их полная продукция:

.2006.



000	0, $\boxed{0}$ 0 0
001	0, 0 $\boxed{0}$ 1
010	0, 0 1 $\boxed{0}$
011	0, 0 1 1
100	0, 1 0 0
101	0, 1 0 1
110	0, 1 1 0
111	0, 1 1 1

Выбранные ”по диагонали” цифры: 0, 0, 0

Построенное ”альтернативное число”: 0,111

.2007. Все «возможные» «вещественные числа» перенумерованы «натуральными числами». Теперь построим новое вещественное число по принципу Кантора. Этим числом будет 0,111. Мы успели взять только первые три числа, как уже исчерпали все знаки: ведь матрица цифр не квадратная. Среди этих трех «проверенных» чисел действительно нет числа 0,111, хотя оно имеется среди продуктов алгоритма.

.2008. Легко понять, что вывод, аналогичный выводу Кантора (что нам на самом деле не удалось перенумеровать «вещественные числа» «натуральными») был бы несостоятельным в отношении приведенного примера с трехзначными числами: ведь при построении нового числа мы не перебирали все «вещественные числа». Теперь спрашивается: каково должно быть число разрядов p (которое мы, как будем считать, можем увеличивать до бесконечности), чтобы вывод Кантора стал состоятельным? Какое бы мы ни взяли число знаков *p* после запятой в наших «вещественных числах», общее количество объектов Вейерштрасса будет a^p, где *a* – мощность базы нумерации. При любом *a*, начиная с *a*=2, a^p будет больше, чем *p*, то есть матрица знаков после запятой в объектах Вейерштрасса будет вытянутой (причем, чем больше *a*, тем сильнее; наш пример с *a*=2, с двоичной системой счисления – самый «слабый»).

.2009. Итак, доказательство Кантора было бы состоятельным только в том случае, если число разрядов *p* и число цифровых последовательностей a^p были бы равны. Но это невозможно ни при каких *a*>1 и *p*>1. Вывод о большей мощности континуума по сравнению со счетным множеством не состоятелен даже если пренебречь тем, что, так сказать, «число» верениц Вейерштрасса целиком зависит от мощности базы нумерации (от системы счисления), пренебречь тем, что вместо множества вещественных чисел здесь рассматривалось множество объектов Вейерштрасса, то есть, обозначений, и что вообще во всей теории Вейерштрасса недостаточно четко различаются понятия числа и его обозначения.

.2010. И на таком зыбком основании держится всё учение о превосходящей мощности континуума, породившее столько проблем. С моей точки зрения пресловутая проблема континуума, потребовавшая столько усилий математиков, во истину стоит не больше, чем вопрос о том, сколько ангелов поместятся на острии иглы. Эта проблема просто лишена смысла, ее нет, она порождена чрезвычайно нестрогим рассуждением о чрезвычайно расплывчатом объекте.

.2011. Вывод о несостоятельности доказательства Кантора, утверждающего большую мощность континуума по сравнению со счетным множеством, я считаю третьим значительным специфически математическим результатом применения на практике идей теорики (после вывода о множественности числовых систем и предложения внутренне более простой и стройной числовой системы).

.2012. (Позже Кантор доказал в принципе тем же методом и более общую теорему о том, что мощность множества всех отображений множества X на множество Y имеет большую мощность, чем множество X. Отсюда, рассматривая последовательности Вейерштрасса как отображения множества натуральных чисел на множество элементов 0 и 1 также делается вывод о превосходящей мощности континуума. Разбор этой теоремы выходит за пределы темы настоящей медитации и будет дан в дальнейших. Я остаюсь при своем мнении: все разговоры о том, что бесконечные множества могут иметь различную мощность, лишены всякого смысла).

25. Арифметические операции

1980.05
(раньше на 4 месяца)

.2013. Итак – числа, согласно подходу теорики (и в конечном счете согласно теории отражения) – это абстрактные множества, заданные (как и все абстрактные множества) определенными алгоритмами отражения, то есть, алгоритмами, по которым люди обрабатывают информацию о внешнем мире. Какие именно алгоритмы задают множество метрических (рациональных положительных) чисел, было описано выше с точностью, достаточной для реализации этих алгоритмов на ЭВМ.

.2014. Теперь посмотрим, чем же в этом множестве чисел являются основные операции арифметики: сложение, вычитание и т.д. Современная математика смотрит на эти операции как на отношения, заданные во множестве чисел. Понятие отношения я уже рассмотрел в главе ТЕОРИКА,28 {.714}. По алгоритмам развертки и произведения (или близким к ним алгоритмам) можно над множеством метрических чисел (пропорквантой) построить множество соотношений между метрическими числами. Но для того, чтобы «задать» во множестве соотношений какое-нибудь определенное отношение, надо указать еще и алгоритм его построения (алгоритм, по которому можно определить, принадлежит ли данное соотношение данному отношению или нет) подобно тому, как сами члены соотношений тоже задаются каким-то алгоритмом.

.2015. Итак, члены соотношений (числа) – это множества, заданные в конечном счете алгоритмом измерения, который служит людям для сравнения величины множеств (то есть – различных объектов) и для классификации различных соотношений между этими объектами. Какими алгоритмами заданы множества арифметических операций и для чего эти алгоритмы служат людям в процессе отражения? Так выглядит вопрос об арифметических операциях в свете теорики.

.2016. Какой алгоритм определяет операцию как отношение во множестве чисел? С первого взгляда кажется (и это оправдается в дальнейшем), что это какой-то алгоритм, который позволяет любым двум числам сопоставить третье число.

.2017. Что это за алгоритм, сопоставляющий двум числам третье число? С точки зрения теорики число – это множество одинаковых соотношений. Очевидно, что наш гипотетический алгоритм работы с множествами соотношений должен базироваться на каком-то более простом алгоритме, работающем с единичными соотношениями множеств.

.2018. И, наконец, этот базисный алгоритм работы с единичными соотношениями, видимо, обрабатывает какую-то распространенную ситуацию в полях множеств.

.2019. Основываясь на этих соображениях, можно любую арифметическую операцию рассматривать на четырех уровнях:

.2020. 1) <u>Уровень ситуации</u>: какую распространенную в полях множеств задачу призван решать тот базисный алгоритм, с которого всё начинается?

.2021. 2) <u>Уровень алгоритма</u>: каков тот базисный алгоритм, который эту задачу решает с единичными множествами или соотношениями?

.2022. 3) <u>Уровень операции</u>: каков тот алгоритм, который это решение обобщает с единичных соотношений на множества соотношений, то есть – на числа?

.2023. 4) <u>Уровень отношения</u>: каков тот алгоритм, который задает на основе предыдущих алгоритмов отношение во множестве чисел?

.2024. По такой схеме сейчас и рассмотрим арифметические операции.

.2025. В этой медитации я рассмотрю обработку трех ситуаций:

.2026. а) множества и его подмножества;

.2027. б) трех произвольных множеств;

.2028. в) порядка из множеств с фиксированным соотношением между соседними множествами.

.2029. Мы увидим, что алгоритмами обработки этих трех ситуаций в базокванте и задаются в конечном счете операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня и логарифмирования.

26. Метросложение и метровычитание

1980.05

.2030. Итак, первая ситуация: в базокванте имеются три множества A, B, C, причем множество B является подмножеством A, а множество C – дополнением в A к B. Можно также считать, что A является объединением двух непересекающихся множеств B и C. Не важно, появилась ли эта ситуация в результате сечения или объединения множеств, важна сама ситуация между множествами и то, что эта ситуация в действиях с множествами появляется очень часто и имеет очень большое значение.

.2031. Рассмотрим соотношения этих трех множеств с одним и тем же фиксированным множеством E (я буду обозначать эти соотношения так: A/E, B/E и C/E). Любое из этих соотношений, естественно, принадлежит какой-нибудь партокванте и какой-нибудь пропорции (числу).

.2032. Надо решить задачи такого характера: пусть даны два из этих соотношений, надо построить третье. Значит в этой ситуации стоят три задачи:

а) дано B/E и C/E, найти A/E;
б) дано A/E и B/E, найти C/E;
в) дано A/E и C/E, найти B/E.

.2033. На уровне ситуации здесь намечаются три арифметические операции.

.2034. Алгоритм решения первой и второй задачи (алгоритм увеличения и алгоритм уменьшения) приведены в параграфах 12 {.1753} и 13 {.1754}. Это настолько элементарные алгоритмы, что я их не буду здесь комментировать. Если бы мы попытались бы описать алгоритм решения третьей задачи, то обнаружили бы, что это тот же алгоритм, что и для решения второй задачи. Таким образом, на уровне алгоритма мы имеем уже не три, а только две арифметические операции обработки этой ситуации.

.2035. В параграфе 14 {.1755} описан алгоритм выравнивания, который произвольные два соотношения приводит к нашей рассматриваемой ситуации. Его действие заключается в том, что он строит два соотношения, одинаковые с исходными (принадлежащие тому же числу), но такие, что меры в обоих соотношениях одинаковые.

.2036. В параграфе 15 {.1756} описан алгоритм метросложения. На вход ему подаются два числа (два множества из пропоркванты), а он берет по одному элементарному отношению (представителю) из каждого числа, выравнивает их, и алгоритмом увеличения строит третье соотношение. Потом он определяет, в какой пропорции (в каком числе) содержатся соотношения, одинаковые с этим вновь построенным соотношением. Тем самым он осуществляет сопоставление двум числам третьего числа на основе алгоритма увеличения.

.2037. Алгоритм метровычитания, описанный в параграфе 16 {.1757}, работает совершенно аналогично, только использует вместо алгоритма увеличения алгоритм уменьшения.

.2038. Таким образом, отправляясь от ситуации «множество–подмножество», мы на уровне операции имеем уже две арифметические операции, которые двум числам ставят в соответствие третье число. Теперь нет никакой проблемы перейти к уровню отношения, то есть, описать алгоритм, который построил бы нам соответствующие отношения во множестве чисел. Такой алгоритм описан несколько ниже одновременно для всех рассматриваемых нами операций.

.2039. Итак, разбор первой ситуации («множество–подмножество») дал нам три операции на уровне ситуации, которые уже на уровне алгоритма свелись к двум операциям, которые я назвал метросложением и метровычитанием. Легко догадаться, что такие названия даны для сокращения словесных оборотов «сложение во множестве метрических чисел» и «вычитание во множестве метрических чисел».

.2040. В начале этой медитации я обещал остановиться там, где математика начинает, поэтому анализ свойств этих операций выходит за пределы темы этой медитации и будет рассмотрен в другой работе. Здесь я хотел только показать, откуда взялись сами операции. Сложение и вычитание взялись из алгоритма, который оперирует числами (множествами соотношений) на базе алгоритма обработки единичных соотношений во множестве и его подмножестве.

.2041. Откуда же взялись умножение и деление?

27. Метроумножение и метроделение

1980.05

.2042. Теперь рассмотрим вторую ситуацию: в базокванте имеются три произвольных множества A, B, C (на этот раз не обязательно множество и подмножества, хотя они могут быть и таковыми). Теперь рассмотрим не их соотношения с каким-то побочным фиксированным множеством E, а между самими множествами A, B и C.

.2043. Всего возможны шесть таких соотношений (если исключить соотношения множества с самим собой): A/B, B/A, A/C, C/A, B/C, C/B. Если теперь повторить подход предыдущей главы и сформулировать общую задачу как требование найти по двум соотношениям третье, то всего могут быть 60 задач (можно составить 15 пар «данных» соотношений и к каждой паре искать одно из четырех «искомых» соотношений). Таким образом, на уровне ситуации намечаются 60 арифметических операций.

.2044. Но если даны соотношения, например, A/B и B/A, то найти любое из остальных четырех соотношений можно только сверхъестественными средствами. Поэтому 12 арифметических операций умирают не родившись. Остаются 48 операций (тоже немножко больше, чем нам давали в школе).

.2045. Сорок восемь арифметических операций – это, конечно, слишком много, и было бы желательно свести решение всех этих задач к выполнению одного или нескольких алгоритмов с незначительными модификациями данных на входе.

.2046. Самое существенное в оставленных парах соотношений – это то, что в них входят обязательно все три множества, причем одно множество входит дважды. Этим «центральным» множеством с одинаковым правом может быть как множество A, так и множество B или множество C. Но, если мы найдем алгоритм решения этих задач в случае, когда центральным множеством является, например, B, то, чуточку переставляя данные на входах этих алгоритмов, сможем решить эти задачи и для случаев, когда центральными являются A и C. На этом основании можно утверждать, что на самом деле мы имеем дело не с 48-ю, а только с 16-ю операциями. Данными парами соотношений могут быть:

а) A/B и B/C;
б) B/A и B/C;
в) A/B и C/B;
г) B/A и C/B;

.2047. и к каждой данной паре можно искать 4 соотношения: A/C, C/A, B/A (или A/B) и C/B (или B/C).

.2048. В параграфе 17 {.1758} описан простой алгоритм переворота, который позволяет найти B/A, если дано A/B и т.п. Его действие можно выразить словами: «взять обратное соотношение». Он позволяет решить половину поставленных задач.

.2049. В параграфе 18 {.1759} описан алгоритм базирования, который позволяет найти A/C, если дано A/B и B/C и т.п. Его сущность состоит в переходе от одной меры (базы, единицы измерения) к другой. Этот алгоритм (один или в сочетании с алгоритмом переворота) позволяет решить все остальные задачи рассматриваемой ситуации.

.2050. Итак, на уровне алгоритма мы имеем вместо 48 арифметических операций уже только две, которые можно было бы назвать так:

а) переворачивание соотношения;
б) изменение меры.

.2051. В параграфе 19 {.1760} описан алгоритм приравнивания, который приводит два произвольных соотношения к ситуации, в которой работает алгоритм базирования: когда мера первого соотношения равномощна с измеряемым второго соотношения. Этот алгоритм аналогичен алгоритму выравнивания, которым мы пользовались при определении операций метросложения и метровычитания.

.2052. В параграфах 20 {.1761} и 21 {.1762} описаны алгоритмы метроумножения и метроделения. Они работают подобно алгоритмам метросложения и метровычитания: на вход им подаются два числа, они берут по одному соотношению – представителю из каждого числа, по алгоритмам базирования и переворота строят результирующее соотношение и «смотрят», в какое же число это вновь построенное соотношение попадет.

.2053. Но надо отметить, что в переходе от уровня алгоритма к уровню операции имеются существенные различия между сложением–вычитанием с одной стороны и умножением-делением с другой стороны. При сложении–вычитании мы на уровне алгоритма имели два базисных алгоритма, которые при переходе на уровень операции превратились один к одному в две операции. Совсем другая ситуация наблюдается в случае умножения–деления. Здесь один к одному в операцию умножения превратился только алгоритм базирования. Алгоритм переворота в самостоятельную операцию не перешел, а деление родилось из смеси умножения и исчезнувшей операции переворота.

.2054. Разумеется, можно вместо алгоритма базирования использовать другой алгоритм, который по соотношениям A/B и C/B строил бы A/C. Тогда «самостоятельной» операцией оказалось бы деление, а умножение представляло бы собой смесь деления и переворачивания. Но суть от этого не меняется: в любом случае элементарна только одна операция – либо умножение, либо деление, а вторя представляет собой смесь этой операции с «исчезнувшей» операцией переворачивания (правда, можно вводить одновременно и алгоритм базирования, и тот алгоритм, который превращается в операцию деления, но тогда не понятно, почему нужны именно два основных алгоритма, а не все 48; ведь мы хотим свести число основных алгоритмов к минимуму).

.2055. Самое естественное, конечно, было бы определить на уровне операции две операции, соответствующие один к одному двум основным алгоритмам (не операции метроумножения и метроделения, а операции метроумножения и метропереворачивания).

.2056. Операция переворачивания соотношения относится на самом деле не к ситуации с тремя произвольными множествами, а к ситуации с двумя множествами. Значит, к ситуации с тремя множествами (а именно с этой ситуацией связаны как умножение, так и деление) относится только одна элементарная операция (как пожелаем: либо умножение, либо деление) и сущность этой операции состоит в переходе от одной меры к другой.

.2057. Итак, арифметические операции умножения и деления взялись из обработки ситуации с тремя произвольными множествами, и анализ алгоритмов, лежащих в их основе, показывает, что они основываются на одном элементарном алгоритме, специфичном для этой ситуации, и служит этот алгоритм для изменения меры.

28. Метровозведение

1980.05

.2058. Теперь осталось только разобрать, какие действия со множествами лежат в основе третьей серии операций: возведения в степень и извлечения корня. Эти действия можно охарактеризовать словами: «построить соотношения определенного рода». В частности, на уровне ситуации рассмотрим две задачи.

.2059. Первая задача: пусть даны соотношения A/E и B/E. Построить такое соотношение C/E, чтобы A/B и B/C были одинаковыми (см. Фиг.8 случай а {.2069}). Вместо указанных соотношений можно оперировать одинаковыми с ними соотношениями. Эта задача решается при помощи алгоритма экстраполяции, который описан в параграфе 22 {.1763}.

.2060. Вторая задача: пусть даны соотношения A/E и B/E. Построить такое соотношение C/E, чтобы A/C и C/B были одинаковыми (см. Фиг.8 случай б {.2070}). Вместо указанных соотношений можно оперировать одинаковыми с ними соотношениями. Алгоритм интерполяции, описанный в параграфе 23 {.1764}, решает несколько более общую задачу: он строит заданное число соотношений C(0)/E, C(1)/E, ..., C(a)/E таких, что A/C(0), C(0)/C(1), ..., C(a)/B все одинаковы.

.2061. Таким образом, если первую рассмотренную нами ситуацию можно было охарактеризовать словами «множество и подмножество», вторую – словами «три произвольных множества», то третья характеризуется словами: «ряд одинаковых соотношений».

.2062. Образно выражаясь, можно сказать, что по алгоритму экстраполяции можно строить ряд соотношений, одинаковых с данным соотношением, а по алгоритму интерполяции можно «заполнять интервалы» между данными соотношениями одинаковыми между собой соотношениями.

.2063. Итак, на уровне алгоритма мы имеем две операции:

.2064. а) экстраполяцию (которая соответствует возведению в целую степень);

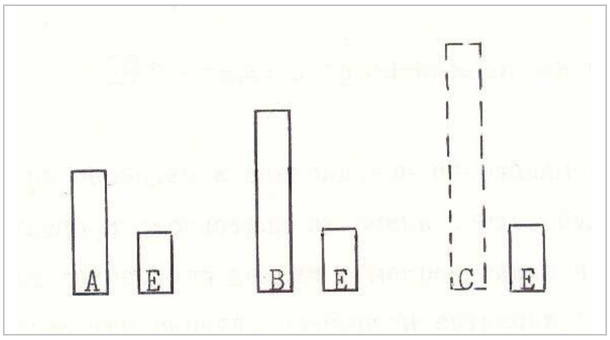
.2065. б) интерполяцию (которая соответствует извлечению корня).

.2066. Но на уровне операции удобнее всего определять только одну операцию, которая использует оба алгоритма. Алгоритм метровозведения, определяющий эту операцию, описан в параграфе 24 {.1765}. Как и предыдущие алгоритмы на уровне операций, он двум числам ставит в соответствие третье число.

.2067. И, наконец, в параграфе 25 {.1766} описан алгоритм метроопераций, который строит отношения во множестве метрических чисел, определяя все рассмотренные нами операции на уровне отношения. Его действие заключается в том, что он перебирает все пары чисел, при помощи соответствующих алгоритмов операций находит третье число и помещает эти тройки в отношение.

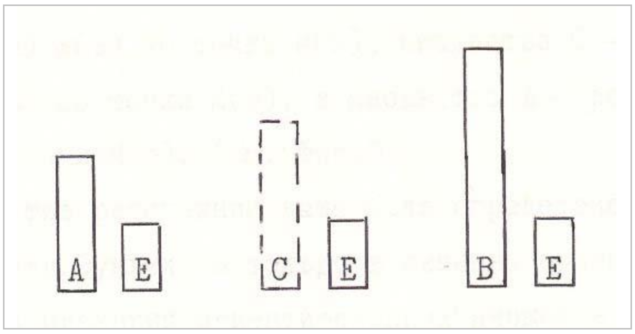
.2068. Итак, теперь построено не только множество, но и система метрических чисел (то есть, сами числа вместе с операциями над ними). Как числа, так и операции «заданы» определенными алгоритмами работы с множествами.

.2069. Фиг.8. Экстраполяция и интерполяция



а) экстраполяция

.2070.



б) интерполяция

29. Операции с ориентированными числами

1980.09
(через 4 месяца)

.2071. Теперь перейдем к аналогичным операциям с ориентированными числами и рассмотрим их очень бегло. Будем повторять всё то же самое, что делали с метрическими числами. На уровне ситуации мы там сначала разбирали ситуацию «множество и подмножество», причем нам было всё равно, появилась ли эта ситуация в результате сечения одного множества или объединения двух.

.2072. Аналогичную ситуацию в случае ориентированных множеств можно описать так: пусть множество В – расстояние от точки (элемента) М(е) до точки М(к), множество С – расстояние от точки М(к) до точки М(р), а множество А – расстояние от точки М(е) до точки М(р). (См. Фиг.9 {.2078}).

.2073. Понятие расстояния выше только в линейно ориентированных множествах было определено с точностью, приемлемой для Эуклидоса. Для планарно ориентированных множеств я использую обыкновенное, геометрическое понятие расстояния.

.2074. Лучше всего расстояние представлять себе как путь, пройденный от одной точки до другой, хотя на самом деле мы оперируем просто ориентированными множествами. В случае одинаковой ориентации всех трех множеств А, В, С, рассматриваемая ситуация превращается в ситуацию «множество и подмножество».

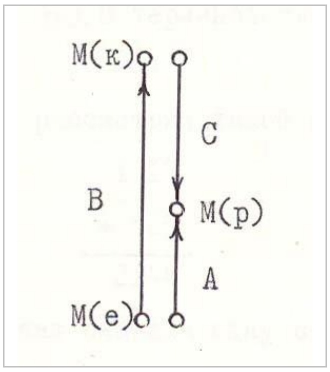
.2075. Точно так же, как и в случае неориентированных множеств, на уровне ситуации здесь намечаются три задачи, а на уровне алгоритма – две операции. Однако определяющие алгоритмы будут наиболее простыми и изящными, если этими двумя операциями будут не сложение и вычитание, а одна из них плюс операция определения обратного расстояния (определения расстояния от М(к) до М(е) по расстоянию от М(е) до М(к)). Эта ситуация похоже на ту, которую мы наблюдали при метроделении и метроумножении.

.2076. Операции умножения и деления во множествах линейных и планарных чисел вводим совершенно аналогично тому, как это делали во множестве метрических чисел. На уровне ситуации рассматриваем три произвольных ориентированных множества, на уровне алгоритма имеем два алгоритма (переворачивания и изменения меры), а в дальнейшем приходим к двум арифметическим операциям. Если читатель попытается сам пройти этот путь, то он со всей отчетливостью увидит, почему нужно было уже для метрочисел вводить умножение и деление как операции изменения единицы отсчета и вводить совершенно независимо от операций сложения и вычитания (если для метрочисел введение умножения через сложение не вызывало бы особых возражений, то для ориентированных чисел такой путь был бы невозможен). Теперь же мы ввели все четыре операции во всех трех множествах чисел по одному и тому же принципу.

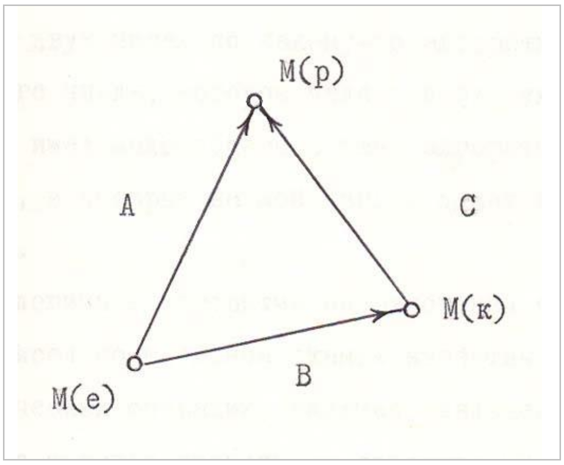
.2077. Операции во множестве линейных чисел я назову соответственно линсложением, линвычитанием, линумножением и линделением, а операции во множестве планарных чисел – планcложением, планвычитанием, планумножением и планделением.

.2078. Фиг.9. Ориентированные множества

В случае линейной ориентации:



В случае планарной ориентации:



30. О терминологии

1980.09

.2079. Теперь рассмотрим такой пример:

$$\begin{array}{r} 1315 \\ +\ \ 829 \\ \hline 2144 \end{array}$$

.2080. Я написал сначала одну строку цифр, потом вторую, затем провел черту, и по какому-то принципу образовал третью строчку. Что здесь произошло?

.2081. В первом порыве хочется ответить: «я сложил два числа». Но если задуматься немножко глубже, то легко понять, что перед нами не числа, а их обозначения (которые мы договорились никогда не путать, если это важно). На самом деле я из обозначений двух чисел по какому-то алгоритму образовал обозначение того числа, которое является их суммой, причем этот алгоритм имел мало общего с теми алгоритмами, которые я описал выше, и которые на мой взгляд лежат в основе операции сложения.

.2082. Аналогичные алгоритмы оперирования со значками в обозначениях чисел со школьной скамьи известны каждому и для всех арифметических операций, включая извлечение корня. Такие алгоритмы я называю вторичными алгоритмами арифметических операций. В практической жизни все мы получаем результаты арифметических операций при помощи именно вторичных алгоритмов. Но мне кажется несомненным то, что люди никогда бы не придумали их и не пользовались бы ими, если бы за вторичными алгоритмами оперирования значками не стояли бы первичные, глубинные алгоритмы оперирования множествами, которые только и определяют правильность результата и тем самым даже саму пригодность вторичного алгоритма.

.2083. Теперь еще один вопрос. С незапамятных времен людям было удобно изображать числа на числовой оси (а комплексные числа – на плоскости). В чем сущность этого способа?

.2084. Отрезки, исходящие на бумаге из центра координат – это объекты материальные: они состоят из молекул красителя, прилипших к бумаге, они существуют реально в пространстве и времени. Это реалии тех множеств, номиналии которых человек подвергает обработке в своем мозге, когда он смотрит на эти отрезки и измеряет их. Соотношения между этими отрезками – это элементы тех множеств, которые называются числами. Итак, сущность геометрического изображения чисел заключается в том, что соотношения между отрезками – это простые примеры элементов, принадлежащих тому или иному числу.

.2085. Из таких представлений следует, что правильнее будет говорить не об установлении соответствия между точками прямой и числами, а о соотношениях между отрезками прямой как об элементах чисел (где числа – это множества).

31. Дедуктивный и индуктивный пути

1980.09

.2086. Меня как-то спрашивали: «Как ты можешь доказать, что в мозге работают какие-то описанные тобою алгоритмы?». Я это и не собираюсь доказывать. Я это постулирую. Единственное доказательство правильности постулатов – это стройность, непротиворечивость, простота и согласованность с фактами той теории, которая возводится на фундаменте этих постулатов.

.2087. В предыдущих медитациях от ТЕОРИКИ и до ЧИСЕЛ я использовал дедуктивный путь к решению вопроса о числах: я объявил основой своего построения некоторые общефилософские постулаты (о том, что существуют только материальные объекты и т.д.), и в дальнейшем объяснял различные вещи, основываясь на истинность этих постулатов. При этом цель была показать, что применение этих постулатов позволяет построить непротиворечивую систему взглядов, которая объясняет интересующие нас вопросы не хуже (на самом деле лучше), чем система противоположных постулатов.

.2088. Такой метод широко применялся в науке уже с античных времен и до наших дней. Например, Эйнштейн, излагая специальную теорию относительности, постулирует два положения, а потом показывает, что, какими бы парадоксальными ни были их следствия, они не ведут к противоречиям, одновременно прекрасно объясняя наблюдаемые явления. Таким образом, дедуктивный путь ни в коем случае нельзя считать ошибочным: какими бы сомнительными ни казались постулаты, их непротиворечивость и согласуемость с наблюдениями должны заставить умных людей относиться к ним серьезно.

.2089. Но всё же дедуктивный путь может оказаться трудным для постижения теории, особенно для тех, у кого эмоции главенствуют над логикой. Заведомо убежденный в ложности постулата, такой читатель игнорирует всю логическую непротиворечивость и смотрит на все построения теории как на очередную бессмыслицу. Для таких читателей, пожалуй, лучше индуктивный путь (от частного примера к обобщениям).

.2090. Чтобы подойти к вопросу о числах по индуктивному пути, считайте, что я никогда не высказывал никаких положений относительно природы математических объектов (то есть, не провозглашал никаких постулатов). Договорившись об этом, рассмотрим одну сделанную мною машину, считая при этом, разумеется, что данная машина не имеет никакого отношения к каким бы то ни было математическим проблемам. (Правда, при таком подходе трудно объяснить, зачем я эту машину сделал; считайте, что я создал ее для того, чтобы «играться по определенным правилам»). Машина эта называется «Эуклидос».

.2091. Описание этой машины возьмите из медитаций ЭУКЛИДОС, ПРЕДИКАТ, АЛГОРИТМ (выбросив оттуда все те места, где говорится о какой-то аналогии между Эуклидосом и мозгом). После этого представьте себе, что я рассказываю Вам о программах, написанных мною на Эуклидоле для Эуклидоса (это те программы, которые приведены в этой медитации {.1742}). Анализируя по написанному (но не выполняя) эти программы игрушечного процессора, мы получим представление о некоторой системе потенциальных продуктов этих программ (о бесконечном ряде изоквант, о партокванте и т.д.).

.2092. Я хочу еще раз напомнить читателю, что, согласно только что принятой договоренности, я не высказывал абсолютно никаких предположений о природе математических объектов, всё это, о чем я тут говорил, не имеет абсолютно никакого отношения к математике, я Вам рассказываю о своей машине, которую я построил, чтобы играться с ней «по определенным правилам», и только.

.2093. Но вот какая получается интересная штука при таком подходе: система потенциальных продуктов моих программ для Эуклидоса абсолютно изоморфна системе рациональных чисел. Изоморфна в том смысле, что какое бы Вы не взяли свойство рациональных чисел и операций над ними, я Вам покажу соответствующее свойство потенциальных продуктов моих программ. Какое забавное совпадение, не правда ли?

.2094. Каждому Вашему числу соответствует одно мое «множество одинаковых соотношений». Если Вы, например, скажете, что благодаря коммутативности сложения, a+e=e+a, то я Вам отвечу, что Вы можете поменять местами материалы у алгоритма метросложения, а продукт его от этого не изменится. И так далее: какое бы Вы ни назвали свойство системы рациональных чисел, я Вам покажу, что аналогичными, соответствующими свойствами обладают и потенциальные продукты моих программ для Эуклидоса.

.2095. И тут, чего не бывает, у кого-нибудь из наиболее дерзких читателей может появиться мысль: «А просто ли это совпадение?».

.2096. Ведь что такое Эуклидос? Это система, запоминающая информацию о существовании внешних объектов, о связях между этими объектами, и манипулирующая этой информацией. А вдруг мозг – это тоже система, запоминающая информацию о существовании внешних объектов, о их связях, и манипулирующая этой информацией? Вдруг система рациональных чисел и система потенциальных продуктов моих программ – объекты одинаковой природы, и их изоморфизм вовсе не случайность? Вдруг рациональные числа – также система потенциальных продуктов каких-то мозговых программ?

.2097. О нет, конечно, это кощунство, ересь! Такой вывод ни в коем случае нельзя сделать из одного соответствия между объектами совершенно разной природы: ведь числа – это числа, а эти алгоритмы – это совсем другое!

.2098. Логически безупречный вывод о том, что система рациональных чисел должна являться системой потенциальных продуктов каких-то алгоритмов мозга, конечно, сделать нельзя. Здесь наш индуктивный путь обрывается. Дальше возможен только скачок на дедуктивный путь: можно провозгласить постулат о том, что числа – потенциальные продукты алгоритмов мозга, а потом показать, что это не ведет абсолютно ни к каким противоречиям, что это прекрасно согласуется с известными фактами и даже что это позволяет пролить свет на многие неясные до сих пор вопросы. Умных людей это должно заставить относиться серьезно к такой системе постулатов.

.2099. Именно так я и поступаю. Конечно, я не шел к пониманию природы чисел по только что описанному индуктивному пути. Не было так, что я сначала невесть зачем сделал Эуклидос, а потом к великому своему изумлению обнаружил, что продукты моих программ изоморфны системам чисел. Фактически я шел дедуктивным путем, который изложен в этих медитациях. Но индуктивный путь мне нравится тем, что, не навязывая читателю с самого начала какие-то постулаты, заставляет его самого сделать все необходимые выводы (*если он на эти выводы способен, разумеется – прим. 1994 года*).

32. Перспективы обобщения

1980.09

.2100. Если мы совершили прыжок на дедуктивный путь и приняли за постулат положение о том, что числа (и вообще все абстрактные математические объекты) – это потенциальные продукты (или материалы) каких-то внутримозговых алгоритмов манипулирования множествами (конечными и конкретными множествами, разумеется), то появляется естественный вопрос: до какой степени мы можем, имея на самом деле в виду алгоритмы мозга, разбираться в программах игрушечной машины «Эуклидос»?

.2101. Ясное дело, что мозг – не совсем Эуклидос. Да и сам Эуклидос я мог бы сделать в тысячах различных вариантов. Я никогда не утверждал, не утверждаю и не собираюсь утверждать, что имеется полное соответствие между мозгом и Эуклидосом, между биологическими алгоритмами мозга и моими программами на Эуклидоле. Сейчас у нас нет возможности изучать подлинную «систему команд» и «операционную систему» мозга. Так я Вас спрашиваю: «Что лучше в этих условиях – сидеть сложа руки или изучать хотя бы программы Эуклидоса?».

.2102. Да, Эуклидос не мозг. Эуклидос модель. Упрощенная, как все модели. Но если системы продуктов программ Эуклидоса обнаруживают такую потрясающую аналогию с математическими системами, то, может быть, Эуклидос не такая уж и плохая модель?

.2103. Эуклидос запоминает информацию о существовании внешних объектов и о связях между ними. Но, может быть, мозг тоже запоминает информацию о существовании внешних объектов и о связях между ними? Пусть он запоминает другими средствами, но может быть он запоминает ее? И в этом аналогия между Эуклидосом и мозгом?

.2104. Что такое 12 элементарных операций Эуклидоса? Это средства, позволяющие:

.2105. а) устанавливать и разрушать связи между объектами (поместить во множество и удалить из него – операторы МО и ОМ);

.2106. б) создавать и уничтожать объекты (оператор СЕ и внутренняя отработка вызова алгоритма);

.2107. в) проверять наличие объекта и наличие связей (операторы ТЕХ и ТЕС);

.2108. г) принимать различные действия в зависимости от результатов этих проверок (операторы переходов ВЕ и ВО);

.2109. д) переходить от одних объектов к другим (операции с индексами);

.2110. е) комбинировать отдельные алгоритмы (оператор ЕХ).

.2111. Так, может быть, мозг тоже обладает такими средствами? Не такими в точности операциями, разумеется, а вообще такими средствами? И в этом его аналогия с Эуклидосом? И этой аналогии в работе уже достаточно, чтобы существовала глубокая аналогия в продукции? И тогда изучение программ Эуклидоса не такое уж и бессмысленное занятие?

.2112. Если вступить на дедуктивный путь и принять постулат о том, что математические структуры – это системы потенциальных продуктов каких-то алгоритмов, то появляется возможность считать, что приведенные выше алгоритмы – это определения множеств различных чисел и операций над ними. Таким образом, эти понятия перестают быть первичными, и определяются подобно понятиям «пересечение», «объединение» множеств и т.д. (которые тоже уже не элементарны) и определяются при помощи всё тех же 12 элементарных операций.

.2113. Но теперь довольно легко будет понять, что достаточно несколько изменить определяющий алгоритм (а это так же просто, как изменить программу ЭВМ), чтобы мы имели дело уже с несколько другими потенциальными продуктами. Таким образом, можно определять системы, с одной стороны похожие на ранее известные, а, с другой стороны, отличающиеся от них.

.2114. Да и вообще традиционные математические системы перестают быть чем-то объективным, чем-то абсолютным, чем-то большим, нежели один, в общем-то совершенно случайный, вариант определяющих алгоритмов. Традиционная система чисел, создавшаяся исторически и завершенная Карлом Гауссом – это лишь система потенциальных продуктов одного варианта определяющих алгоритмов.

.2115. Но все эти перспективы открываются лишь тому, кто перешел на дедуктивный путь и принял постулат о программистской природе математики. Для того, кто остался на индуктивном пути, речь может идти только о странных переплетениях потенциальных продуктов программ для машины Эуклидос и об удивительных аналогиях между этими программами и математикой.

33. Природа чисел

1980.04
(раньше на 5 месяцев)

.2116. Теперь краткое резюме всего выше сказанного об алгоритмической системе чисел.

.2117. В традиционной математике число рассматривается как элементарный объект, не имеющий никакой внутренней структуры или строения.

.2118. Такой подход дает неоспоримо ценные результаты, проявляющиеся в повсеместном успешном применении математики.

.2119. Но ценность этих результатов никак не может пострадать, если мы всё же попытаемся рассмотреть природу чисел более крупным планом, уже не считая одно какое-нибудь число объектом элементарным, и если мы взглянем на число как на объект, который сам из чего-то состоит.

.2120. Наиболее близким к интуитивному пониманию числа является представление о числе (об одном, конкретном числе) как о множестве «одинаковых» соотношений между какими-нибудь множествами.

.2121. Это понимание числа фактически совпадает с определением числа, данным Исааком Ньютоном.

.2122. Это «множество одинаковых соотношений» существует в мире на таких же правах, как все другие множества.

.2123. Статус множества был рассмотрен в ТЕОРИКЕ {.498}. Всякое множество (в том числе одно отдельное число – «множество соотношений» – и множество самих чисел) – это некий внутренний продукт процесса отражения.

.2124. Более детальное рассмотрение процесса отражения позволяет различать конкретные, абстрактные, потенциальные и т.д. множества, позволяет говорить о номиналиях множеств как о материальных объектах и производить с этими материальными объектами столь же материальные действия, которые могут быть смоделированы на ЭВМ и описаны на алгоритмическом языке.

.2125. В этой медитации был описан один вариант алгоритмов, по которым (в процессе отражения) из сенсорных данных можно построить «понятия» (то есть, множества) чисел, а также основных арифметических операций.

.2126. Такие алгоритмы (работающие в процессе отражения) и есть подлинные (материалистические) основания арифметики.

.2127. Одно отдельное число, множества чисел, арифметические операции – всё это абстрактные множества, заданные этими алгоритмами.

.2128. Поскольку числа и операции – это множества, заданные алгоритмами отражения, то наиболее естественными следовало бы считать такие классификации и системы этих объектов, которые построены исходя не из каких-то «внутриматематических» соображений, а исходя из соображений при анализе этих алгоритмов.

.2129. В этой медитации была рассмотрена такая система чисел, построенная исходя из соображений по алгоритмам отражения.

.2130. Эта система чисел в значительной степени отличается от традиционной, которая была в основном построена в начале века 1800 Карлом Гауссом. Главные принципы системы чисел, основанной на соображениях об алгоритмах, описаны ниже:

.2131. Любое число *p* – это множество одинаковых соотношений между множествами.

.2132. При решении вопроса о том, какие соотношения считать «одинаковыми», можно учитывать различные признаки (то есть, работать по разным алгоритмам):

.2133. а) учитывать только существование элементов во множествах, не интересуясь их взаимным расположением – по этому алгоритму построено множество метрических чисел (соответствует положительным рациональным числам и нулю по-традиционному);

.2134. б) кроме вопроса о существовании элементов, можно рассматривать их взаимное расположение в линейный ряд – по этим алгоритмам построено множество линейно ориентированных чисел (соответствуют рациональным числам по-традиционному);

.2135. в) если «одинаковыми» признать только те соотношения между множествами, которые, кроме того, «одинаково» ориентированы на плоскости, то по таким алгоритмам будет построено множество планарно ориентированных чисел (соответствуют комплексным по-традиционному);

.2136. г) в принципе этот процесс всё большей детализации признаков классификации соотношений может быть продолжен, причем в разных направлениях.

.2137. Из этих соображений следует, что множество рациональных чисел ни в коем случае не является подмножеством комплексных чисел, а натуральные числа ни в коем случае не являются подмножеством рациональных чисел (точнее будет употреблять принятые в этой медитации термины: метрические числа не подмножество ориентированных, линейные не подмножество планарных).

.2138. Наоборот, каждое отдельное метрическое число *p* распадается на два равноправных подмножества –*p* и +*p*, а *p* и +*p* – это вовсе не идентичные множества.

.2139. Аналогично каждое метрическое число *p* распадается на «бесконечно много» подмножеств (все те комплексные числа, которые имеют модуль, равный *p*).

.2140. Натуральные числа же остаются подмножеством метрических чисел (а именно: это те соотношения, в которых одно из множеств содержит в точности один элемент, или соотношения, одинаковые с такими).

.2141. Иррациональные числа – это псевдотаксоны классификации соотношений. Они строятся не по алгоритмам классификации соотношений, а по другим, более «поздним» алгоритмам. Разные иррациональные числа могут иметь в своей основе разные алгоритмы.

.2142. Арифметические операции определяются алгоритмами обработки тех или иных ситуаций между множествами. На уровне алгоритма, как правило, наблюдаются не пары двух обратных операций (сложение–вычитание, умножение–деление, возведение в степень – извлечение корня), а одна основная операция из этой пары и вторая вспомогательная операция переворачивания.

34. О следующем аппарате

1980.06
(через 2 месяца)

.2143. Итак, мой читатель, мы пришли к той границе, с которой начинается математика (и где я собираюсь остановить эту медитацию, как это обещал в ее начале {.1708}). Разделы математики, изучающие числа, начинают с того, что «дано» множество (тех или иных) чисел, и в нем «заданы» тернарные отношения операций.

.2144. Откуда берутся эти множества чисел и эти тернарные отношения, математиков не интересует, это «первичные термины». Таким образом, здание своих представлений о числах я построил в «ничейной» области, «предшествующей» математике. Я только пытался разобраться в том, что стоит за словами «дано множество чисел» и «заданы тернарные отношения в нем».

.2145. Я воздвиг свою концепцию числа практически на голом месте. Мне не приходилось разрушать какие-то «старые» и «неправильные» концепции. Если не считать некоторые весьма расплывчатые фразы о равномощных множествах, то, насколько мне известно, нет вообще никаких концепций числа, которые можно было бы сравнить, сопоставить или противопоставить нумерике.

.2146. Единственное место, которое противоречит чему-то традиционному – это конечный результат, готовая система чисел.

.2147. Теперь, когда я имею об этом определенное мнение, мне представляется весьма заманчивым взглянуть с этих позиций уже не на область, предшествующую математике, а на начальные области самой математики.

.2148. Что такое аксиоматика Пеано или другие аксиоматики систем чисел с точки зрения теорики и нумерики? Что означает вообще вывод Кантора о существовании множества большей мощности, чем счетное множество, что означают сечения Дедекинда, что такое замечательные числа π и e, и многое многое другое, если перевести это всё на язык алгоритмов и программ, если вместо бесконечных множеств, «данных целиком», смотреть на данные целиком программы процессоров множеств. У меня такое ощущение, что передо мной открываются безграничные дали, по которым взгляд скользит всё дальше и дальше, не встречая никаких преград.

.2149. Но обо всем этом в дальнейших медитациях. Мы прошлись с читателем по лугам, окружающим сад математики, и теперь стоим у его ворот. Уже прогулка вокруг этого сада дала нам столько интересных выводов. Теперь настало время открыть ворота, войти в собственно сад и посмотреть, что мы увидим там. Прогулка около математики кончилась. В следующих медитациях, которые можно было бы объединить под названием «В саду математики», я намерен взяться уже непосредственно за аксиомы и теоремы, за собственно хозяйство математики.

.2150. Так что пусть читатель не думает, что я силен лишь за забором и боюсь пройтись с ним по аллеям самого сада. Прогулка по окрестностям была абсолютно необходима. В виде теорики, Эуклидоса, Эуклидола и нумерики я создал достаточно мощную базу для разбора самой математики. Без такой базы я был бы бессилен. Но теперь база создана, и можно войти в сад.

.2151. Однако это в дальнейших медитациях. Сейчас я хочу только на мгновение вернуться к тому вопросу, который поставил в начале ТЕОРИКИ: «В чем сущность аксиоматического метода? Действительно ли это самый лучший метод разговора о теориях, или только дань образу мышления великого грека?».

.2152. Аксиоматика Пеано и другие сложные аксиоматики описывают свойства чисел – потенциальных продуктов некоторых программ. Если Вы написали на листочке некоторую систему аксиом, то на самом деле на этом листочке Вы описали некоторую программу, алгоритм. Лучший ли это способ, как описывать программы?

.2153. Итак, какая-нибудь аксиоматика – это описание какой-нибудь программы. Аксиомы Эвклидовой геометрии – это описания тех алгоритмов, по которым люди воспринимают пространство. Аксиомы геометрии Лобачевского – это описания несколько отличающихся от них алгоритмов. «Открытие неэвклидовых геометрий» – это открытие того факта, что могут быть алгоритмы, похожие на те, по которым люди воспринимают пространство, но и отличающиеся от них.

.2154. Если бы меня спросили, какова вероятность того, что тот объект, который скрывается под словами «физическое пространство», имеет такие же свойства, как одно абстрактное множество, заданное некоторыми алгоритмами в голове человека, я бы ответил: «было бы очень удивительно, если свойства этих двух объектов совпали бы, то есть, если физическое пространство оказалось бы эвклидовым». Эвклидово пространство – такое же абстрактное множество, как и множество чисел, и лишь поэтому оно «бесконечно».

.2155. Итак, в дальнейшем я намерен разобрать аксиоматики числовых систем – эти описания алгоритмов. Отсюда видны дальнейшие задачи Эуклидоса и Эуклидола. Я должен закодировать какие-то связи между продуктами алгоритмов при помощи структур Эуклидоса, а в Эуклидоле должен разработать аппарат описания этого, причем такой, чтобы, с одной стороны, это было по возможности похоже на традиционное содержание аксиом, а, с другой стороны, чтобы всё, что утверждается в аксиомах, мог «понять» и интерпретировать Эуклидос.[4]

.2156. Таков намечается следующий аппарат Эуклидоса и Эуклидола. В мечтах я вижу, как я перфорирую описанные на Эуклидоле аксиомы и доказательства теорем, как жужжащий перфоввод поглощает мои перфокарты, как тускнеют лампочки пульта ЭВМ, когда она задумывается, работая только с памятью, и как вдруг начинает тарахтеть пишущая машинка, печатая сообщение: «теорема доказана правильно».

.2157. Теория доказательств – еще один вопрос, которым занимался знаменитый Гильберт. Он пытался построить теорию доказательств в виде системы манипуляций со значками. Мне такой путь кажется в корне неверным. Есть объекты первичные, материальные во внешнем мире. Есть объекты вторичные в виде номиналий и алгоритмов мозга. Есть объекты третичные, значки на бумаге, кодирующие работу мозга. В корне неверным мне кажется копание в третичных объектах, игнорируя первичные и вторичные.

.2158. Я хочу понять сущность доказательств, но не как манипуляций со значками на бумаге, а как вычислительного процесса в процессоре множеств.

.2159. Таковы мои ближайшие планы на будущее.

1992.08.28 15:13
(через 12 лет, 2 месяца)

.2160. Пункт {.2156} показывает компьютерную технологию, с которой я фактически работал в то время, когда писалась эта глава, и которая теперь кажется невообразимо архаичной. Писал я это в июне 1980 года. А тем временем в далекой Америке фирма IBM уже два месяца как продавала (с апреля 1980 года) первые свои «персональные компьютеры» – еще без твердых дисков, еще даже не XT. Тем не менее, уже два месяца как шла новая эра в компьютерной науке...

---

[4] **В.Э.: 2009.01.11:** Позже я это действительно попытался сделать. И именно эта попытка привела меня к выводу, что ни геометрия, ни арифметика ни из каких аксиом на самом деле НЕ ВЫТЕКАЕТ. В традиционной математике, оказывается, имеется еще большая лажа, чем я это полагал в 1980 году, когда писал данный текст. В то время я считал аксиомы пусть неудобным, но всё же эквивалентом алгоритмического описания, и поэтому «не выступал» против них. Когда же я убедился, что из аксиом на самом деле ничего нельзя вывести с фундаментальной точностью (то есть, так, чтобы этот вывод осуществил компьютер), то стал считать аксиомы вообще просто лишними.

35. Резюме ЧИСЕЛ

1980.09
(раньше на 11 лет, 11 месяцев)

.2161. В этой медитации я поставил перед собой задачу в свете идей, изложенных в ТЕОРИКЕ (что теории надо рассматривать как алгоритмы отражения и т.д.) и при помощи языка описания таких алгоритмов, изложенного в медитациях ЭУКЛИДОС, ПРЕДИКАТ, АЛГОРИТМ, рассмотреть понятие числа.

.2162. Вместо абстрактных объектов (вроде чисел), по крайней мере сначала, надо рассматривать алгоритмы отражения, «задающие» эти абстрактные объекты, тогда они потеряют ореол таинственности, и многие неясные вопросы разрешатся сами собой.

.2163. Применение этого вывода теорики к понятию числа приводит к убеждению, что алгоритмы отражения, лежащие в основе понятия числа, не могут существовать в каком-то единственном, «настоящем» варианте, что в природе, в головах людей, они должны существовать в виде чрезвычайно разнообразного набора всевозможных вариантов.

.2164. При создании же теоретической модели, теории чисел, мы выбираем какой-то один определенный, «четкий» вариант алгоритмов. Однако в этом выборе мы свободны и можем создать (путем выбора того или иного варианта основополагающих алгоритмов) различные системы чисел.

.2165. Попытка создать систему чисел таким образом, чтобы основополагающие алгоритмы были как можно проще и лучше (по обычным критериям науки программирования) показывает, что исторически созданная традиционная система чисел не является ни лучшей (с точки зрения красоты основополагающих алгоритмов), ни наиболее естественной (то есть, близкой к природным, человеческим алгоритмам).

.2166. В этой медитации была описана такая система чисел, которая определяется более простыми и логичными алгоритмами, чем традиционная, и одновременно находится ближе к природным алгоритмам, о чем свидетельствует совпадение ее разделов с этапами развития человеческих представлений о числах.

.2167. Более четкое определение понятия числа как продукта алгоритмов работы с множествами и четкое разграничение самого числа от различных его обозначений позволило более отчетливо обрисовать ситуацию, в которой появляется проблема континуума, и придти к выводу, что мнение о превосходящей мощности континуума по сравнению со счетным множеством, лишено четкости, и такой вывод не пригоден для использования в дальнейших рассуждениях.

.2168. Таким образом, в этой медитации были описаны три достаточно значительных специфически математических результата:

.2169. 1) Показано, что исторически созданная и общепризнанная система чисел не является ни единственной возможной, ни лучшей, ни наиболее естественной.

.2170. 2) Создана логически более стройная система чисел.

.2171. 3) В результате обнаружения недостаточно строгой и точной формулировки снята проблема континуума.

.2172. Эти результаты были достигнуты благодаря применению исключительно плодородного метода, заключающегося в материалистическом подходе к математике с позиций теории отражения.

1994.06.04 12:40 суббота
(через 13 лет, 9 месяцев)

.2173. Здесь необходимо пояснить, в какой связи в этой работе появились слова о «трех значительных математических результатах», сначала сказанные в тексте медитации, а потом с настойчивостью повторенные в резюме. Причиной их появления были постоянные издевательства и оскорбления со стороны Гейдемана {.881} – единственного человека и математика, который, сидя на работе в одной комнате со мной, был в какой-то степени в курсе моей работы. Основной мотив его издевательств состоял в том, что: «ты пишешь, пишешь, а никакого результата». Так что математики за появление этих моих слов могут благодарить аморальное поведение своего собрата. Без него я не стал бы вычерчивать по пунктам «специфически математические результаты». Есть «специфически математический результат» или нет его – это, как всегда, зависит от определения данного понятия. Ясно однако, что вся изложенная здесь концепция оснований математики имеет для этой науки гигантское значение, и весь вопрос только в том, достаточно ли умны математики, чтобы это понять (я лично думаю, что умный математик – это редкое редкое исключение. Во всяком случае я таких не встречал).

36. Кто я, что я

1980.09
(раньше на 13 лет, 9 месяцев)

.2174. Здесь, в самом конце этой медитации, мне хотелось бы посвятить одну главу даже не философскому, а просто человеческому осмысливанию всего того, о чем говорилось выше. Более двух лет я работал не покладая рук, днем и ночью, наяву и во сне, в очередях и в троллейбусах обдумывал я природу чисел, основания математики, программы Эуклидоса и конструкции Эуклидола. Я писал, перечеркивал, перфорировал, печатал и чертил, чтобы в конце концов преподнести Вам три математических результата на вершине горы совершенно ни на что не похожих конструкций из философских рассуждений, машинных программ и алгоритмических языков (*а также беллетристических приемов – ред.*).

.2175. Я не такой дурачок, чтобы не понимать, что эти три математических вывода стоят больше, чем доказательство какой-нибудь там очередной, двухтысячной теоремы или решение еще одного дифференциального уравнения. Каждый из этих трех выводов имеет чрезвычайное значение для математики. Разумеется, при одном условии: если эти выводы правильны.

.2176. Правильны ли они? Можно ли строить какие угодно числовые системы? Логичнее ли моя система чисел? Бессмысленны ли разговоры о мощности континуума?

.2177. Будет лишним объяснять, что я не могу считать эти выводы ошибочными: иначе я не писал бы этой работы. Но отсюда автоматически следует тот грустный вывод, что я, именно я, сделал значительные математические открытия (грустный потому, что он ставит меня перед необходимостью в состоянии усталости хотя бы для самого себя решать щекотливый вопрос о том, как это могло случиться). Ведь я искренне считаю себя математиком хорошим среди своих студенческих товарищей, но ничтожным в мировом масштабе. Короче: я не математик.

.2178. Я также искренне считаю, что не обладаю никакими исключительными способностями, кроме одной: я исключительный педант и мог бы сам себе отдавать письменные приказы и писать отчеты о их выполнении (*ср.* {CANTO.2104} – *ред.*). Впрочем, по-моему, достаточно взглянуть на индексированные главы этого сборника, чтобы убедиться в том, что мои слова не лишены оснований.

.2179. Два года назад, перед тем, как задуматься над природой чисел, мне и в голову не приходило, что я мог бы что-то сделать в математике. В то время мечты о писательской карьере, обуревавшие меня в детстве, были окончательно захоронены, и я считал себя хорошим программистом (даже, признаюсь, очень хорошим программистом)[5] и философом местного значения, способным покрасоваться перед друзьями стройностью и оригинальностью своего материалистического мировоззрения.

.2180. Но случилось то, что случилось: я пришел к некоторым выводам, и мой разум, тот самый разум, который немедленно оценивает всё, что видит, стал говорить мне, что, черт побери, это всё же должно иметь немалое значение для математики!

.2181. Поскольку я не считаю себя ни математиком, ни вообще человеком, обладающим исключительной эрудицией или исключительными способностями в области математики, то в объяснении своих достижений (как я о них думаю), мне остается одно: свалить всё на оружие, на метод. Я, дилетант, сделал то, что я сделал, только потому, что держал в руках исключительно ценное оружие, применял исключительно ценный метод. Это оружие называется «материализм, материалистических подход», оно изобретено не мной, и я могу без зазрения совести восхвалять

---

[5] **В.Э. 2009.01.11:** В Институте Электроники и вычислительной техники регулярно проводились «конкурсы молодых программистов» («молодыми» считались до возраста 33 лет); я участвовал в нескольких из них (пока мне не перевалило за 33) и выиграл все, в которых участвовал. Мои программные разработки и по объему, и по оригинальности технических решений не имели себе равных в Институте, что признавалось всеми, кто был в курсе дела. Так что слова о «хорошем программисте» имеют некоторые основания, подтвержденные объективными критериями.

его до небес. (Если этот подход с такой поразительной легкостью положил мне в руки столь значительные (как я считаю) открытия, то что же он мог бы дать тем профессионалам, которые проявили бы достаточную гибкость и смелость ума, чтобы его применять!).

.2182. В мире имеется достаточно людей, признающих исключительную ценность материализма, материалистического подхода, и я не буду дальше защищать тезис о значении материализма.

.2183. Но, справившись таким образом с одним вопросом, я оказался перед другим: почему же до меня никто не применял этот метод к математике, или, точнее, не применял достаточно радикально, чтобы прийти к таким же выводам? Здесь я могу сослаться на свою исключительную педантичность (исключительная педантичность – это единственное исключительное свойство, которое я за собой признаю). Я применял материалистический подход не только к математике, но и ко всем вопросам, с которыми сталкивался, и применял педантично. Еще я могу сослаться на свою глубокую шизоидность, которая, как может подтвердить любой психиатр, ведет к нешаблонному, самостоятельному мышлению. Эта шизоидность в свое время почти довела меня до самоубийства, но заодно она дала мне и ум, не желающий идти по протоптанным дорожкам.

.2184. Но всё это, так сказать, лишь субъективные факторы. Гораздо важнее факторы объективные. Они говорят, что, если б не я, то скоро нашелся бы другой шизоидный педант, который сделал бы приблизительно то же самое (кто знает, может быть где-то в другом конце света он уже ставит последнюю точку в своем сочинении, а, может быть, и поставил раньше меня). Материализм должен был рано или поздно ворваться в математику; и так он уже слишком задержался.

.2185. Главная тому причина: с одной стороны зарождение и восход за последние тридцать лет мощной науки компьютеров, показывающей, как на самом деле происходит обработка информации, и, с другой стороны, неуклонный приход психиатрии, психологии и физиологии мозга к таким воззрениям, которые считают мозг чрезвычайно мощной биологической системой обработки информации.

.2186. До появления компьютеров и до указанных сдвигов в науках о психике и мозге материалистический подход к математике, как я считаю, был невозможен принципиально. Так что он осуществился не раньше и не позже, а именно тогда, когда это стало возможным. Ну, а какое значение здесь могло иметь то, что я – человек из мира компьютеров, об этом судите сами.

.2187. Вот так я объясняю то, что знания о природе чисел оказались именно в моих руках.

.2188. Скептический читатель может с усмешкой сказать о всех этих объяснениях: «Что ты тут мучаешься, успокойся, никаких выдающихся открытий ты не сделал!». Но я-то уверен, что я их сделал. И думаю, что нет в мире таких аргументов, которые могли бы выбить из моей головы эту уверенность. Как все шизоиды и в отличие от сангвиников, я мало подвержен внешним влияниям, а как очень глубокий шизоид, я им подвержен очень мало (разве я мог бы тут столько наговорить, если бы сильно был подвержен влияниям окружения и следовал бы традициям?). Но отсюда же вытекает, что мои оценки своего собственного труда так же мало зависят от оценок окружающих. По сути дела для меня в мире существует только один авторитет, ко мнению которого я прислушиваюсь: это я сам. Все другие, оценивая мою работу, в моих глазах ставят оценку не мне, а себе, показывая свои способности понять истину. И никакие титулы и ранги, звания докторов и академиков, тут ничего не могут изменить.

.2189. Мои друзья склонны видеть во мне (с моей работой) молодого, начинающего ученого, который в тайных мечтах написал свой сокровенный трактат и теперь дрожащими руками преподносит его на грозный суд великанов;[6] и всё зависит от решения этого суда: если он скажет «да», то молодой ученый на седьмом небе, а если скажет «нет», то он может порезать себе вены. На самом деле ничего похожего здесь не наблюдается. Перед Вами совершенно сложившийся, сформировавшийся, зрелый философ, имеющий законченное, непротиворечивое мировоззрение[7] и предлагающий Вам ознакомиться с некоторыми его частями. Если Вы не

---

[6] **В.Э. 2009.01.11:** Оказалось, что так хотят считать не только друзья, но и вообще все, с кем я имел дело. Я был шокирован тем, что практически вообще никто – ни профессора, ни академики – вообще не разбирались по существу дела; вместо этого они рассуждали в категориях «ученый – не ученый», «свой – посторонний» и т.п.; они оперировали не аргументами «за» или «против», а мнением «рецензента» (ничем не мотивированным, а просто объявленным).

[7] **В.Э. 2009.01.11:** Таково было моё самоощущение; я никогда не пресмыкался перед «высокопоставленными» и «авторитетами», и это приводило их в бешенство. Если бы я шел к ним не как к равным, а как проситель, возможно, они и проявили бы ко мне снисходительность. Но я считал, что это их долг –

хотите или не способны это мировоззрение понять, то можете идти к черту, проживу без вас. Но лучше было, если бы Вы поняли.

.2190. Если бы я был графом Толстым, и мог бы не думать о том, где достать те бумажки, за которые в магазинах дают товары, то опубликовал бы свою работу за свой счет и писал бы дальше, не спрашивая ни у кого его мнения об этой работе.[8] Но, к сожалению, я не граф Толстой, и вынужден где-то доставать эти цветные бумажки, а опубликовать свою работу я могу только в том случае, если какой-нибудь достаточно влиятельный человек скажет «да». (А публиковать я хочу, чтобы общепризнанным способом закрепить свое первенство: если люди и не поймут меня сегодня, то когда-нибудь они всё равно спохватятся и скажут: «а Эгле говорил это уже в 1980 году!»). Только ради денег и публикации я вынужден искать чью-то рецензию. Иначе бы я вообще ни у кого не спрашивал бы его мнения о моей работе.

.2191. Я совершенно уверен в том, что если 100 человек внимательно изучили бы мою работу, выяснили бы в письменных диалогах со мной все неясные вопросы, если бы мы вместе разобрали все их возражения, то 90 человек из этих ста сказали бы, что я абсолютно прав. Но в чем я совершенно не уверен, так это в том, что из ста человек, ознакомившихся с этой работой, найдется хотя бы один, кто действительно ее изучит во всей глубине и действительно постигнет всю внутреннюю логику моих размышлений. И поэтому я не ожидаю бурных восторгов и рукопожатий. Вряд ли кто-нибудь будет хвалить работу, которую он не понял.

.2192. Проблема не в том, как доказать свою правоту. Проблема в том, как заставить людей слушать эти доказательства.

.2193. В этой работе очень мало от традиционной математики: в приемах, методах, стиле, терминологии, символике. Зато много нападок на математику и математиков. Поэтому довольно естественно будет ожидать, что она вызовет у профессиональных математиков лишь раздражение и никакого понимания.

.2194. Мои друзья говорят: «Почему бы тебе не уступить и не использовать больше от традиционной математики – в приемах, стиле, обозначениях и т.д.?». Изложенные здесь математические мысли в принципе, конечно, можно высказать и не употребляя понятия процессоров множеств, их программ и алгоритмов, высказать в форме, значительно более близкой к традиционной форме математики, высказать, используя обычное (расплывчатое) понятие множества. Это изложение будет значительно хуже, чем настоящее, но в принципе оно возможно.

.2195. Не исключено, что когда-нибудь, если мне дано будет жить и работать, я напишу и такое изложение. Но не здесь, не в этих медитациях. Здесь я пишу и объясняю так, как считаю правильным. Я выбираю стиль и способ по соображениям «как точнее», а не по соображениям конъюнктуры.

1994.06.04 13:17 суббота
(через 13 лет, 9 месяцев)

.2196. В пункте {.2193} содержатся одно совсем неправильное и одно очень правильное утверждение. Слова, будто здесь в тексте 1980 года «много нападок на математику и математиков» свидетельствуют только о наивности автора, не представлявшего, что такое «много». Настоящее значение слов «много нападок на математиков» мы, надеюсь, узнаем позже – в сборнике «Вендетта» {LEON1.1101}.

.2197. Зато стопроцентно оправдалось ожидание автора, что его работа «*вызовет у профессиональных математиков лишь раздражение и никакого понимания*». Но, хотя эти слова являлись «попаданием в десятку», всё же в одном автор заблуждался. Тогда, в 1980 году, он всё еще думал, что математиков можно в чем-то убедить путем логических доказательств, что они способны понять логические рассуждения и что поэтому имеет смысл ввязываться с ними в дискуссии.

.2198. Такие дискуссии действительно состоялись (они запротоколированы главным образом в сборнике «Канториана» {CANTO}). Два кандидата математических наук и преподавателя Латвийского Университета (ныне нострифицированные доктора) были загнаны в угол, прижаты к стенке, а потом Валдис Эгле долго гонялся за ними, как за зайцами, пытаясь заставить

установить истину, и что они соприкасаются на самом деле не со мной, а с чем-то не зависящим от меня: с логикой, аргументами, Истиной. Они же полагали, что мы делим пирог, и делить надо по табеле о рангах.

[8] **В.Э. 2009.01.11:** Такого положения я достиг только в 2008 году с появлением достаточно мощных интернетовских сервисов. От момента написания данной работы к тому времени прошли уже 28 лет (!).

их сделать простые логические выводы из признанных ими же предпосылок (а эти выводы означали полный их проигрыш в споре). И тогда один из нынешних докторов объявил, что он не желает мыслить логически принципиально и что логика – лженаука {CANTO.1120}, а второй закричал, что истинный математик НИКОГДА не сдается {TRANS.2555}, и перешел на мат подобно тому знаменитому генералу из гвардии Наполеона.

.2199. И так, вот, Валдис Эгле ничего не достиг. Но он не достиг не потому, что математики разгромили его концепцию (куда уж им!), не потому, что он не смог что-то доказать, что-то объяснить и т.п. Нет! Он всё доказал, всё объяснил, на все вопросы ответил. Но он не смог заставить докторов математических наук мыслить логически. Не смог – и всё тут! Один объявил, что принципиально не признает логики, а второй, не вдаваясь в столь высокие теоретические рассуждения, сразу взялся за брань...

.2200. И в результате теперь при словах «истинный математик» у Валдиса Эгле появляется перед глазами странный образ человека, который сидит на полу, ковыряет указательным пальцем в носу и произносит:

.2201. – Мощность, э... континуума, э-э... больше, э-э-э... – и если ему удается фразу закончить и дойти до слов «мощности счетного множества», то он от восторга делает под собой лужу.

.2202. Какие только не бывают ассоциации у людей, не правда ли?

* * *

.2203. В пункте {.2190} говорилось, что «опубликовать свою работу я могу только в том случае, если какой-нибудь достаточно влиятельный человек скажет “да”». Но эти люди сказали «НЕТ». Работа была ими заблокирована, остановлена и перечеркнута. Валдис Эгле (после долгих лет отчаянной борьбы) похоронил свое намерение опубликовать уже сделанное и продолжить работу дальше. Его библиотека книг по математике была отдана в макулатуру, он перестал интересоваться этой темой, перестал думать над ней и вспоминать...

.2204. Четырнадцать лет прошли! Ровно столько, сколько сидел в тюрьме Эдмунд Дантес, прежде чем вернулся в мир как граф Монте-Кристо...

.2205. И вот, теперь условие пункта {.2190} уже не в силе! После «песенной революции», развала СССР и наступления эры персональных компьютеров открылся путь к публикации моих работ БЕЗ чьей бы то ни было рецензии и разрешения.[9] Я всё еще не граф Толстой, но теперь у меня ЕСТЬ способы, как довести мои книги до всех, желающих их читать, – вопреки «истинным математикам». И они пойдут, – эти книги, – и ни слова не будет в них изменено в угоду каким-то редакторам! Они пойдут со всеми моими издевательствами над «истинными математиками», со всей моей «Вендеттой», со всей моей местью этому жалкому племени мелких людишек, не способных состязаться со мной ни в силе логического мышления, ни в художественности выражения своей мысли.

37. Предупреждение

1980.10
(раньше на 13 лет, 8 месяцев)

.2206. Я думаю, что среди читателей этого сборника медитаций вряд ли найдутся такие, кто возьмутся за проверку алгоритмов, описанных на Эуклидоле в медитации ЧИСЛА {.1742}. Но на тот случай, если такие читатели все-таки найдутся, я хочу высказать предупреждение: я не могу гарантировать, что эти алгоритмы не содержат ошибок. Как все программисты, я ошибаюсь даже когда пишу на привычном мне Ассемблере/360. Но Эуклидол, хотя я сам его и сочинил, совсем еще мне не привычен, поэтому, надо думать, вероятность ошибок здесь еще выше. Ошибки в программах устраняются в длительном процессе их трансляции и отладки. В таком же процессе должны устраняться и ошибки в алгоритмах, описанных на Эуклидоле. Но пока что я не имел возможности транслировать и отлаживать эти алгоритмы под Эуклидосом, так как сами программы Эуклидоса еще не отлажены. После того, как мне стало совершенно ясно, какой

---

[9] **В.Э. 2009.01.11:** Тогда, 14 лет назад такой путь действительно приоткрылся, но всё равно всё еще базировалось на бумажные распечатки и не могло быть сделано достаточно динамично и в достаточном количестве экземпляров. Прошло еще 14 лет, прежде чем Интернет открыл другие горизонты.

должна быть описанная здесь часть Эуклидоса, я приостановил разработку программ для того, чтобы форсировать оформление этого сборника.

.2207. Я работаю один (сам пишу, сам печатаю, сам перфорирую, сам выхожу на машину), и работа движется медленнее, чем мне хотелось бы. Как бы я не желал поскорее иметь работоспособный Эуклидос, реалистическая оценка своих сил показывает, что это не может осуществиться раньше, чем в конце первого квартала 1981 года.

.2208. После завершения отладки программ Эуклидоса, глава, содержащая описания алгоритмов на Эуклидоле, будет заменена на выданный Эуклидосом листинг проверенных им алгоритмов. Таким образом, приведенные в медитации ЧИСЛА описания алгоритмов пока имеют статус неотлаженных программ. Я ручаюсь лишь за правильность идеи алгоритма, но не за правильность его записи.

1982.01
(через 1 год, 3 месяца)

.2209. Предыдущая версия этого документа, которую Вы только что прочитали, была написана в октябре 1980 года. Она показывает, насколько оптимистическими были мои надежды и насколько жестока действительность. Вскоре после написания тех слов я взялся за переделку операционной системы Диспетчер, которая поглотила многие и многие месяцы моих трудов, и которая еще сегодня, спустя почти полтора года, в январе 1982, далека от завершения. За это время я отчаянными урывками занимался и другими делами, но до окончания программ Эуклидоса руки никак не доходили, и это стало казаться мне всё более и более недостижимой целью. Теперь я с сожалением вынужден констатировать, что в настоящее время не могу назвать срока, когда программы Эуклидоса могут быть окончательно реализованы.

1994.06.04 14:44 суббота
(через 12 лет, 5 месяцев)

.2210. Печальнее всего здесь то, что и Диспетчер теперь уничтожен. Какой смысл работать? Какой смысл что-то создавать?...

11. Тетрадь STRUC

КОНСТРУКТИВИЗМ

О некоторых моментах концепции конструктивистов

Квалифицированный специалист – это человек, который удачно избегает маленьких ошибок, неуклонно двигаясь к глобальному заблуждению.

Закон Вейнберга

Написано: 1980.11, 1981.01 – 1981.03 Рига

Медия STRUC (в Третьей Медиотеке метамедитация КОНСТРУКТИВИЗМ) содержит разбор взглядов конструктивного направления в математике и сравнение их с концепцией Валдиса Эгле.

1. Концепция конструктивистов

1980.11.14
(раньше на 13 лет, 6 месяцев, 20 дней)

.2211. (Диалог с Гейдеманом 1980.11.14; *предыдущий диалог см. в* {.952} – *ред*.).

.2212. **ГЕЙДЕМАН** (письменно): В трактате «О природе чисел» {.2778} ты задал вопрос: «*Известна ли Вам такая концепция сущности чисел, которую можно было бы противопоставить описанной здесь*?». Отвечаю: да, известна. Это концепция математиков – конструктивистов. Поскольку я с ней познакомился совсем недавно (благодаря тебе), то я могу изложить здесь лишь концепцию, приближающуюся к конструктивной, но для начала и этого достаточно.

.2213. Представим себе, что у нас имеется некоторое устройство, которое умеет делать следующее:

.2214. а) на вход подается конечный алфавит, т.е. набор каких-то знаков или сигналов, т.е. буквы алфавита;

.2215. б) устройство умеет из букв строить слова, т.е. объединять буквы в цепочки, например, если алфавит состоит из букв А и В, то устройство умеет строить всевозможные слова А, В, АВ, ВА, АВА, ААВ, ... Слова оно строит слева направо, т.е. А→В→Г – это слово АВГ. Устройство умеет присоединять слово к слову, букву к слову, слово к букве.

.2216. Устройство имеет пустое слово □, присоединение которого к слову или букве оставляет исходную букву или слово неизменным.

.2217. Имеется язык, с помощью которого осуществляется управление этим устройством. Язык состоит из термов и схем.

.2218. Терм – это любая цепочка, состоящая из букв алфавита и заданного конечного набора символов, отличных от букв – переменных.

.2219. Схема – это фигура вида

.2220.

$$\frac{T_1\ T_2\ \dots\ T_p}{T}$$

.2221. , где T_1, T_2, ... , T_p , T – термы. Термы T_1 , ..., T_p наз. посылками, а T – заключением схемы. Схема без посылок называется аксиомой.

.2222. Устройство «применяет» схему следующим образом: вместо переменных в термы подставляются цепочки знаков, причем, вместо всех вхождений одной и той же переменной подставляется одна и та же цепочка.

.2223. Вот такая система наз. системой Поста или канонической системой.

.2224. Складывается впечатление, что такую систему можно даже физически построить.

.2225. Если задана каноническая система, то определяется индуктивно понятие доказательства слова:

.2226. а) применение аксиомы – доказательство этого применения;

.2227. б) если P_1, P_2, ..., P_p – доказательства слов a_1, a_2, ..., a_p и

.2228.

$$\frac{a_1\ a_2\ \dots\ a_p}{a}$$

.2229. – применение некоторой схемы, то

.2230.

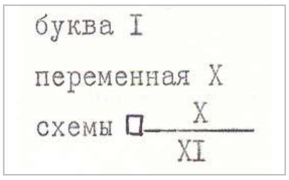
$$\frac{P_1\ P_2\ \dots\ P_p}{a}$$

.2231. – доказательство слова *a*.

.2232. Рассмотрим алфавит, состоящий из одной буквы 1.

.2233. В канонической системе

.2234.



буква I
переменная X
схемы □ $\frac{X}{XI}$

.2235. все доказуемые слова – это и есть натуральные числа!

.2236. **Я:** Великолепно, теперь у нас впервые будет возможность мою концепцию сравнивать с какой-то другой. Но сначала мне хотелось бы выяснить более четко альтернативную концепцию (выяснить для себя и для моих читателей). Позволь задать тебе несколько вопросов, направленных на более глубокое понимание концепции конструктивистов. В пункте {.2213} ты предлагаешь представить себе, что «имеется некоторое устройство, которое...» и т.д. Можно ли представлять себе это устройство как нечто похожее на ЭВМ?

.2237. **ГЕЙДЕМАН:** Да, можно.

.2238. **Я:** Представим тогда, что это устройство похоже на ЭВМ, для которой «вход» – это карточный ввод, а выход – АЦПУ. Эти устройства очень хорошо знакомы и мне, и тебе, и многим моим читателям. Что в этой машине будет алфавитом, что буквой и что знаком, о которых ты упоминаешь в пункте {.2214}?

.2239. **ГЕЙДЕМАН:** Алфавит тогда соответствовал бы, например, коду EBCDIC, буква – одному символу этого кода, а знак – представлению этого символа на каком-то физическом носителе или в памяти машины. Но конструктивисты это, конечно, явно не оговаривают, считая понятие алфавита интуитивно ясным.

.2240. **Я:** В пункте {.2215} ты говоришь: «устройство умеет строить всевозможные слова...». Означает ли это то же самое, что следующие мои слова, сказанные в наших, программистских терминах: «Для этого устройства можно написать различные программы, результатом работы которых будут выданные на выходе (например, АЦПУ) различные слова, т.е. комбинации знаков»?

.2241. **ГЕЙДЕМАН:** Может быть это делают программы, а может быть аппаратура.

.2242. **Я:** В пункте {.2217} ты говоришь, что «имеется язык, с помощью которого осуществляется управление этим устройством». Можно ли считать, что это нечто, соответствующее таким языкам, как JCL, PL/1 или Ассемблер?

.2243. **ГЕЙДЕМАН:** Да, это язык типа JCL. (*Job Control Language – ред. – Язык Управления Заданиями: понятие OS/360 и ряда других операционных систем*).

.2244. **Я:** Схема – это предписание устройству что-то сделать? Можно ли преподносить устройству различные схемы, заставляя его выдавать различные слова на выходе?

.2245. **ГЕЙДЕМАН:** Схема – это запись алгоритма. Наше устройство умеет реализовать алгоритмы.

.2246. **Я:** Итак, в наших, программистских терминах «схема» – это программа для нашего устройства?

.2247. **ГЕЙДЕМАН:** Да.

.2248. **Я:** Хорошо, рассмотрим каноническую систему, о которой говорится в пункте {.2234}. Можно ли, продолжая аналогию с ЭВМ, представлять себе это, например, так:

.2249. а) переменная X – это битовое поле какой-то изменяющейся длины;

.2250. б) буква 1 алфавита – это само наличие бита в этом поле (поскольку в алфавите только одна буква, то единичные и нулевые биты не различаются, но ради определенности можем считать, что это единички);

.2251. в) схема – это программа, которая берет сначала битовое поле нулевой длины и прибавляет к нему один бит, потом берет результат предыдущего шага своей деятельности и прибавляет к полю X еще один бит и т.д. без конца.

.2252. Можно ли, выполняя твой призыв из пункта {.2213} («Представим себе, что у нас имеется некоторое устройство...») представлять это устройство хотя бы для разбора конкретной этой канонической системы, таким вот, описанным выше, образом?

.2253. **ГЕЙДЕМАН:** Да, можно.

2. Программы арифметики

1980.11.14

.2254. **Я:** Можно ли утверждать в терминах, согласованных с таким представлением о нашем устройстве, что натуральные числа в концепции конструктивистов – это продукты указанной программы?

.2255. **ГЕЙДЕМАН:** Да.

.2256. **Я:** Может ли быть реально создано устройство, которое сгенерирует все возможные «числа», то есть, поля всех возможных длин?

.2257. **ГЕЙДЕМАН:** Конечно нет.

.2258. **Я:** Значит речь может идти только о потенциальных продуктах этой программы?

.2259. **ГЕЙДЕМАН:** Безусловно. Это прямая аналогия с твоей концепцией.

.2260. **Я:** Отлично, я как раз подводил беседу к этому вопросу и прямо сейчас собирался тебе его задать.

.2261. До сих пор ты излагал концепцию конструктивистов, не говоря ничего о своем отношении к ней. Можно ли на минутку отвлечься и полюбопытствовать, что ты думаешь об этой концепции?

.2262. **ГЕЙДЕМАН:** Здесь нужно различать две вещи:

а) концепцию числа;
б) весь подход к математике.

Первое выходит за пределы математики и меня не интересует. Во втором я нахожу много разумного, но все-таки воспитан в духе классической математики.

.2263. **Я:** Жаль, что ты не хочешь высказаться по поводу конструктивистской концепции числа, ведь именно это является предметом нашей беседы. Ничего не поделаешь, продолжим.

.2264. Как ты считаешь, что исторически чему предшествовало:

а) понятие у людей о первых натуральных числах;

б) или понятие у них о том абстрактном устройстве, которое ты описал в пунктах {.2213} – {.2234}?

.2265. **ГЕЙДЕМАН:** С древнейших времен люди умели строить конструктивные объекты загибанием пальцев, складыванием палочек и т.д. Мне кажется, что понятие об устройстве, умеющем перечислять объекты, у людей появилось раньше.

.2266. **Я:** А мне кажется, что мы по-разному понимаем слова «у людей появилось понятие». Я попытаюсь сформулировать две концепции, выбери одну из них или выдвини третью:

.2267. а) у людей сначала появилось понятие об устройстве, умеющем перечислять объекты и поэтому они начали считать;

.2268. б) в людях заработало устройство, которое «умело» перечислять объекты (но о котором первобытные люди и понятия не имели) и проявлением работы этого устройства был счет. Намного позже люди поняли и осознали, что могут существовать подобные устройства.

.2269. **ГЕЙДЕМАН:** Вторая, безусловно.

.2270. **Я:** Но вторая концепция и есть моя концепция числа: числа – это потенциальные продукты некоторых алгоритмов, программ мозга, где мозг рассматривается как «некоторое устройство, которое умеет делать...» то-то и то-то. Означает ли твой предыдущий ответ, что ты придерживаешься той же концепции числа, что и я?

.2271. **ГЕЙДЕМАН:** В твоей концепции я различаю два шага:

.2272. а) первый – это общее утверждение о том, что числа – потенциальные продукты некоторых алгоритмов мозга (это я признаю);

.2273. б) второй шаг – это те конкретные алгоритмы, о которых ты говоришь: алгоритм измерения и т.д. Здесь я отдаю предпочтение концепции конструктивистов как более простой (для меня) и более близкой к классической математике.

.2274. **Я:** Понятно. Но как ты думаешь, в мозге имеется только одна программа, создающая конструктивные объекты, подходящие под твою схему из пункта {.2234}? Например, одна ли и та же программа загибает пальцы, складывает палочки, произносит вслух слова «раз, два, три...» и т.д.? Или подобных программ в мозге много?

.2275. **ГЕЙДЕМАН:** Мне кажется, что много, но это не меняет дела, так как здесь можно провести прямую аналогию с тем, что упомянутая каноническая схема может быть реализована на разных технических устройствах.

.2276. Как конструктивная, так и классическая арифметика натуральных чисел изучают ОБЩИЕ свойства разных реализаций этой канонической системы.

.2277. **Я:** Ты только что сказал: «Как конструктивная, так и классическая арифметика изучают свойства разных реализаций канонической системы». В пунктах {.2245}, {.2247}, {.2253}, {.2259} ты многократно утверждал, что схемы в этой системе – это программы для некоторого устройства. Сопоставляя эти твои высказывания, можно ли сформулировать первое из них так: «Как конструктивная, так и классическая арифметика изучают свойства разных программ»?

.2278. **ГЕЙДЕМАН:** Арифметика натуральных чисел изучает общие свойства потенциальных продуктов всех таких алгоритмов или программ. Именно для того, чтобы выделить свойства общие, математики – конструктивисты вводят формальное определение канонической системы, а математики – классики постулируют ряд аксиом, в которых описываются одни свойства, из которых можно получить другие доказательством теорем.

.2279. **Я:** Я в восторге! Ты излагаешь в точности то мнение о сущности арифметики, аксиом и теорем, которого придерживаюсь и я.

.2280. Согласен ли ты с тем, что и Кнут в своем семитомном сочинении «Искусство программирования для ЭВМ»[10] изучает общие свойства различных алгоритмов и программ, реализованных (или таких, которые потенциально могут быть реализованы) на разных машинах?

.2281. **ГЕЙДЕМАН:** Согласен.

3. Что такое алгоритм?

1980.11.15
(через 1 день)

.2282. **Я:** Наша предыдущая беседа закончилась твоим утверждением {.2278} о том, что арифметика натуральных чисел изучает общие свойства потенциальных продуктов некоторых алгоритмов и твоим согласием {.2281} с тем, что Кнут (или вообще «искусство программирования») занимается изучением общих свойств алгоритмов.

---

[10] Кнут Д. «Искусство программирования для ЭВМ, т.1. Основные алгоритмы». Мир, Москва, 1976.

.2283. Считаешь ли ты в свете этих твоих высказываний, что арифметика натуральных чисел и программирование имеют похожие предметы изучения, а именно: алгоритмы и программы (при этом, конечно, алгоритмы той и другой могут отличаться тем, для какого устройства они предназначены, для какой цели и кем созданы, для чего изучаются)?

.2284. **ГЕЙДЕМАН:** Да.

.2285. **Я:** Первый вопрос: В пункте {.2278} ты утверждал, что арифметика натуральных чисел изучает общие свойства алгоритмов и программ. Можно ли распространить это твое мнение на всю математику и утверждать, что вообще вся математика целиком изучает общие свойства некоторых алгоритмов и программ?

.2286. Второй вопрос: Считаешь ли ты, что в свете твоего ответа {.2284} было бы естественно ожидать, что средства описания, терминология, «стиль» и т.д., применяемый в этих двух дисциплинах, должны были бы быть похожими в такой же мере, в какой похожи их предметы?

.2287. Третий вопрос: Если средства описания, терминология и т.д. должны быть похожи, то которые средства более соответствуют природе описываемых объектов: применяемые сейчас в математике или применяемый сейчас в программировании?

.2288. **ГЕЙДЕМАН:** Алгоритмы, о которых я говорил {.2278} и алгоритмы, о которых пишет Кнут, это разные вещи. Первые могут быть бесконечными, Кнут же явно оговаривает, что алгоритм – это <u>конечная</u> последовательность. Оговаривает он это или нет?

.2289. **Я:** Оговаривает. Но, во-первых, мы вообще не обязаны в точности принимать определение Кнута. Мы можем обозначать словом «алгоритм» и что-то другое, например, все алгоритмы Кнута плюс бесконечные алгоритмы. Я именно так и делаю. Мне кажется более удобным считать, что есть конечные алгоритмы и бесконечные. Кнут изучает только конечные, ну и на здоровье: это его дело. Да и вообще: один и тот же алгоритм при одних исходных данных может кончаться за конечное число шагов, при другой же входной информации может стать бесконечным (к примеру: извлечение квадратного корня из 4 и 2). Установка «бесконечный алгоритм не алгоритм» мне кажется лишней. Разве алгоритм извлечения квадратного корня уже не алгоритм, если при двойке он зацикливается?

.2290. Во-вторых, Какое всё это имеет значение для нашего разговора? Мы обсуждаем то, будут ли (должны ли быть) средства описания математических алгоритмов и средства описания программистских алгоритмов похожими? Ну пусть одни бесконечны, другие конечны! Разве средства описания тех и других обязательно должны отличаться? Разве не одними и теми же операторами Ассемблера я записываю и ту программу, которая быстро выдает результат и ту, которая циклит бесконечно и (по Кнуту) не имеет алгоритма?

.2291. **ГЕЙДЕМАН:** Давай все-таки выясним, что мы понимаем под словом «алгоритм».

.2292. **Я:** Давай выясним. Давай я буду описывать тебе некоторые объекты, а ты присваивай им названия в соответствии со своим вкусом. Я приму эти твои названия.

.2293. Вот рассмотрим такие объекты, как наша ЕС-1030, которая стоит на третьем этаже. Рассмотрим другую ЕС-1030, которая на втором этаже. Рассмотрим нашу установку СМ-3. Рассмотрим автоматический станок на заводе «Альфа». Словом: всякие реальные, физические, конкретные, существующие в пространстве и времени (а не абстрактные, отвлеченные) устройства, которые могут что-то делать, и деятельность которых зависит от управляющей перфокарты, перфоленты, в общем: от управляющей информации. Как ты назовешь эти устройства?

.2294. **ГЕЙДЕМАН:** Физические программируемые устройства.

.2295. **Я:** Как ты назовешь то, что управляет такими объектами?

.2296. **ГЕЙДЕМАН:** Это программа.

1981.01
(через 2 месяца)

.2297. После этого диалог принял столь стремительные обороты, что уже не протоколировался. Как это обычно бывает, когда начинают выяснять смысл слов, мы завязли в этом по уши. Общий итог этого выяснения значения слова «алгоритм» можно подвести в таком виде: в наших беседах и в обсуждаемой работе словом «алгоритм» обозначаются по крайней мере два объекта:

.2298. а) то, что управляет «физическими программируемыми устройствами» {.2294}, то есть, то же самое, что и «программа»;

.2299. б) то общее, что имеется в разных программах.

.2300. У меня явно преобладает первое использование слова «алгоритм», то есть, в основном он у меня синоним слова «программа» {.313}, {.499}, {.555}, {.920}, хотя не исключено, что где-то я употреблял его и во втором смысле. Гейдеман решил, что он использует оба смысла.

.2301. Уставшие от этого нудного занятия, мы в тот день беседу прекратили, а потом шли месяцы, заполненные текущей работой, и диалог не возобновлялся. Так мне и не удалось в тогдашних ноябрьских беседах заставить Гейдемана (который в то время был главным противником моих математических идей) ответить на поставленные ему вопросы и вообще довести беседу до ее главной (для меня, разумеется) стратегической цели: заставить Гейдемана либо открыто признать, либо, на словах отрицая, на деле продемонстрировать моим читателям справедливость двух основных положений:

.2302. а) своими «схемами» конструктивисты на самом деле описывают общие свойства программ для различных устройств (в первую очередь мозга);

.2303. б) средства, которыми они это делают, хуже тех средств, которые применяются в современной науке программирования.

.2304. Я надеюсь, что когда-нибудь этот диалог будет возобновлен.

4. Конструктивная математика

§13. О конструктивистах

1981.01.15
(через 0 месяцев)

.2305. Уже до описанного выше диалога Гейдеман многократно утверждал, что мои взгляды на математику похожи на мнение конструктивистов. Сам я так не считаю. Я думаю, что дистанция между излагаемыми мною взглядами и конструктивистским направлением в математике столь же велика, как и дистанция между мной и формалистами.

.2306. Мне кажется, что конструктивисты (совершенно справедливо) видят вместо застывших канторовских множеств различные процессы. Но, сделав этот один шаг в правильном направлении, они тут же делают второй шаг, да так, что покидают даже те позиции, где, на мой взгляд, формалисты были правы. Так что в конце концов правильных и неправильных позиций (по моему мнению, разумеется) у обоих оказывается одинаково много.

.2307. Ниже я в виде воображаемого диалога с главой советских конструктивистов, член-корреспондентом АН СССР Андреем Андреевичем Марковым (р. 1903), постараюсь изложить основные пункты своего мнения. Все слова Маркова взяты из его статей в БСЭ-3.[11]

§14. Несостоявшийся 1981.01.15 диалог с А.А. Марковым

.2308. **Я:** Андрей Андреевич, что такое конструктивная математика?

.2309. **МАРКОВ:** Конструктивная математика – это абстрактная наука о конструктивных процессах, человеческой способности осуществлять их и о их результатах – конструктивных объектах.

.2310. **Я:** Но, видимо, конструктивная математика в некотором смысле претендует на то, что она более верна, чем «остальные математики». Она претендует на то, чтобы заменить «остальные математики», а вовсе не является чем-то, не составляющим никакой конкуренции «другим математикам», не что-то совершенно параллельное им, как, например, биология. Я хочу сказать, что из Ваших слов, видимо, следует, что и вся математика вообще изучает конструктивные процессы, человеческие процессы осуществлять их и т.д., хотя не все направления математики это заявляют явно.

.2311. **МАРКОВ:** Конструктивное направление в математике – это математическое мировоззрение, связанное с признанием исследования конструктивных процессов и конструк-

---

[11] Марков А.А. «Конструктивная математика». Статья в БСЭ-3, т.13, Москва, 1973. Марков А.А. «Конструктивное направление в математике». Статья в БСЭ-3, т.13, Москва, 1973.

тивных объектов основной задачей математики. Конструктивное направление в математике привело к построению особой науки – конструктивной математики.

.2312. **Я:** Понятно. Значит конструктивизм признает исследование конструктивных процессов и всего, что с ними связано, основной задачей всей вообще математики. Ну что же, в этом мы единомышленники. Противостоит ли этому «математическому мировоззрению» формализм Гильберта?

.2313. **МАРКОВ:** Программу Гильберта можно охарактеризовать как неудавшуюся попытку обосновать теоретико-множественную математику на базе конструктивной математики, в надежности которой он не сомневался. Гильберта следует считать одним из основоположников конструктивной математики.

.2314. **Я:** Вот как? А как же с Брауэром?

.2315. **МАРКОВ:** Конструктивное направление можно рассматривать как ответвление основанного Брауэром интуиционизма, программа которого состоит в исследовании умственных математических построений.

.2316. **Я:** Выходит, что конструктивизм берет начало от обоих знаменитых противников? Но, хорошо, оставим историю!

.2317. Не могли бы Вы сказать, что такое конструктивный процесс и что такое конструктивный объект?

.2318. **МАРКОВ:** Понятия конструктивного процесса и конструктивного объекта не определяются в конструктивной математике.

.2319. **Я:** Конструктивный объект – это, видимо, что-то такое, что «в принципе» можно построить из ранее существующих объектов. «В принципе» – это значит: если забыть о ресурсах времени, исходного материала и т.д.?

.2320. **МАРКОВ:** В конструктивной математике систематически применяются две абстракции: абстракция потенциальной осуществимости и абстракция отождествления. Абстракцию потенциальной осуществимости используют, когда отвлекаются от практических ограничений конструктивных возможностей в пространстве, времени, материале.

.2321. **Я:** Ясно.

5. Числа Маркова

1981.01.15

.2322. **Я:** Андрей Андреевич, как Вы понимаете число? Что это такое?

.2323. **МАРКОВ:** Простейшим видом конструктивных объектов являются слова в фиксированном алфавите, т.е. ряды букв этого алфавита. Конструктивный процесс, результатом которого является слово, состоит в данном случае в выписывании этого слова буква за буквой. Частным случаем слов являются натуральные числа, которые мы рассматриваем как слова в алфавите 01, начинающиеся с нуля и, кроме того, нуля не содержащие, то есть как слова 0, 01, 011, 0111, ... Добавляя к этому алфавиту знак минус «–» и знак дроби «/» получают возможность строить рациональные числа как некоторые слова в алфавите 01–/. Таким образом рациональные числа оказываются конструктивными объектами.

.2324. **Я:** Ну что же, это Ваша теория и Ваше дело. Меня такое понятие числа никак не могло бы устроить. По-моему Вы начинаете с зыбкого фундамента. Что это за алфавит? Что это за единички и нолики? Почему именно единички и нолики? Почему не квадратики и кружочки?

.2325. **МАРКОВ:** В конструктивной математике применяется абстракция отождествления. Абстракцию отождествления используют, когда говорят о двух в том или ином смысле одинаковых объектах как об одном и том же объекте.

.2326. **Я:** Понятно: Вы применяете ее сейчас, когда отождествляете квадратики, единички и многое многое другое, что еще можно придумать, применяете потому, что все эти объекты одинаковы в некотором смысле, это объект «вообще». Вы будете применять эту абстракцию и в дальнейшем, когда будете отождествлять результаты двух разных конструктивных процессов.

.2327. Очень хорошо, что Вы осознаете и оговариваете применение этой абстракции. Не всегда это делают.

.2328. В принципе, конечно, и я использую эту абстракцию отождествления и говорю о каком-нибудь объекте «вообще». Но есть все-таки разница между тем, как ее используете Вы, и как ее применяю я. Я стараюсь никогда не выпускать из вида то, какие, собственно, объекты были отождествлены, «собраны в один». И стараюсь проследить всё рассуждение не только в случае этого общего, единого, отождествленного, но и в случае единичного, конкретного объекта, такого объекта, который существует не «вообще», а в пространстве и времени. Боюсь, что именно здесь кроется то кардинальное, что отличает меня от всех.

.2329. Вам не совсем понятно, что я имею в виду? Сейчас попытаюсь пояснить. Хотя это не легко.

.2330. Вот Вы, Андрей Андреевич, говорите об этих нуликах и единичках. Если это объекты абстрактные, если на месте них могут быть и деревянные палочки, и детские кубики, и вообще всё, что угодно, то мне как будто и понятно, что Вы имеете в виду. Но вот стоит мне взять вместо абстрактных единичек конкретные, как всё застопорилось. Вот, допустим: конкретные единички, те, которые я, именно я, пишу сегодня на своем листке бумаги:

011/0111

.2331. Да разве это вот и есть число 2/3? В моих глазах это пятна чернил на бумаге, а никакое не число. Впрочем, всё, конечно, зависит от того, что называть числом. Только такое, вот, представление о числе, оно настолько далеко от интуитивного...

.2332. Итак: с абстрактными единичками получается более менее, а вот с конкретными... А мне хотелось бы, чтобы и с абстрактными всё было в порядке, и с конкретными тоже. И в моей концепции так оно и есть. Возьмем, например, ту систему чисел, которая введена в главе МЕТАНУМЕРИКА,6 {.330}. В случае абстрактного понимания мои изокванты такие же конструктивные объекты, как и Ваши слова. Но в случае конкретного понимания (например, таблицы внутри ЭВМ, на которой функционирует Эуклидос) они не превращаются в бессмыслицу. Это закодированная информация о внешних объектах. Это что-то внутреннее для той системы, которая строит эти конструктивные объекты. Не знаю, как кажется Вам, но мне представляется, что это 1:0 в мою пользу.

.2333. Далее, если, отправляясь от таблиц Эуклидоса, идти к абстракциям, то от моих понятий так же легко придти к Вашим (конструктивные объекты), как и к канторовским (равномощные множества в количественной теории натуральных чисел).

.2334. Вы манипулируете значками, пишете ряд единичек, ставите знак дроби и опять ряд единичек. Но разве от таких вот манипуляций люди получают представление о дробных числах? Человечество ни в жизни не додумалось бы до рациональных чисел, если бы оно не занималось бы измерением и сравнением различных внешних объектов, то есть, конкретных множеств. Не было бы рациональных чисел, если бы люди имели бы возможность только писать Ваши единички и знаки дроби, и не могли бы измерять и сравнивать. Не манипуляции со значками и «словами» лежат в основе понятия чисел, а манипуляции с множествами. С множествами, которые, с одной стороны, существуют в реальном мире, а, с другой стороны, кодируются, отображаются в головах людей.

.2335. Вы изучаете конструктивные процессы, но не можете сказать, зачем людям эти процессы, откуда они взялись, что из себя представляют. Я тоже говорю о процессах, которые вполне конструктивны, но я могу объяснить, что это за процессы и зачем они людям нужны: это процессы отражения, процессы, при помощи которых они смотрят в мир, обрабатывают информацию о внешнем мире. Ваши процессы созданы для математики, мои – для жизни. Вы, конечно, можете иметь другое мнение, но я думаю, что счет стал 2:0 в мою пользу.

.2336. Вы были правы, когда говорили, что вы – конструктивисты – являетесь идейными наследниками Гильберта: он тоже манипулировал значками вместо того, чтобы размышлять о том, что происходит с объектами, кодирующими вещи материального мира. В этом недостаток всех вас.

6. Расхождения с конструктивизмом

1981.01.15

.2337. **Я:** Итак, Андрей Андреевич, если бы Вы отбросили манипулирование значками (будь то на бумаге, будь то иные значки) и стали бы интересоваться только одним видом конструктивных объектов (которые в общем-то подходят под Вашу идеологию, но которые у Вас абсолютно не рассматриваются и полностью вытеснены значками), а именно: теми объектами, которые в отображающих, вычислительных системах (таких, как мозг и ЭВМ) кодируют информацию о внешнем мире, если бы Вы изучали конструктивные объекты и конструктивные процессы такого рода, то мы получили бы общий фундамент для дальнейших переговоров.

.2338. Правда, проблемы и разногласия всё равно бы остались. Во-первых: по вопросу о терминологии и символике. На каком языке лучше говорить о конструктивных объектах такого рода: на Вашем вроде тех схем, которые тут недавно нам преподносил Гейдеман, или на моем, похожем на алгоритмические языки? Я, конечно, считаю, что на моем, но ведь Вы с этим, наверно, не согласитесь.

.2339. Кроме того (во-вторых), есть еще одно существенное различие, которое делает мое «математическое мировоззрение» в данном вопросе ближе к классическому, чем к Вашему. Что, по-Вашему, в первую очередь отличает теоретико-множественный подход от конструктивистского?

.2340. **МАРКОВ:** В конструктивной математике не применяется характерная для теоретико-множественной математики абстракция актуальной бесконечности, связанная с рассмотрением никогда не завершаемых процессов как бесконечно продолженных и тем самым как бы завершенных.

.2341. **Я:** Да-да, я слышал, что конструктивисты считают «существующими» только такие объекты, которые можно построить (конструктивным процессом при допущении абстракции потенциальной осуществимости), остальные объекты, значит, «не существуют».

.2342. Для меня дела обстоят несколько иначе. Во-первых: для меня существует то, что построено, а не то, что можно построить. Так что непостроенные конструктивные и непостроенные неконструктивные объекты в моих глазах не так уж и сильно отличаются. Почему это об одних непостроенных объектах мы имеем право думать и говорить, а о других нет? Я думаю, что можно одинаково хорошо рассуждать об объектах обоих этих категорий, надо только ясно понимать, как обстоят дела в действительности и не забывать, что, собственно, и те, и другие из себя представляют.

.2343. Во-вторых: в Эуклидоле и в Эуклидосе имеются средства построения таких множеств, которые были бы созданы, если бы закончился бесконечный процесс (оператор РЕО) и даже вообще не определенных множеств. Так что мне и в голову не приходит объявлять какие-то объекты незаконными. Весь вопрос только в том, ЧТО мы сможем об этих объектах сказать, и стоит ли их вводить. Но «не стоит» и «нельзя» – это ведь не совсем одно и то же.

.2344. В-третьих: в Эуклидоле предусмотрены средства кодирования аксиом, при помощи которых можно охарактеризовать те или иные множества, которые, может быть, раньше были построены как неопределенные. Так что мой подход ничуть не противоречит аксиоматическому. Единственное, за что я ратую: это – всегда знать, что из себя представляют те объекты, о которых мы говорим (правда, я считаю, что мы действительно знаем, что они из себя представляют, только в том случае, если можем их смоделировать на ЭВМ). Ничего другого я не добиваюсь.

.2345. И, наконец, последнее различие. Я слышал, что конструктивисты пользуются особой конструктивной логикой, в которой они, как и интуиционисты, отрицают закон исключенного третьего. Правда ли это?

.2346. **МАРКОВ:** Близость конструктивного направления к интуиционизму проявляется в понимании дизъюнкций и теорем существования, а также в трактовке закона исключенного третьего.

.2347. **Я:** В данном случае я просто-напросто не верю ни интуиционистам, ни конструктивистам. Есть только одна логика: правильная логика. И все пользуются именно ею. Ну, кроме случаев логических ошибок. Но всё равно, правильная логика в мире только одна.

.2348. Громкие слова о разных логиках и об отрицании закона исключенного третьего – это просто очень неточное выражение своего отношения к обсуждаемым объектам (а вовсе не к логике).

.2349. Если у нас В – это всё, что не А, то интересующая нас вещь может быть либо А, либо В, и *tertium non datur*. А если Вы из «не-А» не можете сделать вывод, что это В, то виновен здесь вовсе не закон исключенного третьего, а Ваши слишком расплывчатые понятия А и В.

.2350. Таковы главные отличия моего «математического мировоззрения» от конструктивной математики. Повторяю:

.2351. а) акцент не на конструктивных объектах типа значков и образованных из них слов, а на внутримозговых (моделируемых внутрикомпьютерными) конструктивных объектах, кодирующих информацию о внешнем мире;

.2352. б) вместо традиционной математической символики и терминологии использование символики и терминологии науки компьютеров;

.2353. в) нет требования ограничиться только конструктивными объектами; применяется аксиоматический метод и формальное описание (правда, на языке компьютеров);

.2354. г) нет претензий на особую логику.

7. Школа Сколема

§15. Профессор Гудстейн

1981.02.03
(через 19 дней)

.2355. Теперь я приведу еще один воображаемый диалог с еще одним конструктивистом: с Рейбеном Луисом Гудстейном (Goodstein), который главные свои работы опубликовал в 1957 и в 1961 годах в Амстердаме на английском языке. (К сожалению составители книги его переводов на русский язык, проявляя тем самым степень своей любви к точности и ясности, не сочли возможным указать хотя бы элементарные сведения об авторе: из какой страны, когда родился, какой пост занимал, а БСЭ о нем молчит. В дальнейшем я называю его профессором, полагая, что, скорее всего, он был (или есть) профессором какого-нибудь университета (скорее всего, в Лейчестере в Англии). Если это не так, то я приношу ему свои извинения). Все высказывания Гудстейна взяты из «Предисловия» и «Введения» в его работу «Рекурсивная теория чисел» (книга: Р.Л. Гудстейн. «Рекурсивный математический анализ». «Наука», 1970).

§16. Несостоявшийся 1981.02.03 диалог с профессором Гудстейном

.2356. **Я:** Господин профессор, не могли бы Вы сказать, каковы причины возникновения того направления в математике, в которое Вы следуете?

.2357. **ГУДСТЕЙН:** Открытие рефлексивного парадокса, состоящего в том, что понятие класса всех классов, которые не являются членами самих себя, является противоречивым, привело к возникновению трех новых направлений в математике.

.2358. Первым из них была теория типов Рассела, одна из частей которой разделяла объекты на типы (так что классы объектов одного типа образовывали объекты следующего, более высокого типа) и запрещала образование классов смешанного типа. Эта теория привела к значительным усложнениям в построении арифметики, ибо она исключала не только парадоксы, но также и некоторые конструкции, лежащие в основе теории вещественных чисел, такие, как наименьшая верхняя граница ограниченного класса чисел.

.2359. Вторым направлением исследований, вызванных к жизни открытием рефлексивного парадокса, была «интуиционистская» логика и арифметика Брауэра, наиболее новаторской чертой которых был отказ от *закона исключенного третьего* (*tertium non datur*), – логического принципа, утверждающего, что всякое предложение является или истинным или ложным, причем не представляется никакой третьей возможности.

.2360. Отвержение *закона исключенного третьего* устраняет рефлексивный парадокс, ибо этот парадокс опирается на допущение, что всякий класс или является, или не является членом самого себя.

.2361. Третьей системой, которая была развита для того, чтобы избавиться от рефлексивного парадокса, была *рекурсивная* арифметика Сколема. Сколем заметил, что он может избежать этого парадокса без обращения к ограничениям теории типов и без удаления каких бы то ни было правил классической логики, если он не будет употреблять *существование* в качестве одного из первычных понятий логики.

.2362. Пожертвовав существованием как первоначальным понятием, Сколем лишился классического метода определения функций, и на его место он ввел *определения с помощью рекурсии*.

.2363. Говорят, что функция f(n) определяется с помощью рекурсии, если вместо того, чтобы определить ее явно (т.е. как сокращение для некоторого другого выражения), дается значение f(0), и f(n+1) выражается как некоторая функция от f(n). Другими словами, рекурсивное определение определяет не саму f(n), а дает процесс, следуя которому, значения f(0), f(1), f(2), f(3) и т.д. определяются одно за другим.

.2364. **Я:** Да, Туральф Альберт Сколем (Skolem 1887–1963), норвежский математик, профессор университета в Осло... Значит Вы, профессор, его последователь?

8. Две отвергнутые концепции числа

1981.02.03

.2365. **Я:** А теперь, господин профессор, не могли бы Вы объяснить, какова, по-Вашему, природа чисел? Я тут исписал много бумаги, пытаясь объяснить свое понимание природы чисел, и мне было бы весьма интересно узнать Ваше мнение по этому поводу.

.2366. **ГУДСТЕЙН:** Вопрос «какова природа математических сущностей?» является вопросом, который занимал мыслителей более двух тысяч лет и на который, оказывается, очень трудно ответить. Даже первое и наиболее существенное из этих понятий – натуральное число – неуловимо как блуждающий огонек, когда мы пытаемся определить его.

.2367. Один из источников трудностей определения того, чем же являются числа, – это отсутствие в окружающем мире чего бы то ни было, на что мы могли бы указать при поиске определения числа.

.2368. **Я:** Ну, конечно, числа же не материальные объекты.

.2369. **ГУДСТЕЙН:** Число семь, например, – это не какая-нибудь конкретная совокупность из семи объектов, ибо, если бы это было так, то ни о какой другой совокупности нельзя было бы сказать, что она имеет семь членов.

.2370. Более приемлемой попыткой определения числа семь было бы высказывание о том, что свойство быть семью является тем общим свойством, которым обладают ВСЕ совокупности из семи объектов.

.2371. Трудность, возникающая при этом определении, состоит в описании как раз того, что же на самом деле общего у всех совокупностей из семи объектов (даже если мы сделаем вид, что всегда можем рассмотреть все совокупности из семи объектов).

.2372. Хороший способ продвинуться в решении проблемы такого рода – это задать себе вопрос «Как мы узнаем, что некоторая совокупность имеет семь членов?», потому что ответ на этот вопрос непременно должен привести к прояснению того, что является общим у совокупностей из семи объектов.

.2373. **Я:** О, Вы тысячу раз правы, господин профессор! Я запомню эти Ваши слова и при случае еще вернусь к ним.

.2374. **ГУДСТЕЙН:** Очевидный ответ состоит в том, что мы находим число членов совокупности, считая члены совокупности, но этот ответ не представляется убедительным, ибо, когда мы считаем члены совокупности, мы, оказывается, делаем не что иное, как «навешиваем» на каждый член совокупности «бирку» с некоторым числом.

.2375. Приписывание каждому члену совокупности некоторого числа, как мы, очевидно, делаем при счете, является на самом деле установлением соответствия между членами двух совокупностей: объектов, которые надо сосчитать, и натуральных чисел.

.2376. Если мы говорим, что две совокупности подобны, когда каждый объект одной из них имеет единственный соответствующий ему объект в другой, то можно сказать, что пересчет некоторой совокупности означает нахождение совокупности чисел, подобной данной. Так как подобие является транзитивным свойством, то, следовательно, подобие мы можем считать свойством, общим всем совокупностям, содержащим одно и то же число членов, – свойством, которое мы искали, а так как само подобие определяется безотносительно к числу, оно, конечно, может быть использовано в определении числа.

.2377. Чтобы завершить определение, нам нужно только выделить определенные стандартные совокупности из одного, двух, трех и т.д. членов; тогда будем говорить, что некоторая совокупность имеет определенное число членов, если только она подобна стандартной совокупности, имеющей то же число членов. Сами числа можно сделать требуемыми стандартами.

.2378. Это фактически определение числа, открытое Фреге в 1884 году и независимо Расселом в 1904 году.

.2379. Его нельзя, однако, принять как полный ответ на вопрос о природе чисел. Согласно этому определению число есть отношение подобия между совокупностями, при котором каждый элемент одной совокупности ставится в соответствие определенному элементу другой, и наоборот.

.2380. Недостаток этого определения кроется в понятии соответствия. Как мы узнаем, что два элемента находятся в соответствии? Чашки и блюдца в совокупности чашек, стоящих на своих блюдцах, находятся в очевидном соответствии, но каково соответствие между, например, планетами и музами?

.2381. Мало помогает упоминание о том, что хотя нет явного соответствия между планетами и музами, мы можем легко установить его; ибо, как мы узнаем об этом, и, что важнее, какого рода соответствие мы допускаем? Определяя число в терминах подобия, мы, в сущности, заменили неуловимую концепцию числа столь же неуловимой концепцией соответствия.

.2382. **Я:** Но не правда ли, господин профессор, ведь сама идея поэлементного сопоставления множеств очень привлекательна, и такое понимание числа очень близко к интуитивному. Ведь интуитивно «число» связано с количеством элементов. Я согласен, что концепция соответствия в том виде, в каком ее изложили Вы (вслед за Фреге и Расселом), почти столь же неуловима, как и сама концепция числа. Но может быть стоило бы заняться уточнением этой «неуловимой концепции соответствия»? Но, извините, продолжайте!

.2383. **ГУДСТЕЙН:** Некоторые математики пытались избежать трудностей в определении чисел, отождествляя числа с цифрами. Но эта попытка неудачна, так как каждый осознает, что свойства цифр не являются свойствами чисел.

.2384. При более тонком варианте той же попытки определить числа в терминах цифр числа считаются не тем же самым, что и цифры, а именами цифр; при этом устраняются нелепости, возникающие при попытке отождествить число и цифру, но это приводит к равно абсурдному заключению, что некоторое одно обозначение является квинтэссенцией числа.

.2385. Дело в том, что если числа являются именами цифр, то мы должны решить, которые цифры они называют; мы не можем считать число десять, например, названием как римской, так и арабской цифры. А если говорится, что число десять является именем всех цифр десять, то мы приходим к абсурдному заключению, что значение слова, сопоставленного числу, меняется с введением каждого нового обозначения.

.2386. **Я:** Не Вейерштрасса ли Вы имели в виду, когда говорили о тех математиках, которые отождествляли число и цифру? Ну, это, конечно, самые неудачные попытки из всех, с которыми я когда-либо встречался. Об этом я писал в {.1929}, {.2001}, {.2007}. Такое направление в объяснении природы чисел мне кажется совершенно бесперспективным, в то время, как идея Фреге и Рассела (по-моему, она восходит к еще более ранним идеям Кантора) нуждается только в уточнении. Именно таким уточнением (пусть, может быть, проведенным с радикально иной точки зрения) я и считаю свою концепцию числа.

9. Числа Гудстейна

1981.02.03

.2387. **Я:** Итак мы имеем уже две точки зрения, описанные и отвергнутые Вами. Каково же Ваше собственное мнение?

.2388. **ГУДСТЕЙН:** Как часто замечалось, можно провести замечательную параллель между игрой в шахматы и математикой. Цифрам ставятся в соответствие шахматные фигуры, а операциям арифметики – ходы этой игры. Но параллель продолжается даже дальше, ибо проблеме определения числа соответствует проблема определения сущности игры.

.2389. Если мы зададимся вопросом «Что такое шахматный король?», то мы обнаружим точно те же трудности при попытке ответить на этот вопрос, какие мы встретили при наших рассмотрениях проблемы определения понятия числа.

.2390. Несомненно, шахматный король, ходы которого описываются правилами игры, не есть фигура с характерными очертаниями, которую мы называем королем, так же как цифра не есть число, ибо любой другой объект, например, спичка или кусочек угля, столь же хорошо служил бы королем для игры.

.2391. Вместо вопроса «Что такое шахматный король?» давайте спросим: «Что делает некоторую конкретную фигуру королем?». Ясно, что это не очертания этой фигуры и не ее размер, ибо и то, и другое может быть по желанию изменено. То, что делает фигуру королем, – это ее ХОДЫ. Та фигура является королем, которая может ходить как король.

.2392. Теперь, наконец, мы обнаруживаем ответ на вопрос о природе чисел. Мы видим, прежде всего, что для понимания смысла чисел нам надо обратиться к той «игре», в которую играют числами, т.е. к арифметике. Числа один, два, три и т.д. являются действующими лицами в игре арифметика, фигуры, которые исполняют их роли, являются цифрами, а то, что делает некоторый знак цифрой, соответствующей конкретному числу, – это та роль, которую она играет, или, как можно сказать словами, более подходящими контексту, – это <u>правила преобразования</u> данного знака.

.2393. Поэтому, следовательно, <u>объектом нашего изучения является не самое число</u>, а <u>правила преобразования числовых знаков</u>, и в последующих главах у нас больше не будет причин рассматривать понятие числа.

.2394. Но так же, как шахматные правила обычно формулируют в терминах шахматных понятий, так что, например, мы говорим, что шахматный король ходит только на одну клетку за один ход (исключая рокировку), вместо полностью эквивалентной формулировки «фигура, играющая роль короля (или просто фигура-король) передвигается на одну клетку за ход («исключая рокировку)», так и мы будем продолжать формулировать в чисто описательных местах операции арифметики в терминах арифметических сущностей, а не в терминах арифметических знаков. Например, мы можем говорить о «сумме чисел два и три», а не придерживаться формулировки в знаках «2+3», где «+» это знак, роль которого в арифметике – это то, что называется сложением, а «2» и «3» – цифры, которые играют роль чисел два и три.

.2395. **Я:** Ну что же, господин профессор, свое понимание природы чисел Вы изложили достаточно ясно. Математика – игра, цифры – фишки в этой игре, а числа – та роль, которую они исполняют. И изучать надо не собственно числа, а правила игры, правила преобразования числовых знаков.

.2396. Я не буду распространяться на счет того, что такое объяснение для меня абсолютно неприемлемо. Каждый, кто меня хоть немножко знает, сразу догадается, что для Эгле это не пойдет.

.2397. Мне только хотелось бы отметить, насколько сильно могут расходиться людские мнения. Вам наверно Ваша концепция кажется более ясной и четкой, чем, например, концепция Фреге–Рассела, которую Вы только что отвергли. Мне же кажется, что «определяя число в терминах игры, мы, в сущности, заменили неуловимую концепцию числа столь же неуловимой концепцией» роли, которую цифры играют в преобразованиях знаков. Признаться честно, мне даже понятие соответствия кажется более четким, чем понятие роли.

.2398. Но не думайте, что я собираюсь объявить глупостями то, что Вы сказали. Отнюдь нет, я считаю, что в Вашем подходе имеется определенное рациональное зерно и что, если Вашу концепцию как следует уточнить, то она окажется почти такой же хорошей, как и концепция Фреге–Рассела. Точнее: если бы Вы в своей «игре» игрались бы не цифрами, а некоторыми другими объектами, то Ваша концепция была бы ровно столь же хороша (и ровно столь же неточна, расплывчата или «неуловима», как Вы говорите), сколь и концепция Фреге–Рассела.

.2399. Вы не признаете Фреге–Рассела, Фреге и Рассел и их последователи не признают Вас. В мире так и нет единого, четкого и ясного понимания природы чисел. Это значит, что, несмотря на все попытки, так и не существует настоящей концепции чисел, ибо если была бы, наконец, создана настоящая концепция чисел, то очень скоро осталась бы только она одна, а все остальные ушли бы в историю математики.

.2400. Вы, конечно, догадались, что судьбу именно такой настоящей концепции, которая скоро окажется вне конкуренции, я предвещаю своему пониманию природы чисел. Ну что ж, посмотрим, как на нее отреагирует мир!

.2401. Моя концепция имеет кучу преимуществ перед всеми другими. Вот Вы, господин профессор, жалуетесь {.2367} на «отсутствие в окружающем мире чего бы то ни было, на что мы могли бы указать при поиске определения числа». Я Вам указываю такой материальный объект в реальном мире: это программы мозга. Я призываю Вас рассматривать не «неуловимую концепцию соответствия» и не столь же неуловимую концепцию роли в игре, а вещь, которая после моделирования ее на ЭВМ становится фактически программой компьютера, то есть, такой вещью, которая во всем мире выпускается в промышленных масштабах многими фирмами и учреждениями. Вряд ли такую вещь назовешь «неуловимой концепцией».

.2402. Я покажу Вам, что мою концепцию можно считать так же хорошо уточнением определения Фреге–Рассела, как и Вашего. И получается, что Вы, господин профессор, и Фреге, и Рассел, – все ходили вокруг этой, настоящей концепции, вы даже почти понимали ее, вы брали то одну, то другую ее сторону и возводили в абсолют, вы прямо отчаянно пытались высказать свое иногда даже довольно ясное понимание в тех словах и понятиях, какие были в вашем распоряжении, но неизменно получалась эта вечно ускользающая «неуловимая концепция». И всё только потому, что не было ни у Вас, профессор, ни у Фреге, ни у Рассела простого, четкого и ясного понятия об одной вещи в этом мире, потому что вы все родились и воспитались когда этой вещи еще на свете не было. У вас неизбежно получалась «неуловимая концепция», ибо не было у вас системы понятий, терминов и всего, что связано с этой вещью. Ни Вы, господин профессор, ни Фреге, ни Рассел, никто из вас не знал, как работает компьютер, и не могли вы увидеть, что достаточно предположить, что мозг – компьютер, чтобы всё стало на свои места, исчезли «неуловимые концепции», уступив место «продуктам программной промышленности», и чтобы стало до боли очевидно, что все ваши слова – это попытка в очень плохих терминах объяснить работу компьютера.

10. Игра в математику

1981.02.03

.2403. **Я:** Несколько ниже я, выполняя обещание, попытаюсь показать, что моя концепция числа является радикальным уточнением одновременно и Вашей, и концепции Фреге–Рассела или, что то же самое, Фреге и Рассел брали и возводили в абсолют одну ее сторону, а Вы (если вместо игры цифрами играться иными объектами) – другую сторону.

.2404. Но сначала мне хотелось бы уточнить наше понятие игры. Итак: по-Вашему арифметика – это игра, цифры – ее игрушки, а числа – та роль, которую эти «оловянные солдатики» исполняют. Тут, конечно, всё, как обычно, зависит от того, что обозначать словом «игра».

.2405. Для меня естественно называть шахматы игрой. Потому, что это в общем-то случайность, что древний гость принца Сирама придумал шахматы именно такими, какими мы их знаем. Он мог бы придумать и другие правила. На шахматной доске теми же фигурами можно играть и в шашки. И в волков с овцой.

.2406. От того, что именно я играю, как я играю и играю ли вообще, никак не зависит ни состояние моих дел (я не говорю здесь о профессиональных игроках, для которых игра уже не игра), ни мои знания о мире, ни вообще что-нибудь существенное. Это просто времяпрепровождение, в лучшем случае некоторая гимнастика ума, это – «просто игра». Так я понимаю слово «игра».

.2407. Совсем иное дело – математика. Та арифметика, которой мы пользуемся, не случайность. Человечество не могло с такой же легкостью прийти к другой арифметике. От того, смогут ли люди рассчитать самолет, зависит, будут ли в этом обществе самолеты. И так на каждом шагу. Всё материальное благосостояние человечества зависит и от математики тоже. Математика – часть накопленных человечеством знаний. Знаний! Так какая ж это игра?

.2408. Разумеется, Вы имеете право называть игрой всё, что хотите. Только почему тогда не называть игрой и конструирование самолетов, строительство домов или, скажем, составление программ для ЭВМ?

.2409. Это, разумеется, Ваше дело, но я всё же предпочитаю сохранить слово «игра» для обозначения безделушек, а для математики и всех других перечисленных занятий употреблять другое слово.

.2410. Хорошо, предположим, что Вы говорите об игре «арифметика» в переносном смысле. Допустим, что Вы считаете математику более серьезным занятием, чем «просто игра». Допустим, что Вы под «игрой» понимаете «что-то делать с чем-то». Я предпочитаю здесь употреблять слово «манипулировать». Это одинаково хорошо подходит и для шахмат, и для Ваших занятий с цифрами. В одном случае Вы манипулируете шахматными фигурами, в другом – цифрами. И слово «манипулировать» абсолютно не предполагает, является ли Ваше занятие пустым времяпрепровождением, или серьезным делом. Слово «игра» же мне кажется здесь неуместным, так как подходит только для шахмат, но не для математики.

.2411. Итак, господин профессор, мне кажется, что, когда Вы говорите «игра арифметика», Вы под игрой подразумеваете больше то обстоятельство, что это какие-то действия над чем-то, нежели то, что это безделушка. Поэтому, надеюсь, я вполне могу заменить слово «игра» на слово «манипулирование» в Ваших высказываниях.

.2412. Теперь Ваше определение числа выглядит так: арифметика – это манипулирование цифрами, числа – это те роли, которые цифры при этом выполняют, а изучать мы должны правила манипулирования цифрами.

.2413. Теперь разберем, что такое «правила манипулирования». Что же такое вообще любое правило? Что такое, например, правила уличного движения? Это книжка со светофором на обложке? Нет ведь: в книжке правила только закодированы, записаны. А где же сами правила? Если над этим как следует подумать, то нетрудно понять, что правила уличного движения – это не что иное, как руководства к действиям водителя в той или иной ситуации, или, что то же самое, – это алгоритмы действий водителя при приближении к перекрестку и в подобных ситуациях. Правила языка – это алгоритмы построения предложений и т.д. Везде и всюду правила – это алгоритмы тех или иных действий.

.2414. Теперь, господин профессор, задача математика (как Вы ее понимаете) состоит в том, чтобы изучать алгоритмы манипулирования цифрами. Чувствуете, какая открылась параллель в наших позициях? Я не говорил, что Вы не правы (и не говорил вообще почти никогда, что вообще традиционная математика не права). Я всё время утверждаю только одно: что Вы и вообще математики говорите о программах на очень неприспособленном к этому языке, и поэтому Ваши высказывания (а иногда и выводы) чрезвычайно неточны и расплывчаты.

.2415. Я могу привести такую аналогию. Допустим, домохозяйка говорит мастеру, ведущему ремонт или строительство дома: «Стены коридора покрасьте желтым цветом!». «Хорошо» – отвечает мастер, – «но какой краской будем красить?». «Я же сказала: желтой!» – негодует хозяйка. «Понятно, что желтой, но какой: масляной, меловой, эмалью, ...?» – спрашивает мастер. А хозяйка сердится: «Какой бестолковый строитель, никак не может понять!». И так они разговаривают обо всем: домохозяйка видит одно, а строитель на это смотрит совсем с другой точки зрения и говорит совсем о других понятиях и совсем другими словами, хотя говорят они об одном и том же.

.2416. Нам, конечно, понятно, что взгляд строителя неизмеримо более глубок. По какой причине мы в этом уверены? Да по той простой причине, что строитель может построить дом, а домохозяйка не может. Поэтому систему понятий, которой пользуется строитель, и следует считать более глубокой и серьезной.

.2417. Я разговариваю с математиками, как строитель с домохозяйкой. Точно так же отличаются наши с Вами взгляды на математику, профессор. Вы смотрите на математику глазами домохозяйки, не интересуясь вопросом: «как это построить?». Я смотрю на математику глазами строителя. Вас, например, устраивает слово «абстракция». Я же сразу начну думать: «Абстракция? Как же ее реализовать на ЭВМ?». И когда я это придумаю, то само слово «абстракция» превратится в обозначение довольно расплывчатого понятия, вместо которого у меня будет вставать целый ряд элементов этой реализации. И таков вот характер всех различий в наших подходах, будь то к вопросу «что такое число?», будь то к вопросу «что такое множество?» и т.д. Мой взгляд – это взгляд строителя: «как это построить на компьютере?».

.2418. То, о чем говорите вы, вы не можете реализовать на технических устройствах. Всё, о чем говорю я, я могу воплотить в компьютер. И это такой козырь, который вам будет нелегко выбить из моих рук. У вас взгляд домохозяйки, у меня взгляд строителя. И для меня нет сомнений в том, чей взгляд более глубок.

11. Слияние концепций

1981.02.03

.2419. **Я:** Итак, оказалось, что мы сошлись (вернее: с самого начала стояли) на одном и том же: что математика изучает алгоритмы манипулирования чем-то. Но чем? Вы считаете главным (или даже единственным) предметом математики манипулирование цифрами, то есть – значками (преимущественно) на бумаге. Я эти алгоритмы назвал вторичными {.2082}. Не от них математика берет свое начало, не они определяют незыблемую истинность того, что 2+2=4. Это определяется первичными алгоритмами, алгоритмами манипулирования множествами.

.2420. Теперь проливается свет на то, что такое «роль, исполняемая цифрами» – это то, что цифры обозначают числа, то есть, объекты вторичных алгоритмов обозначают стоящие за ними объекты первичных алгоритмов. Видите, как за Вашими понятиями раскрываются мои?

.2421. Ну, а что же это за первичные алгоритмы? Их, как и вторичных, можно придумать сколько угодно. В медитации ЧИСЛА {.1742} я предложил один комплект таких алгоритмов, определяющих все типы чисел по единому принципу. Но традиционная система чисел основывается на несколько других алгоритмах. Алгоритмы системы натуральных чисел (по крайней мере один из возможных близких вариантов) описаны в {.330}. Поскольку мы тут беседуем именно о традиционных натуральных числах, то эти алгоритмы и сочтем за определяющие.

.2422. В пункте {.2372} Вы, господин профессор, сказали, что хороший способ продвинуться в решении проблемы того, что же на самом деле общего у всех совокупностей из семи объектов – это задать себе вопрос «Как мы узнаем, что некоторая совокупность имеет семь членов?».

.2423. Вы ответили, что узнаем считая, а счет, «оказывается», есть навешивание «бирок» с числами. Я бы ответил на этот вопрос совсем иначе: «Везде и всюду, всегда и вообще, будь то обнаружение сходства двух лиц или обнаружение того, что две совокупности имеют одинаковое количество элементов, мы узнаем об этом только выполнив определенную процедуру сравнения, и выполняется эта процедура по тому или иному алгоритму». Вот, именно такой алгоритм сравнения под названием «алгоритма равномощности» описан в {.319}, и именно он, реальный и четкий, встает за «неуловимой концепцией соответствия». Видите, господин профессор, как и за концепцией Фреге–Рассела опять вскрывается всё та же моя концепция?

.2424. Фреге и Рассел напирают на то, что это соответствия эталонному множеству, Вы напираете на то, что это манипулирование или «игра», как Вы говорите. Вы оба правы, но не точны. А за всем этим во всем своем величии стоит мозговой компьютер – процессор множеств.

12. Продолжение диалога с Гейдеманом

1981.02.27
(через 24 дня)

.2425. (Диалог 1981.02.27; *предыдущий диалог см. в* {.2297}).

.2426. **ГЕЙДЕМАН:** Итак, доведем беседу до твоей стратегической цели: заставим меня обсуждать два вопроса:

.2427. а) верно ли, что математики на самом деле описывают общие свойства программ для различных устройств (в первую очередь мозга);

.2428. б) средства, которыми они это делают, хуже тех средств, которые применяются в современной науке программирования.

.2429. Я готов в это поверить, но хочу только добавить, что мне было бы приятней поверить в то, что с помощью математики можно описать и общие свойства программ для различных устройств (в первую очередь мозга).

.2430. Поговорим про средства: Какими же средствами располагает «современная наука программирования»? Средства: различные языки программирования, блок-схемы, ассемблеры, языки высокого уровня. Да, эти языки позволяют написать программу. Но произвести анализ программы?

.2431. Посмотрим, что делает Кнут в тех трех томах, которые лежат у тебя на полке. Какой бы том мы не взяли – всюду, где встречается подзаголовок «анализ алгоритма» – через несколько предложений начинается математический анализ. Конечно, для разных алгоритмов применяются разные методы (теория чисел – для алгоритмов арифметики, теория вероятности и статистика – для алгоритмов случайных чисел, комбинаторика, теория графов и потоки в сетях – для алгоритмов сортировки и поиска). Но всюду – математика. Кнут даже явно указывает на это в томе I. Цитирую: «Поэтому мы заканчиваем этот параграф (параграф называется «Алгоритмы») кратким указанием метода, с помощью которого понятие алгоритма можно поставить на прочную базу, используя язык математической теории множеств. Формально определим вычислительный метод как четверку (Q, I, Ω, f), в которой и т.д.». Дальше уже идет неприемлемый для тебя формальный способ описания.

.2432. Так как же анализировать алгоритмы без математики? Кнут этого, похоже, не умеет. А кто умеет? Ты, конечно, умеешь. Тогда для того, чтобы разговор о выборе средств анализа алгоритмов был определеннее, покажи на каком-нибудь примере, как ты анализируешь алгоритмы. Какими средствами и методами пользуешься.

.2433. Уточняю: У тебя есть средство – язык Эуклидол и транслятор-интерпретатор Эуклидос. На Эуклидоле ты записываешь алгоритм. Но ведь средствами Эуклидола его не проанализировать. Требуется еще что-то. Что?

.2434. **Я:** Итак, продолжим наш диалог и, как ты говоришь, «доведем беседу до моей стратегической цели». Только моя стратегическая цель {.2301} не «заставить тебя обсуждать два вопроса» (обсуждать что-то я никого не заставляю, ты участвуешь в обсуждении стопроцентно добровольно и по собственной инициативе), а заставить тебя (коль уж ты вступил в диалог со мной) либо открыто признать, либо, на словах отрицая, на деле (всем ходом диалога) показать моим читателям, что

.2435. а) математики описывают алгоритмы;

.2436. б) средства, которыми они это делают, хуже тех средств, которые я предлагаю (и которые сделаны по образцу средств, применяемых в программировании).

.2437. Как видишь, эта «цель» состоит из двух пунктов и бессмысленно говорить о пункте {.2436}, пока мы не покончили с пунктом {.2435}. И сначала я еще больше ограничу предмет нашего разговора и вместо «средств математики» вообще разберем одно определенное средство (которое преподнес нам ты сам), а именно: те схемы, о которых ты говорил в пунктах {.2220}, {.2225}, {.2234} предыдущей части диалога.

.2438. Теперь я предлагаю тебе ответить на два вопроса:

.2439. а) являются ли эти схемы средством, применяемым в математике?

.2440. б) являются ли эти схемы описанием некоторого алгоритма?

.2441. **ГЕЙДЕМАН:**

а) да, это одно из средств, применяемых в математике;

б) да.

.2442. **Я:** Хорошо, теперь такие вопросы:

.2443. а) можешь ли ты хотя бы приблизительно представить себе, как аналогичные алгоритмы описать на Эуклидоле?

.2444. б) согласен ли ты с тем, что схема из пункта {.2234} (согласно конструктивистам, определяющая, задающая натуральные числа) и фрагменты на Эуклидоле, приведенные в {.319} и {.330} (и определяющие натуральные числа согласно моей концепции), «выполняют одну и ту же работу», являются описаниями если и не совершенно эквивалентных, то очень похожих алгоритмов?

.2445. **ГЕЙДЕМАН:** да.

.2446. **Я:** Еще два вопроса:

.2447. а) согласен ли ты с тем, что сравнивать нужно такие средства, которые «делают одну и ту же работу»?

.2448. б) что твои схемы и мои фрагменты на Эуклидоле – это один конкретный пример, где мы можем сравнить традиционные и «программистские» средства?

.2449. **ГЕЙДЕМАН:** да, но не надо забывать о том, что предмет нашего разговора – средства анализа алгоритмов, а не средства записи алгоритмов.

13. Предмет разговора

1981.02.27

.2450. **Я:** Нет, предмет нашего разговора не средства анализа алгоритмов, а именно средства записи алгоритмов. Ты всё хочешь перескочить на такое место разговора, которое я считаю его серединой или даже концом. Видимо поэтому мы друг друга и не понимаем. Я думаю, что прежде, чем анализировать алгоритм, надо знать, какой же алгоритм мы, собственно, анализируем, что, собственно, является предметом нашего анализа. Бессмысленно (по крайней мере по моим представлениям) анализировать «то, не знаю что». Прежде, чем приступить к анализу алгоритма, надо, по-моему, сначала четко определить сам предмет такого анализа, то есть, по возможности точнее и яснее описать сам алгоритм. Поэтому я не согласен с тобой, что сейчас предметом нашего разговора являются средства анализа алгоритмов. Наоборот, я-то обсуждаю именно средства записи алгоритма, то есть, описания того, что же он из себя представляет. Я хочу начинать с начала: «сначала определим предмет анализа, потом проанализируем». Ты хочешь начинать с конца: «сначала проанализируем, потом разберемся, что же мы такое анализировали!».

.2451. Кстати, это именно тот недостаток, который я и считаю присущим всей математике и именно который и хочу устранить своим Эуклидолом: я считаю, что именно предмет нашего анализа недостаточно точно и ясно описан, определен. Именно средства описания, записи предмета математики недостаточны и плохи в математике, и именно они «хуже тех средств», которыми наука программирования описывает свой предмет изучения.

.2452. **ГЕЙДЕМАН:** Я согласен с тем, что «предмет математики» трудно описать, во всяком случае я за это не берусь (по-моему у математики много предметов). Тогда начнем с другого конца: что есть предмет программирования по-твоему?

.2453. **Я:** Программы. Или алгоритмы (я уже указывал на то, что для меня практически нет разницы между этими словами). Предметом науки программирования являются программы.

.2454. **ГЕЙДЕМАН:** Означает ли это, что программирование изучает программы или алгоритмы?

.2455. **Я:** Да, та область человеческих знаний, которую я называю наукой программирования, изучает программы. По-моему я это уже говорил многократно.

.2456. **ГЕЙДЕМАН:** Тогда я задам такой наивный вопрос: Что значит изучает? Исследует свойства программ, т.е. анализирует?

.2457. **Я:** Да.

.2458. **ГЕЙДЕМАН:** Можно ли тогда так описать предмет программирования:

а) дано: программа, записанная на каком-то языке;
б) что надо узнать: какие у этой программы свойства?

.2459. **Я:** Во-первых, то, что ты назвал, может быть не предметом, а задачей. Да, то, что я называю наукой программирования и здесь, и в пункте {.2454}, и в своих медитациях, это имеет задачу изучать (или занимается тем, что изучает) алгоритмы, общие свойства различных программ. Она изучает, что бы было, если бы программу написать так (по такому алгоритму), что бы было, если ее написать по другому алгоритму и т.д. Таким образом, предметом этой науки являются программы.

.2460. Точно так же по моему мнению обстоят дела с математикой. Она тоже изучает алгоритмы, тоже смотрит, что бы было, если бы применить один алгоритм, что бы было, если применить другой и т.д. Только программирование имеет средства, позволяющие описать ее предмет с очень высокой точностью (на Ассемблере, Фортране и т.д.), описать так, чтобы у нас практически не осталось возможности по-разному понимать то, о каком же мы объекте говорим и рассуждаем. А у математики таких средств практически нет (есть плохие средства вроде твоих схем).

.2461. Что же касается твоего конкретного вопроса (Дано – Что надо узнать?) – то это, конечно, тоже задача из области науки программирования, только довольно банальная.

.2462. Итак: Я утверждал, что средства, которыми математики описывают предмет своей науки, т.е. – алгоритмы – хуже тех средств, которыми программисты описывают предмет своей науки – программы. Я противопоставил два конкретных примера описания одного предмета математики (а именно: натуральных чисел) традиционными средствами математики (твоими схемами) и «программистско-подобными» средствами (мои фрагменты на Эуклидоле). Я считаю, что мои средства лучше, чем традиционные, и могу объяснить почему. Но сейчас я хочу спросить тебя: которое из этих средств (твои схемы или мой Эуклидол) является лучшим средством описания алгоритма «натуральных чисел» – одного из предметов, изучаемых в математике?

.2463. **ГЕЙДЕМАН:** Давай не будем спешить, а последовательно обсуждать твои пункты {.2459} – {.2462}. Итак, что было бы, если бы программу написать по одному алгоритму или по другому?

.2464. а) программа – это некоторая синтаксическая конструкция. Можно заниматься тем, что сравнивать две такие конструкции по красоте, по количеству предложений, по количеству синтаксических ошибок и т.д. Такая задача входит в круг задач программирования, но не входит в круг задач математики. Поэтому мы о ней говорить не будем.

.2465. б) программа – это есть нечто, способное воспроизводить объекты. Эти объекты по твоей терминологии составляют абстрактное множество потенциальных продуктов этой программы. Программы можно анализировать по критериям эффективности, т.е., с какой скоростью они воспроизводят эти продукты. Такими задачами математика тоже занимается, как и программирование.

.2466. в) программы можно анализировать, рассматривая свойства этих потенциальных продуктов. Такой задачей математика безусловно занимается.

.2467. Согласен ли ты остановиться на обсуждении {.2465} и {.2466}?

.2468. **Я:** Хорошо, если ты так хочешь, будем останавливаться на {.2465} и {.2466}. Хотя в пункт {.2464} ты включил такие вопросы, как «красота», «количество предложений». Понятие «красоты» программы, конечно, довольно расплывчатое, но обычно программисты достаточно одинаково чувствуют, какой из алгоритмов «красивее». И именно на такое понимание основывается, например, мое предложение «внутренне более стройной системы чисел» в медитации ЧИСЛА {.1692}. И существует же понятие «красоты математической теории». Я считаю, что это та же «красота алгоритма» (заключающаяся в его простоте, ясности и т.д.). Так что мне не хотелось бы эти вопросы навсегда выбросить из круга интересов. Во-вторых, в пункте {.2465} говорится о скорости алгоритма. Это, наверно, больше касается прикладной, вычислительной, чем «чистой» математики. Если речь идет не о реализации какого-нибудь вычисления, то математика вполне удовлетворяется применением «абстракции потенциальной осуществимости». Я хочу сказать, что этот пункт {.2465} мы как раз можем легче всего опустить.

14. Два различных тезиса

1981.02.27

.2469. **ГЕЙДЕМАН:** Итак, анализируя программы, программист рано или поздно начнет использовать средства математики. Средства анализа алгоритмов – это средства математики. У программирования вообще нет своих средств анализа алгоритмов. Так как же можно утверждать, что средства программирования лучше?

.2470. **Я:** Да, я уже понял, что это твой главный аргумент. Признаться, когда я прочитал твои возражения {.2426} – {.2433}, я даже рассмеялся: настолько причудливыми и неуместными мне они показались, хотя ты потом сказал, что это во всех диалогах первые мне возражения по существу. Как ты можешь убедиться по протоколу, я на них даже никак не отреагировал (я собирался потом о них упомянуть и показать, что они к делу не относятся), и сразу направил разговор к своей «стратегической цели»: к сравнению конкретно твоих схем и моих фрагментов на Эуклидоле, чтобы потом обобщить опыт этого конкретного сравнения. Однако ты всячески избегал этого и настойчиво возвращался к своему тезису.

.2471. Когда разговор дошел до пунктов {.2449} – {.2450}, я, наконец, сообразил, что мы просто-напросто обсуждаем каждый свой вопрос. Ты нападаешь на один тезис, а я защищаю совсем другой. Ты нападаешь на такой тезис, который я никогда не высказывал, не защищал и не собираюсь защищать, поэтому с моей точки зрения твой удар летит совершенно мимо цели. В то же время я высказывал такой тезис (и стою на нем), на который, может быть, ты и не собираешься нападать? Именно твое отношение к этому тезису я и хотел узнать при помощи своего вопроса {.2462}, от ответа на который ты уклонился. По-моему, бессмысленно так разговаривать. Но ты, видимо, этого еще не понял.

.2472. **ГЕЙДЕМАН:** Так объясни мне, раз я не понимаю, а ты понимаешь, что я не понимаю!

.2473. **Я:** Пожалуйста. Надо различать две вещи, два тезиса. Еще подводя итоги нашим ноябрьским беседам, я писал (пункт {.2301}): «*своими «схемами» конструктивисты описывают общие свойства программ*» и «*средства, которыми они это делают, хуже тех средств, которые...*» и т.д. В пункте {.2434} я это повторил: «*математики описывают алгоритмы*» и «*средства, которыми они это делают, хуже...*».

.2474. К сожалению, человеческий язык очень неточен, особенно это видно, если тезис высказан в одной фразе без эквивалентных вариантов и без всяких комментариев. Тогда легко может получиться то, что и получилось: я говорю одно, ты прочитал другое. Вот другие варианты этой же моей фразы, в том числе более развернутые:

.2475. а) «схемы» конструктивистов являются описанием, определением, воплощением общих свойств некоторых алгоритмов;

.2476. б) «схемы» конструктивистов являются описанием, записью некоторого обобщающего алгоритма, имеющего свойства, общие у многих алгоритмов;

.2477. в) при помощи своих «схем» конструктивисты описывают, записывают обобщенный алгоритм, имеющий свойства, общие у многих конкретных алгоритмов, то есть, описывают, определяют, задают сами эти общие свойства.

.2478. Таким образом, речь здесь идет именно о средствах записи алгоритмов, и именно это является предметом нашего обсуждения вопреки твоему убеждению из пункта {.2449}. Я уже говорил в пункте {.2451} и повторяю еще раз: будь то программист, будь то математик, прежде, чем приступить к анализу алгоритма, он должен этот алгоритм как можно точнее определить и записать, чтобы и он, и все другие люди с максимальной ясностью представляли, о каком же, собственно, алгоритме идет речь. Средства, при помощи которых это сделать, как я считаю, гораздо лучше в программировании, чем в традиционной математике. Вот мой тезис, на который ты можещь нападать или с которым можешь согласиться.

.2479. Надеюсь, ты понимаешь, что твои возражения {.2426} – {.2433} и {.2469} этого тезиса вообще никак не касаются. Они направлены против совсем другого тезиса, который ты прочитал в словах, упомянутых в {.2473}. Я примерно представляю путь, по которому ты пришел к этому придуманному тобой самим тезису, читая в моих словах не то, что я имел в виду:

.2480. а) Валдис пишет: «своими схемами конструктивисты описывают общие свойства программ» и «их средства хуже...»;

.2481. б) Валдис пишет: «...конструктивисты описывают общие свойства программ...» (уже не именно схемами, а вообще в своих работах);

.2482. в) но общие свойства алгоритмов, программ Кнут и другие описывают, характеризуют при помощи математики, то есть, средств математики, то есть, математических методов (комбинаторики и т.д.). А Валдис говорит, что эти средства хуже! Да как же они хуже, когда все (в том числе Кнут) их используют, когда у программирования вообще нет аналогичных средств! И пошло-поехало всё, что сказано в пунктах {.2426} – {.2433}.

.2483. Ну, скажи, разве я неправильно разгадал твой ход мыслей? Только ведь объект твоей атаки – это не мой тезис. Я говорю, что средства описания алгоритмов, то есть, средства описания того, что из себя представляют эти алгоритмы, то есть, средства их записи, в математике хуже, чем в программировании. Ты же нападаешь на тезис «математические методы в математике хуже, чем в программировании». Ничего подобного я не говорил, так что нападай на здоровье!

.2484. Итак, нужно различать эти две вещи, эти два тезиса. Обсуждать второй тезис бессмысленно, так как никто из нас его не высказывал. Остается вернуться к обсуждению моего тезиса: средства описания сущности алгоритма в математике (а именно: такие, как твоя схема из пункта {.2234}) хуже, чем аналогичные средства в науке программирования (или сделанные по их образцу мои описания на Эуклидоле).

.2485. Хоть я и не скрываю, что считаю эти средства в традиционной математике более плохими, но я, конечно, понимаю, что здесь у каждого может быть свое субъективное мнение и что всё здесь зависит от критериев оценки. Я не для кошек писал в пункте {.2462}, что могу пояснить, почему считаю программистские средства лучше, то есть, что могу изложить те критерии, по которым они получаются лучше. По-моему, именно к обсуждению критериев должен идти наш диалог (и я всё время стараюсь его туда направить).

.2486. Конечно, мы можем и не достигнуть согласия по этим критериям, и тогда разойдемся каждый при своем субъективном мнении. Это меня тоже вполне устраивает, так как в этом случае я всё равно успею изложить свои критерии и ряд аргументов в их пользу, так что читатели смогут с ними познакомиться и независимо от твоего ответа очень многие (я так думаю) согласятся со мной. Это и есть моя «стратегическая цель».

.2487. Ну, а если даже ты примешь эти критерии и тем самым согласишься со мной в том, что обсуждаемые средства в математике хуже, то это уже будет достижением моей цели даже по программе максимум.

.2488. И коль уж я довел беседу так близко к своей стратегической цели, то теперь уже не выпущу так просто тебя из когтей и попытаюсь все-таки выжать из тебя ответ на вопрос, от которого ты уклонился после пункта {.2462}:

.2489. Перед нами стоит задача описать, что из себя представляет некий алгоритм, который мы собираемся обсуждать, изучать или анализировать. Какими средствами лучше выполнить эту задачу: при помощи твоих схем или при помощи моего Эуклидола? Я все-таки жду ответа и надеюсь его получить.

15. Фортран и математика

1981.03.02
(через 3 дня)

.2490. **ГЕЙДЕМАН:** Разреши мне несколько иначе задать твой вопрос из пункта {.2489}: «Какими средствами лучше выполнить эту задачу: при помощи моего Эуклидола или при помощи какого-нибудь математического аппарата (канонические системы Поста, алгорифмы Маркова, аксиомы классической математики)?».

.2491. **Я:** Я не могу тебе ничего ни разрешить, ни запретить. Такие права я себе не узурпировал. Просто я боюсь, что это другой вопрос, а не другая формулировка того же вопроса. Хотя всё зависит от того, какое содержание вкладывать в эти слова. Фраза слишком короткая (как в свое время моя фраза: без эквивалентных вариантов и без комментариев). Поэтому я не могу пока точно определить, что именно ты имеешь в виду и подожду, что последует дальше.

.2492. **ГЕЙДЕМАН:** Итак, перед нами стоит задача описать, что из себя представляет некий алгоритм, который мы собираемся обсуждать, изучать и анализировать. Следовательно, нам нужно описать алгоритм для того, чтобы его исследовать. Действительно, желательно записать этот алгоритм с максимальной точностью. Но ты сам понимаешь, что каким бы способом не записывать алгоритм, всегда найдется некто, кто либо вообще не поймет, либо неправильно поймет, о чем идет речь. Значит, речь может идти лишь об «относительной» максимальной точности. Лично я считаю, что эта относительность как раз и связана с тем, что именно мы собираемся исследовать в этом алгоритме и каким методом.

.2493. Например: перед нами стоит задача оценить результат работы следующего алгоритма:

```
I0=10.0**5;
I=1.0;
Y=1.0;
IF I<I0 THEN DO;
I=I*Y;
Y=Y+1.0; END;
PRINT Y;
END;
```

.2494. Как его оценивать? Лишь после того, как мы запишем этот алгоритм в такой форме

.2495. $N = \min_{n} \{ n! \geq 10^5 \}$

.2496. мы узнаем, что N = 9. Так спрашивается: какой способ записи алгоритма лучше? Я отвечаю: для нашей задачи второй.

.2497. **Я:** Вот это уже другое дело. Это разговор прямо по обсуждаемой теме. Теперь мы сможем сравнить два способа (традиционный и предлагаемый мною) не только по одному примеру («схемы» или Эуклидол), но уже даже по двум. Теперь у меня, наконец, будет возможность не только более конкретно и подробно изложить свою точку зрения и свои критерии оценки таких средств, но и сравнить с твоими (так как твой пример проливает некоторый свет на те критерии и соображения, которыми руководствуешься ты).

.2498. Сначала я хочу обратить внимание на один в общем-то совсем не очевидный факт. В пункте {.2494} ты говоришь: «Лишь после того, как мы запишем этот алгоритм в такой форме...» и т.д. Насколько можно судить по этому выражению, у тебя уже нет сомнений в том, что в математических символах

.2499. $N = \min_{n} \{ n! \geq 10^5 \}$

.2500. закодирован именно определенный алгоритм, а не что-то другое, не, например, функция или что-то в этом роде, где под «функцией» понимается что-то не имеющее никакого отношения к алгоритмам. Одно это я уже считаю довольно крупной победой своего образа мышления (по крайней мере в случае этого конкретного примера), так как, насколько я могу судить, вовсе не считается общеизвестным, что за подобными математическими символами скрываются именно алгоритмы, а не что-то другое.

.2501. Теперь вернемся к твоему примеру. Ты преподнес нам описание одного и того же алгоритма на Фортране (т.е. на языке программирования так называемого «высокого уровня») и на языке традиционной математики. Поскольку ты считаешь (судя по формулировке твоих выражений), что на этом языке записан именно алгоритм, то, видимо, и по твоему мнению не будет ничего страшного в том, чтобы называть этот язык традиционной математики каким-то алгоритмическим языком «сверхвысокого» уровня. Если ты действительно так считаешь, то мы просто-напросто единомышленники в данном вопросе.

16. Подпрограммы математики

1981.03
(раньше на 0 месяцев)

.2502. Как ты понимаешь, этот алгоритм можно описать и на том или ином ассемблере, то есть – на языке «низкого уровня». Таким образом, вообще мы имеем дело с языками трех уровней (конечно, такое деление условно, границы между этими «уровнями» могут оказаться весьма расплывчатыми).

.2503. Хотя ты недавно утверждал, что никто, кроме тебя, до сих пор не задавал мне вопросов по существу, но в конце концов мы оказались перед обсуждением такого вопроса, который уже рассматривался в диалоге МЕТАТЕОРИКА {.985}.

.2504. Там я уже изложил свою общую идею построения Эуклидола: начав с языка самого низкого уровня (с ассемблера Эуклидола – с аппарата АЛГОРИТМ) при помощи его (и вообще предыдущих уровней) определить блоки (или конструкции языка) всё более и более высоких уровней, вплоть до такого уровня, который соответствовал бы уровню языка традиционной математики.

.2505. Поскольку, как я считаю (и как, судя по твоим выражениям, считаешь и ты), язык традиционной математики – это алгоритмический язык очень высокого уровня, то в такой идее постепенного определения всё более крупных блоков нет ничего принципиально невозможного. Ситуация здесь примерно такая же, какую мы наблюдаем в отношениях ассемблера и, например, того же Фортрана.

.2506. На языке типа Фортрана мы можем написать какой-нибудь оператор (или встроенную функцию и т.д.). Но в результате выполнения этого оператора (или встроенной функции и т.д.), как ты хорошо знаешь, будет вызвана та или иная подпрограмма, состоящая в конечном счете из машинных команд. Таким образом, наиболее точным и исчерпывающим описанием данного оператора (или функции) высокого языка будет текст данной подпрограммы (как правило, на языке более низкого уровня).

.2507. Таким образом, ты имеешь возможность, пока тебе удобно, писать свои операторы и функции на языке высокого уровня, но, если у тебя появляются какие-то недоразумения и неясности, то ты (при наличии хорошей документации, разумеется) можешь взять текст соответствующей подпрограммы на ассемблере и разобрать интересующее тебя место более крупным планом.

.2508. Моя идея заключается в том, чтобы создать в математике аналогичное положение: чтобы ты мог пользоваться символикой, по уровню соответствующей уровню традиционного языка математики, но чтобы при этом ты всегда имел возможность опускаться к уровням всё более и более низким для уточнения деталей и рассмотрения более крупным планом тех или иных, вызвавших недоразумения или неясности, вещей.

.2509. Таким образом, мое первое обвинение в адрес традиционных средств описания алгоритмов в математике заключается не в том, что этот язык очень высокого уровня (ведь своим приведенным примером ты показывал не что иное, как то, что такой язык сверхвысокого уровня предоставляет много удобств, особенно при анализе алгоритма). Не в высоте уровня я обвиняю язык математики, а в том, что отсутствуют средства, позволяющие в случае необходимости обратиться к более низким уровням для уточнения, выяснения, более точного определения тех или иных вещей.

.2510. Из-за отсутствия таких средств, позволяющих разобрать более крупным планом те или иные вещи, в математике и появляется место для неточных понятий, расплывчатых суждений и «проблем», вроде проблемы континуума. В то же время добавление таких «средств низкого уровня» к языку математики, как я думаю, абсолютно никак не может угрожать ни удобствам языка сверхвысокого уровня, ни вообще всему тому ценному, что мы в математике имеем. Оно может угрожать только некоторым темным и неясным местам в математике (которые, конечно же, в приложениях математики нигде не используются и, естественно, не могут использоваться). А от удаления таких мест математика может только выиграть.

.2511. Теперь ты и получаешь ответ на свое возражение: оно никак не противоречит моему тезису, так как на полном Эуклидоле (или аналогичном языке) ты при помощи его «высоких» аппаратов получаешь возможность говорить и писать на столь же удобном (или еще более удобном) для тебя языке.

.2512. А то, что в этом языке сделано «по образцу средств современной науки программирования» – это стопроцентная определенность вплоть до уровня «машинных команд».

17. Язык нового типа

1981.03

.2513. Правда, это только первое, но не последнее заимствование у «средств науки программирования».

.2514. Второе связано с идеей машинного контроля текстов, написанных на этом языке, провозглашенной еще в {.601}. Согласно этой идее для всего, написанного на таком языке, от уровня ассемблера до самых сверхвысоких блоков и конструкций, должна существовать возможность ввести это в машину и подвергнуть машинной обработке (причем не в машину будущего, способную читать написанное от руки, а в реальную машину сегодняшнего дня).

.2515. Кроме того, что написание трансляторов и интерпретаторов для такого языка волей-неволей заставит разработчиков языка до последних мелочей определить смысл тех или иных конструкций языка, которые иначе можно было бы и обойти, опять оставляя место для неопределенности и разночтения, – кроме этого от машины можно получить много услуг, в принципе таких же, какие получают от современных трансляторов современные программисты. Это, например, выявление части ошибок и опечаток, составление списков терминов, перекрестных ссылок, автоматическая корректировка и редактирование текста теории и т.д.

.2516. Требование «должна существовать возможность всё ввести в машину» сразу накладывает очень сильные ограничения на конструкции языка и немедленно выбрасывает за борт практически всю символику традиционной математики. Так, например, за бортом оказывается и то, что ты написал в пункте {.2494} (но не потому, что это очень высокий и очень удобный уровень, а потому, что это невозможно ввести в машину: необходимо это заменить чем-то столь же «высоким» и столь же удобным, но таким, чтобы это можно было дать «почитать» машине).

.2517. Реально это (при современной технике) означает, что разнообразная и «многоэтажная» символика математики должна быть заменена линейными рядами значков строго ограниченного алфавита. Это и есть то второе, что предлагаемый мною язык (или, точнее, тип языков) заимствует у «средств современной науки программирования». Я думаю, что и это никак не может угрожать ни «высоте уровня» языка математики, ни, тем более, содержанию математических идей.

.2518. Конечно, иногда нелинейное размещение математических символов и применение всевозможных, бросающихся в глаза значков, могут помочь при чтении человеком письменного математического текста. Но я думаю, что в подавляющем большинстве случаев здесь дело исключительно в привычке, а не в чем-то объективном, и что если бы нас с детства учили не многоэтажным, а линейным математическим формулам, то мы бы читали их так же легко и непринужденно, как теперь читаем линейный текст, состоящий из букв европейских алфавитов, а не из «многоэтажных» и разнообразных иероглифов.

.2519. И если традиционные нелинейные формулы и иероглифоподобные значки и имеют какие-то преимущества перед «скучными» рядами символов современных алгоритмических языков, то мы оказываемся перед выбором: либо эти преимущества (если, конечно, они вообще имеются), либо возможность машинной обработки теорий. И тут для меня нет никакой проблемы: я ни секунды не задумываясь жертвую эти ничтожнейшие преимущества ради приобретения такого грандиозного преимущества, как возможность говорить с машиной прямо на языке математики (ведь если математика откажется от традиционного языка, то этот новый, машиночитаемый язык и будет собственно языком математики).

.2520. Надо также различать средства именно Эуклидола и средства вообще языков подобного типа. Эуклидол я разрабатывал один, и вынужден был по возможности экономить труд. Для облегчения синтаксического анализа я в нем использовал весьма однообразные конструкции типа A(B,C), то есть: операнд и заключенные в скобки операнды. Не надо думать, что аналогичными недостатками должны обладать вообще все языки этого типа. Нет, можно использовать какие угодно конструкции, но при одном условии – чтобы это можно было ввести в машину. Если машины когда-нибудь станут «умнее» и смогут «понять» и нелинейные комбинации знаков и большее количество различных разновидностей знаков, то всё это сразу можно будет использовать и в языках типа Эуклидола.

.2521. И еще одно: по моему убеждению человек, читая текст (или формулу и т.д.) проводит в принципе такой же его синтаксический (и семантический) анализ, какой проводит машинный транслятор. Следовательно: сложность или простота машинного транслятора – это показатель и той нагрузки, тех усилий, которые приходится приложить при анализе текста также и человеку. Значит, если мы изберем для языка такие конструкции, которые легче поддаются машинной трансляции, то, как правило, облегчим работу и человеку при чтении и понимании написанного.

.2522. Из всего сказанного можно вывести те критерии, по которым я оцениваю средства описания теорий и по которым традиционные средства математики уступают тем, которые я предлагаю:

.2523. а) количество уровней рассматриваемого языка;

.2524. б) возможность машинной обработки прямо на рассматриваемом языке;

.2525. в) простота синтаксического и семантического транслятора с рассматриваемого языка.

18. Конец диалога

1981.03.05
(через 0 месяцев)

.2526. **Я:** Итак, вернемся к тому, что сказал ты. От прямого сравнения твоих «схем» и моих фрагментов на Эуклидоле (в качестве двух примеров средств самого «низкого» уровня, самых начальных, с которых всё начинается), от этого сравнения ты всё же уклонился (ты мог бы сказать: «схемы лучше, и всё тут!», и я тогда ничего не мог бы с тобой сделать, мы бы разошлись каждый при своем мнении. Но твое упорное бегство от ответа позволяет мне теперь намекнуть моим читателям, что в глубине души-то, видимо, ты считаешь описание на Эуклидоле лучше: точнее, яснее, проще и т.д.).

.2527. Вместо этого ты сравнил фрагмент на Фортране и средства математики. Это тоже летит мимо цели, так как в данном случае со средствами математики надо сравнивать самые «высокие» аппараты Эуклидола (правда, их пока у меня нет).

.2528. Текст, аналогичный твоему примеру из пункта {.2494} на Эуклидоле мог бы выглядеть, например, так (это только пример, а не обещание, что в точности так оно и будет):

NN = min n (n! GE 10**5)

.2529. Вот, с подобной записью и надо сравнивать твой пример, а не с фрагментом на Фортране. Здесь мы и имеем обещанный второй пример сравнения Эуклидола и традиционного языка математики.

.2530. **ГЕЙДЕМАН:** Прежде всего, я хочу объяснить, почему я уклоняюсь от обсуждения «схем». Всё очень просто. Дело в том, что схемы – это только один кирпичик из фундамента конструктивной математики. А про конструктивную математику я пока что знаю очень мало. Мне кажется, что нельзя говорить о схемах, ничего не зная о других основаниях конструктивной математики. Поэтому я и избегаю обсуждения схем.

.2531. **Я:** То, что ты написал в пункте {.2234} – это вполне самостоятельное описание алгоритма, имеющее такой же статус в построениях конструктивистов, какой статус имеют упомянутые описания алгоритмов на Эуклидоле в моих построениях. Именно такие, «выполняющие одинаковую работу», вещи и надо сравнивать, как ты это признал в пунктах {.2445} и {.2449}. А «другие основания конструктивной математики» надо сравнивать с соответствующими «другими основаниями» моей концепции.

.2532. С тобой, Гарик, очень трудно спорить. С тобой ни о чем невозможно договориться. Это знают все, кто имел удовольствие спорить с тобой. Но это не потому, что ты выдвигаешь сокрушительные аргументы и моментально разбиваешь все доказательства противника. Теперь я знаю, почему это. Это потому, что ты постоянно подменяешь один вопрос другим. Ты никогда не читаешь и не слушаешь собеседника внимательно, вдумываясь в каждое слово. Ты лишь быстро скользишь глазами по тексту и читаешь там не то, что там написано, а то, что тебе самому почудилось. Столь же неточны и поверхностны и твои собственные слова (см., например, {.2458} – {.2459}).

.2533. В пункте {.2426} ты объявляешь, что моя стратегическая цель: «*заставить тебя обсуждать*...». Ты подменил здесь мои слова своими. В пунктах {.2450} и {.2451} я объясняю, что именно средства записи алгоритмов хуже в математике по сравнению с программированием, и что именно это является предметом нашего обсуждения, а ты, как ни в чем не бывало, в пункте {.2469} снова говоришь не о моем, а о подмененном тобой тезисе.

.2534. На поставленные вопросы ты упорно не отвечаешь и опять (уже третий раз!) во что бы то ни стало хочешь возвратиться к своему тезису о том, что сравнивать с ассемблером Эуклидола надо «другие основания математики», ее методы и т.д., то, что составляет ее содержание, а не ее средства изложения, не язык.

.2535. Письменные диалоги имеют то преимущество, что всё зафиксировано, и я могу указать: вот здесь ты сделал не то, что надо, вот здесь и здесь!...

.2536. Боюсь, что ты неисправим и что впредь ты будешь спорить в такой же манере. Но мне жалко тратить свое время на выяснение того, где ты с характерной для тебя поверхностностью подменил одно другим. Поэтому извини, если я когда-нибудь откажусь вдаваться в споры с тобой, как письменные, так, тем более, устные, в которых вообще никаких концов не найдешь.

.2537. Я вижу, ты опять собираешься писать мне что-то в длинном послании и хочешь искать в энциклопедии, что означает слово «алгоритм». В пункте 5 «Вызова на дуэль» {.155} я писал о диалогах, что так это будет продолжаться «...до тех пор, пока один из нас не откажется от слова». Таким образом, каждый из нас имеет право в любой момент прервать диалог. Я предупреждаю, что намерен после твоего выступления воспользоваться этим своим правом.

.2538. Своей «стратегической цели» я уже достиг: я изложил свои взгляды по вопросу о сравнении традиционного языка математики и Эуклидола, изложил критерии сравнения, пояснил план Эуклидола. Это и есть то положительное, что, на мой взгляд, имеется в этом протоколе нашего диалога. В продолжении этой дискуссии я не заинтересован.

.2539. Поэтому я советую тебе просто-напросто в двух словах высказать твое отношение к моему проекту создания описанного выше многоуровневого языка:

а) можно ли его создать?
б) нужно ли его создавать?

.2540. Безо всяких словоизлияний: «можно или невозможно», «нужно или не надо»?

.2541. **ГЕЙДЕМАН:** Любая попытка устранить неопределенности в математических рассуждениях, по-моему, должна приветствоваться. Несмотря на то, что у меня есть сомнения относительно успешности создания такого многоуровневого языка, опираясь лишь на возможности современной науки программирования и не выбрав в качестве основы какую-нибудь формальную логическую систему (классическую, конструктивную, интуиционистскую или свою собственную), я считаю, что ты делаешь интересное, громадное по объему и важное дело.

.2542. **Я:** Тебе в этих диалогах досталось бы гораздо меньше, если бы ты на практике руководствовался бы таким мнением.

1994.06.04 23:17 суббота
(через 13 лет, 2 месяца, 30 дней)

.2543. Окончание этого диалога в оригинальном (машинописном) сборнике «О природе чисел», с которым я в начале 1980-х годов «шел в народ», было несколько фальшивым. Гейдеман действительно однажды говорил примерно то, что сказано в {.2541}, но это был всего лишь один эпизод где-то среди многих противоположных. Это я сам сформулировал текст пункта {.2541} и поместил его в конец диалога так, будто этим всё и закончилось, – ибо мне очень не хотелось, чтобы сборник был окончательно испохаблен всей этой глупой руганью с Гейдеманом. Сам Гейдеман мой последний ответ ему (с пункта {.2531}) не читал и, конечно же, если бы прочитал, то не закончил бы диалог столь благородно, как это выглядит в пункте {.2541}. У меня было принято решение показать ему напечатанное окончание диалога только в том случае, если он сам об этом попросит (но не по моей инициативе), и не согласиться ничего в тексте менять или добавлять. Но именно в это время мы с Гейдеманом расстались; он ушел в другую лабораторию, больше не сидел в моей комнате, диалоги с ним прекратились, и он так и не поинтересовался окончательным текстом последнего из этих диалогов. Мы разошлись в весьма натянутых отношениях.

.2544. Невозможно на высоком уровне спорить с человеком, который <u>не желает</u> понять сказанное тобой, а желает только одно: показать, что ты занимаешься глупостями. Тогда, в 1981 году, я думал, что мне просто не повезло с партнером и что такой стиль спора характерен только для Гейдемана в силу его особых психических и интеллектуальных особенностей.

.2545. Но оказалось, что в этом он просто был истинным и типичным математиком. Те, последующие, спорили точно так же: упорно уклонялись от честных ответов на заданные им вопросы, постоянно подменяли один тезис другим, не могли или не хотели брать для анализа именно слова противника (т.е. – в данном случае мои слова), а постоянно всё перевирали...

.2546. Всё это, к сожалению, показывает, что с людьми вообще не стоит что-либо обсуждать: – они для этого слишком глупы, причем математики, как свидетельствует мой многолетний опыт, – особенно глупая порода людей.

12. Тетрадь PK

ПК
Диалог с Паулисом Кикустом

> Non pudet physicum, id est speculatorem venatoremque naturae, ab animis consuetudine imbutis quaerere testimonium veritatis?
>
> *Marcus Tullius Cicero*
>
> (Vai kauns nav fiziķim, tas ir dabas pētniekam, meklēt taisnības pierādījumus aizspriedumu verdzinātās dvēselēs?)[12]

Написано: 1981.03, 1981.09 Рига

Медия PK (в Третьей Медиотеке метамедитация ПК) содержит материалы самой первой дискуссии Валдиса Эгле с математиками из ВЦ ЛГУ, состоявшейся после передачи им начального варианта сборника «О природе чисел».

1. Разговор с П.К.

1981.03
(раньше на 13 лет, 3 месяца)

.2547. В 10 часов утра 1981.03.03 мне позвонил П.К. (*Паулис Кикуст – ред. – кандидат ф.м. наук, преподаватель ЛГУ, заведующий отделом ВЦ ЛГУ*), сказал, что «вчера имел возможность» прочитать примерно 1/4 часть моего «сочинения» «О природе чисел» и предложил немедленно встретиться, если я заинтересован в публикации этих вещей. Мы встретились через час и провели 2 часа в беседе, как выразился П.К., «по образцу классиков» разгуливая в парке (в своей записке, приведенной ниже, он называет меня «В.Э.», и я отыгрываюсь тем, что называю его П.К.).

.2548. Объективно его предложения были весьма лестны:

а) написать для печати серию статей;
б) превратить всё это в диссертацию;
в) сотрудничать в создании искусственного интеллекта (чем П.К. занимается);
г) перейти к нему работать.

.2549. Но внешне эта беседа больше походила на отчитывание учителем школьника или начальником подчиненного. П.К. вел беседу в характерной для холериков манере энергичного человека, убежденного в правильности своих жизненных установок и в том, что иные жизненные установки – просто заблуждения, которые следует устранить.

.2550. Он упрекал меня в том, что я

.2551. а) пишу не научные работы, а какую-то там медиотеку;

.2552. б) трачу время на споры с невеждами (к тому же еще на письменные споры);

.2553. в) работаю в дурацком заведении, где мне не оказывают никакой поддержки;

.2554. г) варюсь в собственном соку;

.2555. д) не публиковал первые части этого как только они появились, а ждал, чтобы накопилась такая куча бумаг;

---

[12] Не позорно ли для физика, то есть исследователя природы, искать доказательства истины в порабощенных предрассудками душах?

.2556. е) не читаю реферативные журналы и не знаю, что происходит в этой области в мире;

.2557. ж) не знаю, что такое PNP;

.2558. з) не считаю себя математиком;

.2559. и) не уважаю математиков;

.2560. к) пишу по-русски, а не по-латышски.

.2561. Ниже приведены его тезисы, которые были записаны на листочке, куда он заглядывал во время разговора (*оригинал записки см. в* {TRANS.2058} – *ред*.):

* * *

.2562. Читая сочинение В. Эгле «О природе чисел» 02.03.81.

.2563. Не только математики занимаются ерундой (фантазиями), но люди вообще, математики – это их частный случай. Если бы в мире была только та ерунда, что напридумали математики!... БОРЬБА с этим напрасна!

.2564. Начало НУМЕРИКИ просто великолепно. И я когда-то пытался развить счисление, опираясь на сравнение множеств, но дальше мысли, что именно это является фундаментальной операцией, не пошел.

.2565. Пока что создается впечатление, что этой работой мне предлагают недостающее мне до сих пор технически детализированное представление о происхождении абстрактного мышления. Если всё это так будет продолжаться, то работа может быть развита, а также опубликована под рубрикой «Математические вопросы искусственного интеллекта».

.2566. Любопытно, что означает утверждение «я не математик, но я программист».

.2567. Предметом математики не являются механизмы мозга, последние являются объектом исследований В.Э. Если я себя не считаю математиком, то какие я имею права определять предмет математики? В.Э. понравилось слово математика, а себя математиком называть не хочется!?

.2568. Полем деятельности В.Э. является теория мышления, и дискуссии в рамках ее надо проводить не черт знает с кем, а со МНОЙ.

.2569. Каким бы выдающимся ни был В.Э., всё же он не должен позволять себе «писать как хочу», если дает это читать другому. Так можно даже доброжелателя превратить в врага. К сожалению слишком долго В.Э. варился в собственном соку.

.2570. Считает ли В.Э. проблему PNP ерундой?

.2571. Не именно потому ли теория множеств противоречива, что она ближе всех к сущности мышления?

1994.06.04 23:59 суббота
(через 13 лет, 3 месяца)

.2572. Так началось мое общение с тогдашним ВЦ ЛГУ, нынешним Институтом математики и информатики при Латвийском Университете. Начало было многообещающим, но кончилось всё так же, как и с Гейдеманом.

.2573. В пункте {.2567} вынесен вердикт: «Предметом математики не являются механизмы мозга» – вынесен, хотя Кикуст даже и не прочитал мою книгу, не говоря уже о том, чтобы ее понять. И вердикт этот обжалованию не подлежал, потому что Паулис Кикуст никогда не ошибается. Поскольку предметом математики на самом деле всё же являются механизмы мозга (точнее: алгоритмы; еще точнее: потенциальные продукты этих алгоритмов), то договориться мы не смогли.

.2574. Вообще описанные здесь события начались после того, как я сборник «О природе чисел» отослал Карлису Подниексу в ВЦ ЛГУ (но отозвался почему-то Паулис Кикуст).

2. Ответ П.К.

1981.03
(раньше на 13 лет, 3 месяца)

.2575. Здесь даются ответы на часть вопросов, затронутых в записке П.К. и в описании нашей беседы. В разговоре П.К. задал много устных вопросов, на которые не получил вразумительных ответов из-за устной формы беседы. Если он хочет получить эти ответы, то прошу задать вопросы письменно.

.2576. Ответ на пункт {.2569}: Каким бы великим ни был П.К., но всё же в пункте {.2569} высказано всего лишь его личное мнение. Мое мнение остается диаметрально противоположным. Я считаю, что «могу себе позволить» в своих личных рукописях писать как хочу, даже если я даю это читать другим. Я считаю, что и П.К. может себе позволить в своей записке писать как он хочет, например, называть моих других читателей невеждами и т.д., даже если он это дает читать мне (то есть, – другому). Я считаю, что я был бы человеком весьма низких умственных качеств, если обижался бы за это на П.К. и сделался бы его врагом. Аналогично я считаю, что тот, кто сделался бы моим врагом из-за того, что и как я написал в медитациях, вполне заслуживает простое народное, неточное, но очень красочное обозначение «дурак».

.2577. Свой тезис П.К. опровергает своим собственным поведением, так как лично он сам отнюдь не сделался моим врагом, проявляя явно доброжелательные побуждения, и тем самым показал, что он умный человек и умеет отличить, что важно и что второстепенно. По-моему, не следует думать, что никто больше из моих читателей не окажется на это способным. Ну, а если найдутся такие, кто обидится за мой стиль и станут «врагами», то – что ж поделаешь! Это неизбежно; дурак может обижаться и за то, что я на него посмотрел не так, как надо, или, наоборот, не посмотрел, как надо.

.2578. Итак, мое мнение по пункту {.2569} диаметрально противоположно мнению П.К. и, поскольку стиль медиотеки зависит только от моего мнения, то и впредь он останется таким, каким был.

.2579. Ответ на пункт {.2567}: В первом предложении пункта высказано опять не более, чем личное мнение П.К., которое противоположно моему, которое не подкреплено никакими аргументами (как, в общем-то, и мое мнение) и которое поэтому равносильно моему. Я уважаю это мнение, но остаюсь при своем.

.2580. В диалоге с Артуром я определил свою позицию: «*Вся сущность моей точки зрения состоит в том, что я предлагаю считать, что математика изучает программы этого компьютера* {.252} (..). *Я предлагаю: давайте предположим, что объекты математики – это продукты таких вот неизвестных нам программ* {.261} (..). *А ты согласился посмотреть, что из этого выйдет*» {.270}.

.2581. Таким образом, я считаю свое мнение предположением, гипотезой, произвольно принимаемым постулатом. Если бы П.К. высказывал бы свою мысль так же осторожно, как я, то он должен был бы сказать: «Предположим, что предметом математики не являются механизмы мозга...». Но я считаю, что такая осторожная форма вовсе не обязательна и что П.К. имеет полное право высказывать свои мысли и более категорично (но, естественно, такое же право имею и я).

.2582. Второе предложение пункта {.2567} мне кажется просто странным: неужели если я себя не считаю, например, поваром, то я не имею права говорить, что повара занимаются приготовлением пищи?

.2583. Ответ на пункт {.2570}: Проблему PNP ерундой В.Э. не считает, хотя не понимает пока, какое это имеет отношение к делу (*примечание 1994 года: в 1981 году я знал, что такое PNP, но теперь забыл и не могу пояснить это читателям*)[13].

.2584. Ответ на пункт {.2566}: Утверждение «я не математик» означает:

а) что я не имею математического образования;

б) что я не зарабатываю себе на хлеб математической деятельностью.

.2585. Утверждение «я программист» означает, что я зарабатываю себе на хлеб составлением программ.

.2586. Ответ на пункт {.2563}: Я не считаю и нигде не говорил, что математики занимаются ерундой. Это Гейдеман думает, что я так считаю. Но не надо путать мое мнение с мнением Гейдемана о моем мнении.

.2587. Единственное, я считаю, что в математике имеются некоторые недостаточно ясно и четко разработанные места, рассуждения в которых с моей точки зрения бессмысленны из-за своей расплывчатости и неопределенности. Но опять не надо путать мнение об этих местах с мнением о всей математике.

---

[13] **Примечание 2011.06.17:** См. {PENRO2} §4.11.

.2588. И, наконец, насчет борьбы, которая напрасна. Никакой борьбы с мнениями, противоположными моим, я не веду. Это означает, что я не ставлю себе цели переубедить других, «выбить» из них их убеждения и заменить своими.

.2589. Моя позиция, наоборот, гораздо пассивнее, чем обычно. Моя установка такова: я описываю свое мнение, и ваше дело, как на это реагировать. Меня вполне устраивает, если ваше и мое мнение будут существовать рядом.

.2590. Единственное, на что я реагирую болезненно, и где действительно вступаю в «борьбу» – это (как это было в случае с Гейдеманом) на голословные обвинения меня в глупости, нелогичности и т.д. – вообще на унижение моего достоинства. Такие попытки будут получать самый решительный (и даже резкий) письменный отпор и впредь.

.2591. Если П.К. слова о «борьбе» сказал относительно «Вызова на дуэль» {.144}, то ведь это вызов на дискуссию, на сравнение и взвешивание аргументов, только высказанный в несколько поэтичной форме. Но в дискуссии я не ставлю цели переубедить противника (хотя про себя думаю, что логичность моих аргументов должна же как-то повлиять на него). (*Какая наивность! – ред.*).

.2592. Всё это никак не противоречит и моему желанию публиковать свои мысли. Наоборот, как раз из моей установки о равноправии наших мнений вытекает, что оба они имеют одинаковое право на публикацию. И на людей, ставящих мне на пути к этому преграды, я смотрю как на лиц, отнявших у меня что-то законно мне принадлежащее. Против них я тоже могу бороться (в словах своих сочинений, конечно), но только это не имеет никакого отношения к той борьбе, о которой говорится в пункте {.2563}.

.2593. Ответ на пункт {.2551}: Каким бы странным это не показалось П.К., но я действительно считаю создание медиотеки задачей более серьезной и важной, чем публикация «научных работ». Но я думаю, что одно другому вообще-то не мешает. В любом случае на «научные статьи» я смотрю как на более бледные, слабые, серые слепки, копии, репродукции с подлинника – с медиотеки. Возможно, что П.К. не одобрит это, но в данном случае ему придется с этим мириться как с явлением природы, на которое он не может повлиять.

.2594. Ответ на пункты {.2555} и {.2554}: Я считаю, что – свое время повариться в собственном соку, и свое время – дать гласность. Ньютон и Дарвин, как известно, не публиковали свои мысли 20 лет. Я не делал попыток к этому 2 года. Значит, указанные упреки относятся к Ньютону и Дарвину в десятикратном размере.

.2595. Если у меня и возникают сомнения относительно срока, когда я вышел из «собственного сока», то только в одном плане: «не вышел ли я слишком рано?». Например, теперь П.К. может в пункте {.2567} сказать, что «предметом математики не являются механизмы мозга», и это остается столь же сильным предположением, как и мое мнение, так как у меня нет пока никаких серьезных аргументов в свою пользу. В то же время я думаю, что через несколько лет у меня такие аргументы будут, если только будет возможность продолжать работу.

.2596. Ответ на пункт {.2571}: Нет, я так не думаю. Я вообще не считаю теорию множеств противоречивой. Надо только по-настоящему разобраться в том, как обстоят дела, и никаких противоречий не будет. Все противоречия – следствие неразберихи: таково мое мнение.

.2597. Более детально это пояснить в нескольких фразах весьма трудно. Это требует знания целой (достаточно обширной) системы понятий и представлений. Без такого знания вряд ли будет понятно то, что я сейчас скажу:

.2598. Определение понятия (абстрактного множества) – это указание алгоритма (по традиции говорят: «свойства», но установить, обладает ли объект этим свойством, всё равно можно только по тому или иному алгоритму), по которому объект можно отличить от всех других объектов.

.2599. В этом свете определение «множество всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента», – это всего лишь описанный в словах кусочек алгоритма, оторванный от всего, что ему предшествует и что следует за ним. Это кусочек алгоритма, по которому можно проверить, содержит ли множество себя в качестве элемента или нет. Если так смотреть на это дело, то никакого катастрофического противоречия здесь не видно. Я именно так и смотрю, и поэтому вообще не считаю теорию множеств противоречивой.

.2600. И, наконец, относительно предложений сотрудничать и помочь в публикации, высказанных П.К. Я рад этому и благодарен П.К. за предложенную помощь. Возможности сотрудничества еще надо уточнять. При этом надо понимать, что независимо от того, как будет развиваться наше сотрудничество с П.К. и будут ли опубликованы мои мысли, я буду доводить до конца свои проекты создания Эуклидоса, Эуклидола, объяснения математики при помощи теорики и вообще создания медиотеки.

1994.06.05 12:58 воскресенье
(через 13 лет, 3 месяца)

.2601. В пункте {.2592} высказана одна очень интересная мысль. На тех, кто препятствуют публикации моих работ, я уже тогда смотрел как на «лиц, отнявших у меня что-то законно мне принадлежащее». В таком случае латвийские математики сегодня для меня не только дураки, но и воры. Такое мнение, конечно же, полностью соответствует моему внутреннему восприятию ситуации.

3. Производная от x в квадрате

1981.03.08
(раньше на 13 лет, 2 месяца, 28 дней)

.2602. (Письмо к П.К. 1981.03.08)

.2603. Надеюсь, Вы не сочли, что в своем предыдущем «Ответе П.К.», отправленном Вам 1981.03.05 (пункты {.2575} – {.2600} нашего диалога), я отстаивал свое мнение с твердостью непростительной.

.2604. Во время нашего устного разговора Вы, комментируя пункт {.2567} Вашей записки, сказали примерно следующее (точные Ваши слова теперь бесполезно искать даже в тех местах, где мы тогда ходили, так как они, вопреки моему желанию, не были записаны). Вы спросили: «Если я беру производную, то я изучаю механизмы мозга? Если я говорю, что производная от x^2 есть $2x$, то я говорю об алгоритмах мозга?». И тут же сами ответили с характерной для Вас категоричностью: «Нет!».

.2605. В диалоге с Артуром {.409} я намекнул ему на то, что он мог бы написать диссертацию о дифференциальном и интегральном исчислении в понятиях теорики. Конечно же, это на самом деле был намек на то, что я сам собираюсь написать об этом; только не диссер-, а медитацию.

.2606. Написание такой медитации входит в мои планы создания сборника «В саду математики». При этом я всё время предполагал, что объяснение моей точки зрения на этот раздел математики требует обстоятельного изложения всего предмета с самого начала и что оно невозможно на нескольких страницах.

.2607. Но во время этих выходных дней, гуляя по улицам в целях выхватить из грязного городского воздуха хоть немножко кислорода, я задумался о Ваших словах и о том, нельзя ли все-таки объяснить мою точку зрения на Вашем примере в нескольких предложениях, используя только те представления и понятия, которые изложены уже в сборнике «О природе чисел». И мне показалось, что это не совсем безнадежно. В результате появилось это новое письмо к Вам, которое, естественно, одновременно является и главой в моей медиотеке.

.2608. В главах {.336}, {.359} и {.2014} – {.2058} я приблизительно описал то, откуда, по моему мнению, появляются операции сложения, умножения и т.д., как один алгоритм (алгоритм сложения, например) устанавливает некоторое соответствие между потенциальными продуктами другого алгоритма (алгоритма изоквант или алгоритма метрических чисел).

.2609. Если Вам действительно было понятно, как в приведенных примерах алгоритм сложения связывал числа в тройки по заключенному в этом алгоритме «закону композиции», то у Вас, наверно, не будет особых трудностей в том, чтобы представить себе два других алгоритма, один из которых связывает в пары те числа, которые Вы привыкли называть x и x^2, а другой алгоритм – числа x и $2x$.

.2610. Я мог бы без всяких трудностей описать эти два алгоритма на Эуклидоле (даже в различных, но с нашей точки зрения эквивалентных вариантах), но не стану этого делать, так как это потребовало бы много времени и места, а Вы, скорее всего, это всё равно читать не будете.

.2611. Таким образом, с точки зрения теорики в ваших функциях закодировано не что иное, как алгоритмы и только алгоритмы.

.2612. Итак, мы имеем два алгоритма сопоставления чисел (то есть, потенциальных продуктов еще более ранних алгоритмов) – два алгоритма образования пар чисел: x^2 и $2x$.

.2613. Теперь у нас остается только одно: разобраться в том, что же в понятиях теорики означают Ваши слова о том, что производной от x^2 является именно $2x$, а не какая-нибудь другая зависимость, продиктованная каким-нибудь другим алгоритмом. Что, собственно, связывает эти два алгоритма: x^2 и $2x$?

.2614. Рассмотрим хорошо известный Вам процесс, в котором берутся соотношения всё более мелких разностей $\Delta y1$, $\Delta y2$, ... функции $y = x^2$ к всё более мелким разностям аргумента Δx_1, Δx_2, ... (я здесь заменил традиционные обозначения при помощи греческой буквы «дельта» и подстрочных индексов на максимально близкие обозначения, допускаемые правилами Эуклидола.[14] Это заодно может послужить примером того, за какую математическую символику я ратую, и может показать, что замена символики отнюдь не угрожает всему тому ценному, что в математике имеется).

.2615. Я здесь поставил перед собой цель очень коротко изложить свою мысль, поэтому не буду углубляться в детали этого процесса. Тому, кто согласился с тем, что сами числа являются потенциальными продуктами некоторых алгоритмов, кто и за функциями x^2 и $2x$ видит определенные алгоритмы сопоставления чисел, тому уже ничего не стоит видеть, что и этот процесс (даже традиционная математика это называет процессом) явно осуществляется по определенному алгоритму.

.2616. Итак, оказывается, что на наш вопрос «что связывает два алгоритма x^2 и $2x$?» нужно отвечать: «их связывает третий алгоритм, алгоритм получения соотношений между разностями всё более и более близких членов в материалах и продуктах алгоритма x^2. А связывает он их таким образом, что «в любой точке алгоритма x^2» «алгоритм предела» будет всё больше и больше приближаться не к чему попало, а именно к «результату алгоритма $2x$».

.2617. Как видите, я почти все словообороты в предыдущем абзаце поставил в кавычки. Это значит, что я их не считаю точными научными обозначениями. Соответствующая система терминов еще только должна быть разработана, но это, конечно, задача отдельной медитации, а не нескольких страничек письма. Здесь я только хотел показать основную идею перевода дифференциального и интегрального исчисления на язык теорики, на язык алгоритмов манипулирования конкретными множествами.

.2618. Итак: вот такие соотношения и связи в целой системе алгоритмов и их потенциальных продуктов я и вижу за словами «производной от x^2 является $2x$». Вот, поэтому я и говорю, что математика изучает алгоритмы. Чьи это алгоритмы, кто их реализует или хотя бы потенциально может реализовать? Конечно, это может сделать и Эуклидос, и другие подобные машины. Но не из-за таких машин была в свое время создана наука дифференциального и интегрального исчисления. Она была создана потому, что это мог сделать мозг человеческий.

.2619. И поэтому мне кажется более естественным говорить, что эта наука изучает алгоритмы именно мозга. А алгоритмы не могут быть реализованы одним лишь святым духом, реализация алгоритма – это процессы, протекающие в какой-то материальной системе, это работа какого-то механизма. И, конечно, алгоритмы мышления реализуются не какими попало механизмами, а именно механизмами мозга. Поэтому я говорю иногда, что математика изучает механизмы мозга, хотя обычно подчеркиваю, что речь идет именно об алгоритмах работы этих механизмов.

.2620. В свете таких вот представлений мне идея о том, что все «математические сущности» – это потенциальные продукты некоторых алгоритмов мозга (мышления) и что, следовательно, математика в целом изучает эти алгоритмы как единственное, что здесь существует реально в пространстве и времени; в свете всего сказанного мне эта мысль не кажется столь очевидно абсурдной, как Вам.

.2621. Заодно этот пример может показать мое действительное отношение к математике вообще и хоть немножко рассеять создавшееся у Вас и у других читателей впечатление, будто я считаю занятия математикой ерундой. Разве моя точка зрения (о том, что, изучая производные, мы на самом деле разбираемся в связях между потенциальными продуктами определенной системы алгоритмов), разве такая точка зрения как-то угрожает самому результату: что производной от x^2 является $2x$? Разве из моего подхода следует, что это ерунда? Что математики занимаются ерундой? Да, я считаю, что математики, изучая на самом деле такие алгоритмы, молчат о них и пользуются такой системой понятий и категорий, которая тщательно маскирует тот объект, который я считаю предметом математики. Да, я считаю, что от этой маскировки надо

---

[14] В Векордии традиционная символика восстановлена там, где это позволяют технические средства.

отказаться. Но разве это уничтожит то ценное, что имеется в математике? А если пересмотр проблемы континуума с таких позиций уничтожит эту проблему, то разве это не выигрыш для математики?

.2622. И в заключение мне хочется сказать несколько слов о той форме обсуждения моей работы, которую я в своем уме избрал, и от которой Вы так настойчиво советовали мне отказаться: о письменных диалогах.

.2623. Во время нашей устной беседы я на Ваш вопрос {.2604} не ответил Вам вообще ничего. Даже если мы разговаривали бы за столом во время обсуждения, организованного по типу «научных семинаров», я в лучшем случае мог бы сказать несколько хаотических, несистематизированных фраз. К сожалению, я не обладаю такими гениальными способностями, которые позволили бы мне в течение нескольких секунд придумать и реализовать стройный план систематизированного, в логическом порядке следования изложенного ответа, такого ответа, единственно какой я и считаю достойным Вашего внимания.

.2624. Нужно было, чтобы Ваш вопрос о производных несколько дней лежал у меня где-то в подсознании и обрабатывался там какими-то фоновыми программами, чтобы он всплыл во время прогулки и чтобы я имел возможность в спокойной обстановке изложить ответ; всё это было нужно, чтобы Вы получили ответ хотя бы такого качества, как этот. К тому же теперь мой ответ могут читать все, то есть – он ответ не только Вам, но и всем тем, у кого появились аналогичные мысли.

.2625. Мне преимущества письменного диалога кажутся настолько очевидными, что, признаться, меня несколько удивило нежелание Ваше и других читателей участвовать в таком обсуждении по причине того, что оно письменное.

.2626. Конечно, бессмысленно обсуждать в этих диалогах такие вопросы, как то, являются ли мои мысли «пустыми бреднями» или то, имею ли я право писать как хочу. Но это бессмысленно не только письменно, но и устно. И ведь не для такой болтовни я придумал аппарат письменных диалогов. Наоборот, я с самого начала пытался ограничить предмет обсуждения исключительно конкретным содержанием этой работы. И если до сих пор, к сожалению, больше обсуждалось именно то, что я не считаю подлежащим обсуждению, то не моя в этом вина.

.2627. Конечно, ориентация на письменные диалоги не исключает и оперативного устного выяснения каких-то недоразумений, недопонятых вещей, в общем: мелочей. Пожалуйста, ради бога, если есть такая возможность. Но кардинальные, важные вопросы всё равно надо обсуждать письменно: здесь я остаюсь при своем мнении.

4. Второй разговор с П.К.

1981.03
(раньше на 0 месяцев)

.2628. 10 марта мне опять позвонил П.К. Теперь он прочитал уже весь сборник «О природе чисел» (это был вариант N4). Он сказал, что на вопросы 8 {.2785} и 9 {.2786} из «Послесловия...» он отвечает положительно и что реакция К.П. (не путать с П.К.) тоже не отрицательна. (*К.П. – это Карлис Подниекс – ред. – тоже в то время кандидат ф.м. наук, преподаватель Университета и зав. отделом ВЦ ЛГУ*).

.2629. 11 марта мы встретились с П.К. второй раз. Два моих письма он еще не получил, и его реакция на них не была известна. Он с улыбкой и со словами: «Там сказано резко, но: каков труд, такое вознаграждение» вручил мне новую записку, приведенную ниже. После этого мы обсудили план и название первой публикуемой статьи, и П.К. опять уговаривал меня перейти к нему работать. Вот текст его записки (*оригинал см. в* {TRANS.2068} *– ред.*):

* * *

.2630. 07.03.81 Читая «ЧИСЛА» В. Эгле (в «О природе чисел»)

.2631. Наконец имеется ясная и понятная декларация: «Я собираюсь остановиться там, где математика начинает». Значит утверждения В.Э. о том, что такое математика, нельзя воспринимать всерьез, о чем они сами и свидетельствуют. В.Э. претендует на то, что знает, что лежит в основе математики, какие механизмы мозга ответственны за появление математики (и не только математики). Последнее я одобряю на 100%.

.2632. Я абсолютно согласен со следующим:

> «...тот..., кто вместе со мной думает, что ключ к пониманию природы чисел нужно искать в человеческих алгоритмах отражения внешнего мира, тот со всей отчетливостью должен понимать, что нет «настоящих» чисел, что различные системы чисел можно создавать...» {.1841}.

.2633. В то же время я категорически отвергаю сказанное в следующем предложении: «*Четкое осознание этого факта я считаю первым значительным специфически математическим результатом...*».

.2634. Немножко дальше опять:

> «Геометрия Эвклида – это не что иное, как набор алгоритмов, а именно: тех алгоритмов, по которым человек создает у себя представление о пространстве. Открытие геометрии Лобачевского и других неэвклидовых геометрий – это на самом деле открытие того факта, что могут быть и другие алгоритмы восприятия пространства, похожие, но вместе с тем отличающиеся» {.1842}.

Первое предложение – чистая ерунда, второе предложение – чистая правда.

.2635. А я думаю, что в основе традиционной арифметики лежат встроенные, а не придуманные алгоритмы (правда, это утверждение не категорично).

.2636. Что бы не думал В.Э., но 19 глава («Дилетанты и профессионалы» {.1910}) – это собрание глупостей.

.2637. Если В.Э. хочет публиковаться, то он должен составить очищенный от глупостей список тезисов своей работы.

.2638. В.Э. не единственный в этом деле и далеко не первый. Почему, например, о конструктивизме он узнает от какого-то Г. после того, как его работа уже закончена?! (К тому же Г. и сам узнает это в последнюю минуту).

.2639. С конструктивизма и т.п. надо было начинать, добавляя, что нас интересуют и механизмы мозга. И этот «козырь» никто даже не собирается отнимать!

1994.06.05 01:07 ночь на воскресенье
(через 13 лет, 3 месяца)

.2640. В пункте {.2637} был вынесен новый вердикт, который также не подлежал обжалованию (и со временем только ужесточался): чтобы что-то публиковать, я должен сперва свою работу «очистить от глупостей» (т.е. – выбросить из нее всё ценное). Конечно, на самом деле никаких глупостей в моем сочинении нет. Каждое свое слово я могу защитить (и защитил) так, как свои слова не мог защитить никто из моих оппонентов. Поэтому подобное условие публикации было для меня неприемлемым и фактически означало запрет публикации. Предложениями Кикуста я так и не воспользовался.

5. Ответ П.К. на вторую записку

1981.03
(раньше на 13 лет, 3 месяца)

.2641. Ответ на пункт {.2638}. В.Э. не думает, что он единственный и первый в этом деле. Он только думает, что имеет самостоятельную и ни у кого не позаимствованную систему представлений и что из этой системы представлений вытекают некоторые такие выводы, о которых он нигде и никогда не слышал, хотя предполагает, что должен был бы услышать из учебников, энциклопедий и популярных книг, если бы эти выводы были бы общеизвестны.

.2642. До 32-летнего возраста В.Э. не предполагал, что когда-то займется математикой и поэтому ею абсолютно не интересовался и был знаком с ней только в объеме школьного и университетского (для инженерных специальностей) курсов математики. Знакомство со взглядами конструктивистов эти курсы не включали. Это объясняет, почему В.Э. узнал о них только от Г. В.Э. это никогда не скрывал и, наоборот, даже выслушивал упреки за то, что «не считает себя математиком» {.2558}.

.2643. В.Э. пришел к проблемам математики несколько неожиданно для самого себя, пришел в результате размышлений, которые он и сам считал чисто философскими, и очутился перед лицом математиков без обширных знаний в этой области, но с самостоятельным, четким и твердым мнением. В.Э. считает, что теперь бесполезно обсуждать хорошо это или плохо, что на это следует смотреть как на причуду судеб человеческих и говорить стоит лишь о том, что делать дальше.

.2644. Ответ на пункт {.2639}. Я думаю, что вообще в мире, при изложении тех или иных взглядов допустимы различные способы. Сам я отдаю предпочтение следующему способу изложения (и применяю его повсюду в медиотеке, в том числе и в этом сборнике в качестве основного):

.2645. а) сначала в положительной форме изложить свои взгляды;

.2646. б) потом сравнить их с другими – будь то критика других, будь то указание на параллели.

.2647. Поэтому скорее сравнения и параллели в текстах собственно самих медитаций следует считать чем-то ненормальным, нежели так думать о вынесении разговора о конструктивистах в «мета-» медитацию.

.2648. Но принципы, применяемые в построении медиотеки, не исключают употребления иных принципов в работах для печати.

.2649. Ответ на пункт {.2636}. Утверждение пункта {.2636} ложно, если математика действительно изучает алгоритмы, и истинно в противном случае.

.2650. Ответ на пункт {.2631}. Слова этой «декларации» взяты из главы ЧИСЛА,2 {.1708} («Цели медитации ЧИСЛА»). Она касается именно этой медитации, а не моих планов вообще. Но эти слова встречаются вовсе не «наконец». Для того, чтобы прочитать аналогичную «декларацию», не надо было идти до последней медитации сборника. Уже в «Предисловии сборника О природе чисел» {.117} имеются слова: «*Таким образом, темой настоящего сборника является еще не какая-то область математики, а область, предшествующая математике*». Темой следующего сборника (я намерен назвать его «В саду математики») будут уже отдельные области математики. Об этом также объявлено (в ЧИСЛА,34 {.2149} и в «Послесловии сборника О природе чисел» {.2774}).

.2651. Многие места в этих медитациях, конечно, сделаны с учетом не только того, что сказано в первом сборнике, но также и с учетом того, о чем я намереваюсь говорить во втором. Такие «ссылки вперед», разумеется, пока должны выглядеть как голословные и ничем не подтвержденные заявления. Поэтому я и (см. пункт {.2595} этого диалога) сомневаюсь: не слишком ли рано я ознакомил первых профессионалов со своей работой? Не надо было ли подождать еще два года, пока будет готов и сборник «В саду математики»?

.2652. Из пункта {.2631} не совсем ясно, что же, собственно, П.К. одобряет на все 100%, и что «нельзя воспринимать всерьез».

.2653. Ответ на пункт {.2633}. В устном разговоре я спросил П.К., считает ли он «специфически математическим результатом» само появление неэвклидовых геометрий и само создание геометрии Лобачевского (не говоря о внутренних их теоремах и т.д.). П.К. ответил, что не считает.

.2654. Таким образом, здесь просто вопрос терминологии: называть ли появление идеи о возможности многих геометрий (и многих числовых систем) результатом внутри- или вне-математическим. Такие вопросы я считаю несущественными.

.2655. Если же П.К. считает появление многих геометрий событием незначительным (всё равно внутри- или вне- математическим), то его мнение резко расходится с мнением авторов десятков книг, которые рекламируют появление идеи о возможности неэвклидовых геометрий как событие чрезвычайно важное для математики.

.2656. Если П.К. считает создание неэвклидовых геометрий событием значительным, а осознание факта множественности числовых систем событием незначительным для математики, то я могу только сказать, что это его право, но что я согласиться с ним не могу.

.2657. Если П.К. считает осознание множественности числовых систем результатом значительным, но не принадлежащим мне, то у меня сразу появляется вопрос: почему я об этом (значительном) результате нигде ничего не слышал ни в энциклопедиях, ни в учебниках, ни в популярных книгах, в то время, как на рекламу неэвклидовых геометрий натыкался сплошь и рядом?

6. Эвклидова геометрия

1981.03

.2658. Ответ на пункт {.2634}. Слова {.1842} «*геометрия Эвклида – это не что иное, как набор алгоритмов*» – это, конечно, высказывание поэтичное, образное, неточное, и не следует его воспринимать буквально. Вот мой тезис, сказанный более точно: «Геометрия Эвклида – это учение о системе потенциальных продуктов тех алгоритмов мозга, которыми человек воспринимает пространство». Или: «– это учение о свойствах этих алгоритмов».

.2659. Я думаю, что и с этим тезисом П.К. сразу не согласится, поэтому поясню свою мысль немножко подробней.

.2660. Людям, которые знакомы с теорией относительности (специальной, и еще в большей мере с общей теорией относительности) и которые согласились или хотя бы смирились с ее справедливостью, должно быть ясно, что наше физическое пространство не является трехмерным эвклидовым пространством.

.2661. Такому человеку должно быть ясно, что предметом Эвклидовой геометрии, следовательно, не может быть наше реальное физическое пространство или реальные «пространственные формы» и т.д. Да, они в первом приближении совпадают, я же этого не отрицаю, но ведь совпадают-то они только в первом приближении. Так где же тот объект, который имеет в точности все свойства трехмерного эвклидового пространства?

.2662. И я отвечаю: реально такого объекта нет. В точности все свойства трехмерного эвклидового пространства вытекают только из того способа, тех механизмов, которыми человек воспринимает пространство (или аналогичных алгоритмов).

.2663. Вот перед глазами человека различные объекты: дома, деревья и т.д. Создавая у себя представление о их пространственном размещении, мозг человека, как я думаю, тем или иным способом присваивает этим объектам три характеристики (то есть, характеризует их пространственное положение тремя величинами), кодирующими положение «вправо-влево», «выше–ниже», «ближе–дальше». Я не знаю, как это происходит в деталях, но в одном я уверен стопроцентно: какой бы ни была природа этого механизма, в любом случае он имеет три независимые и свободно комбинируемые параметра-величины.

.2664. Трехмерное эвклидово пространство – это то, что можно охарактеризовать тремя свободно комбинируемыми величинами. Человеческий механизм восприятия пространства, как я думаю, характеризует пространственное положение объектов тремя свободно комбинируемыми величинами. На самом деле пространственное положение физических объектов в точности не может быть охарактеризовано тремя свободно комбинируемыми величинами. Следовательно, эвклидова геометрия (древняя, интуитивная геометрия) изучает свойства способа характеристики при помощи трех величин (то есть, того способа, который «применяется» в человеке), а не точные свойства физических объектов (конечно, этот способ достаточно пригоден для практических нужд, эти свойства довольно близки и т.д. и т.п., это всё остается!).

.2665. Вот такие картины возникают у меня перед глазами, когда я говорю, что эвклидова геометрия на самом деле изучает наши алгоритмы восприятия пространства.

.2666. А свойства вообще p-мерных эвклидовых пространств – это свойства способов характеристики p независимо комбинируемыми величинами. Свойства неэвклидовых пространств – это свойство способов характеристики при помощи уже не независимых, а тем или иным образом связанных величин. Вот мое мнение о геометриях.

.2667. По традиции говорят: «геометрия изучает обобщенные, идеализированные пространственные формы». Хорошо, хорошо, я же этого не отрицаю, я только хочу заглянуть в механизм идеализации своим взглядом строителя {.2417}, и после того, как я туда заглянул, мне традиционная фраза кажется слишком неточной и расплывчатой, и хочется сказать такими словами, какие я употребил в пунктах {.2658} и {.2664}.

.2668. Мы все знаем, какие объекты мы называем круглыми в повседневной жизни. Мы все знаем, что достаточно опуститься до молекулярного уровня, чтобы обнаружить, что наши реальные, физические «круги» вовсе не круги. Так что же такое «круг вообще», «идеализированный круг»?

.2669. Я думаю, что дела здесь обстоят в принципе так же, как и в случае со всеми другими абстрактными множествами. Любое абстрактное множество – потенциальный продукт какого-то алгоритма, любое определение абстрактного множества – это описание тем или иным способом этого алгоритма, то есть, того алгоритма, по которому можно определить, следует ли отнести данный конкретный объект к тому конкретному множеству, которое становится на место абстрактного при реализации алгоритма.

.2670. И если мы можем различать круглые объекты, то мы располагаем некоторым алгоритмом определения «круглый или нет». А «круг вообще», элемент абстрактного «множества кругов» – это в моем представлении не что иное, как потенциальный «выход» этого алгоритма, его еще нереализованный продукт. Этот алгоритм (определения «круглый или нет») может существовать в различных разновидностях (и по-разному мы можем дать определение круга), но это не меняет сути дела.

.2671. Итак, вы говорите: «абстрактный, идеализированный круг». Так я же этому не противостою. Я только пытаюсь это сказать более точно и определенно.

7. Первые итоги

1981.03

.2672. Теперь можно подвести первые итоги знакомства читателей со сборником «О природе чисел». До сих пор (середина марта 1981) два человека ознакомились с ним более менее полностью и высказали свое мнение более менее определенно. Еще более десятка знакомились частично и воздержались от каких-либо определенных комментариев.

.2673. В главе ЧИСЛА,36 {.2188} я писал: «*Все другие, оценивая мою работу, в моих глазах ставят оценку не мне, а себе, показывая свои способности понять истину*...» (на самом деле таким принципом руководствуются все самостоятельно мыслящие люди, но я только об этом объявил открыто).

.2674. Первый из двух человек, познакомившихся с этой работой – Гейдеман – в моих глазах поставил себе «2» (и получил, как я думаю, по заслугам в этих диалогах).

.2675. На формирование каждой работы неизбежно влияет тот микроклимат, в котором она создается. И моя работа не исключение. Она была бы намного менее агрессивной, содержала бы гораздо меньше нападок и вызовов в адрес математиков и меньше я расхваливал бы сам себя, если бы мне, сидя в одной комнате с Гейдеманом, не приходилось бы каждый день слушать его нытье под ухом: «...они только посмеются над тобой!...» и т.п. А ведь он же в некоторой степени олицетворял для меня тогда всех математиков (его словам, правда, я не верил, но всё же они действовали на меня). Многие резкости в адрес математиков нужно отнести лично в адрес Гейдемана.

.2676. Конечно, как мой непосредственный начальник, он в первом периоде работы позволял мне заниматься этими делами в рабочее время (позже это уже не зависело от него, а от Я. Кикутса), за что я ему и выразил благодарность {.143}. Но я думаю, что мне в общем-то не повезло тем, что во время создания сборника «О природе чисел» ближе всех ко мне оказался именно Гейдеман, а не кто-нибудь другой.

.2677. Вторым основательным читателем был П.К. Он в моих глазах поставил себе оценку «5». Несмотря на совершенно ни на что непохожую форму сочинения, несмотря на беллетристический стиль и обилие резкостей в адрес математиков, он моментально отреагировал объективно очень ценными предложениями. (*Лесть не поможет! – ред.*).

.2678. Это было гораздо больше, чем я ожидал после прогнозов Гейдемана и скептического молчания других.

.2679. Конечно, П.К. не согласился со мной во всем. Но это было бы уже чересчур. Если я правильно понял, то общая оценка П.К. такова: «В этой работе содержатся интересные мысли о связях абстрактных понятий и механизмов мозга, и практические предложения о том, как это моделировать на ЭВМ, но необоснованными являются претензии на то, что эти мысли должны оказать революционное влияние на дальнейшее развитие математики».

.2680. Я считаю такой итог очень хорошим для первой встречи с профессиональным математиком, особенно, если учесть, что все приведенные здесь оценки П.К. были высказаны до того, как он получил мои ответы и объяснения, и то, что в этом сборнике я еще не перешагнул границу «сада математики» и, следовательно, не показал еще, что означают мои заявления на практике.

1994.06.05 16:44 воскресенье
(через 13 лет, 3 месяца)

.2681. Сказанное в пункте {.2675} сегодня справедливо в стократном размере. Пятнадцать лет слушать одни издевательства – всему есть предел! – и моему терпению тоже. Сегодня уже с демонстративной, вызывающей издевкой я пишу, что математики слабоумны, а мои сочинения гениальны, рассуждения блестящи, и программы виртуозны.

8. Реакция П.К. на первые письма

1981.03
(раньше на 13 лет, 3 месяца)

.2682. 13 марта мне опять позвонил П.К. и сказал, что получил, наконец, мои первые два письма (пункты {.2547} – {.2627} нашего диалога) и что у него имеются возражения. Мое предложение самому записать их П.К. отверг со словами: «я против того, чтобы ерунду записывать». Я от всей души присоединяюсь к этой оценке, данной П.К. своим возражениям. Но я всё же по памяти записал их исключительно для того, чтобы меня нельзя было обвинить в умолчании сказанного собеседником. Вот эти возражения:

.2683. а) в пункте {.2585} я не сказал по образцу пункта {.2584}, что имею программистское образование, и это вполне справедливо, так как то образование, которое я имею, не программистское и вообще я не программист;

.2684. б) я имею право говорить, что повара приготавливают мне пищу, но я не имею права говорить о том, что́ они при этом думают;

.2685. в) публиковать нужно не мысли, а результаты.

.2686. П.К. высказал также и пояснение, что он вовсе не против письменного обсуждения кардинальных вопросов и считает публикации высшей формой такого обсуждения.

.2687. Он высказал также два более серьезных возражения:

.2688. а) предметом математики являются не только алгоритмы, но и другие «сущности» (например: если я нарисовал треугольник и изучаю его методами математики, то он тоже является предметом математики, хотя он не алгоритм и не его потенциальный продукт);

.2689. б) как я могу гарантировать, что в моей теории множеств никогда не встретятся два противоречащих друг другу, но одинаково «достоверных» утверждения, и если я такой гарантии не могу дать, то как я могу утверждать, что моя теория множеств непротиворечива?

.2690. 23 марта я позвонил П.К., чтобы попросить обещанную мне книжку К. Подниекса «Вокруг теоремы Геделя»[15] и объяснить, что вынужден прервать свою работу минимум на 2 недели в связи с тем, что моя жена находится в больнице, ребенок заболел и, как бы мне не хотелось посвящать свое время математике, у меня нет другой возможности, как отдавать большую его часть уходу за двухлетним ребенком (а тот, кто ухаживал за двухлетним ребенком, знает, что никакие интеллектуальные занятия при этом невозможны).

.2691. В этом разговоре П.К. задал мне еще два вопроса:

.2692. а) как я при помощи алгоритмов объясню дифференцирование функции Дирихле;

.2693. б) как я тем же способом объясню дифференцирование интегрального синуса {TRANS.1277}.

.2694. Я признался П.К., что не знаю, что это за функции, но обещал почитать о них и ответить.

.2695. Но я хочу напомнить, что, согласно условиям письменных диалогов {.156}, изложенным в «Вызове на дуэль», время на это у меня не ограничено.

9. Мой ответ П.К. о предмете математики

1981.03

.2696. Не знаю, соответствует ли это действительности, но в формулировке пункта {.2688} я усматриваю смягчение позиции П.К. по вопросу о предмете математики и думаю, что нам

---

[15] Подниекс К. «Вокруг теоремы Геделя». ЛГУ, Рига, 1981.

осталось только договориться о терминологии, о том, что как называть, чтобы мы уже оказались единомышленниками.

.2697. Поэтому я попытаюсь сейчас более подробно показать, как, по моему убеждению, обстоят дела с предметом математики, и пояснить, что я какими словами называю.

.2698. Согласно концепциям, о которых много говорилось в ТЕОРИКЕ {.410} (и в других местах тоже), я здесь различаю четыре основных типа объектов первого плана:

.2699. а) первый тип (реалии конкретных множеств) – это такие объекты, как нарисованный на бумаге треугольник, как четверо гусей, плавающих в пруду;

.2700. б) второй тип (номиналии конкретных множеств) – это отображения объектов первого типа в головах людей, информация о них, так или иначе закодированная;

.2701. в) третий тип – это алгоритмы обработки вторых объектов (т.е. информации о первых объектах), алгоритмы обнаружения «общего» того или иного вида между объектами первого типа (посредством их номиналий, конечно);

.2702. г) четвертый тип – это потенциальные продукты этих алгоритмов, то есть, абстрактные множества (якобы) всех объектов первого типа, имеющих данное «общее свойство» (что это за свойство, зависит от алгоритма или, иначе, это свойство, проверяемое данным алгоритмом).

.2703. В примере с треугольником объектом четвертого типа может быть, например, «множество всех треугольников». Оно «задано» свойством «фигура с тремя углами», но недостаточно рассуждать о самом этом свойстве, стоит еще поговорить и о том, как обнаружить, обладает ли объект (первого типа) этим свойством, то есть, об алгоритме определения наличия этого свойства. Всегда уточнение свойства будет на самом деле уточнением алгоритма, по которому можно установить, обладает ли объект этим свойством, или нет.

.2704. Итак – четыре типа объектов первого плана, причем в каждом типе имеется огромное множество всевозможных объектов. Дальше в принципе могут быть алгоритмы, работающие с потенциальными продуктами этих первых алгоритмов, потом опять новые алгоритмы, оперирующие с их продуктами, и т.д. со сколь угодно сложной иерархией.

.2705. Вот основная схема появления абстрактных понятий, как я это представляю. Конечно, вокруг этого «позвоночника» могут в разных направлениях наращиваться различные детали и пополнения, и это никак не противоречит моему мнению. Но эту схему я считаю основной. И основной не только в какой-то одной науке, а во всех науках вообще, то есть, – в отражении человеком внешнего мира вообще.

.2706. Теперь, не выпуская из виду этой основной схемы, давайте, разберемся, как мы вообще будем определять предмет той или иной науки, сравним предметы, например, биологии и математики и договоримся, какие термины в каких случаях будем употреблять.

.2707. Как вообще определить предмет той или иной науки? Мне кажется логичным такой подход: вот перед нами книга по данной науке. Будем считать, что высказывания, записанные в этой книге, относятся к каким-то объектам вне самой книги. Эти объекты и составляют предмет данной науки. (Конечно, этот прием не дает стопроцентной точности, так как книга, например, по физике вообще-то может что-то утверждать и относительно языка и т.д. Но я думаю, что этот прием может дать нам основную ориентацию, которой нам будет достаточно).

.2708. Теперь посмотрим, как, по моему мнению, обстоят дела с предметом биологии. Согласно приведенной выше схеме, биолог берет какие-нибудь живые существа (объекты первого типа), смотрит на них (то есть, создает объекты второго типа) и либо выделяет в них какие-то подмножества (органы), либо ищет общее у разных особей, то есть, классифицирует их. Естественно (если только мы не хотим допустить, что это биологу удается в результате божественного откровения), что и выделение частей, и поиск «общего» мозг биолога осуществляет по какому-то алгоритму.

.2709. В результате поиска общего у всех уток, биолог составляет какую-то «таблицу» признаков утки. Эту таблицу можно считать программой для некоторого интерпретатора, который может проверить любой объект: «утка или не утка?». То есть, в терминах теорики такая таблица признаков – это некоторый алгоритм (работы указанного интерпретатора), и этот алгоритм задает абстрактное множество «уток вообще».

.2710. Итак: биолог занимается в основном тем, что изучает составные части (и их взаимодействие) живых существ и создает их классификации (путем отыскивания общих признаков, свойств). В подобном случае принято говорить, что предмет такой науки находится во внешнем мире – для биологии это живые существа.

.2711. В той мере, в какой математика тоже изучает составные части внешних объектов и создает их классификации (путем отыскивания общих свойств) – в той мере было бы естественным говорить, что предмет математики – во внешнем мире. Кажется, будет лишним напоминать, что ведь именно я и ратую за то, чтобы вести начало математическим понятиям от таких вот материальных внешних объектов.

.2712. В медитации ЧИСЛА {.1837} я называл числа классификациями. Традиционные натуральные числа – это, согласно моим утверждениям, таксоны классификации внешних множеств (по мощности). Аналогично абстрактные круги, треугольники и т.д. – это таксоны классификации объектов по соответствующим свойствам.

.2713. Таким образом создание понятий числа, круга, треугольника и т.д. по своей природе совершенно аналогично созданию понятия «утки вообще», и та наука, в компетенции которой это создание входит, изучает объекты внешнего мира точно в такой же мере, как и биология, и точно таким же образом.

.2714. Теперь остается только одно: выяснить, входит ли создание этих понятий в компетенцию математики? Насколько мне известно, математика (по крайней мере традиционная), наоборот, всегда старалась отграничиться от этих вопросов и начинала свое изучение с того, что уже существуют множества чисел и т.д.

.2715. И я, как Вы знаете (см. пункт {.2650}), рассматривая вопросы возникновения этих понятий, оговариваю, что объектом моих исследований пока является область, предшествующая математике, то есть, не отношу построение первичных математических объектов к собственно математике (то есть, – я придерживаюсь здесь традиционной точки зрения).

.2716. Всё это вполне согласуется с моими утверждениями о том, что предметом собственно математики являются не непосредственно внешние объекты, а связи между различными абстрактными множествами, то есть, между потенциальными продуктами различных алгоритмов. Ну, а то, что всё начинается с внешних материальных объектов, я никогда не отрицал.

.2717. Итак: первая причина, по которой я говорю о математике, что она (в отличие от биологии) изучает алгоритмы – это то, что вещи, создающие аналогию с биологией, по традиции находятся за пределами математики. Есть и другие причины.

.2718. Второй причиной является то, что, если биология ограничивалась алгоритмами типа «утка – не утка?» и всё время «оставалась вблизи» материальных объектов, то математика начинает водружать алгоритм на алгоритме, создавая умопомрачительную их пирамиду так, что первые алгоритмы обнаружения общего в материальных объектах становятся ничтожнейшей долей всего здания. В результате, если взять книгу по математике, то почти все ее утверждения будут относиться чисто к алгоритмам, причем к алгоритмам, далеким от материальных вещей.

.2719. Это вторая причина, почему я говорю, что математика изучает алгоритмы. Есть и третья причина.

.2720. Биология, отыскивая общее, ограничивает свои «интересы» определенным подмножеством материальных объектов (живыми существами). Математика (или «предматематика»), отыскивая общее (например, между равномощными множествами), не ограничивается каким-то подмножеством материальных систем.

.2721. Это облегчает объявление предметом биологии данное подмножество материальных объектов. Если аналогичным образом поступить с математикой, то ее предметом окажется весь мир.

.2722. На самом же деле уже объявление предметом биологии подмножества «живые существа» не совсем корректно.

.2723. К чему, например, относятся утверждения книги об утках? К отдельным уткам (объекты первого типа {.2699})? К уткам вообще (объект четвертого типа {.2702})? Или к алгоритмам различения уток от всех других птиц (перечень их признаков)?

.2724. Я думаю, что невозможно здесь оторвать одно от другого, что биология занимается и отдельными утками, и утками вообще, и алгоритмами определения «утка или не утка?». И говорить об одном означает говорить и о другом.

.2725. Таким образом, по моему мнению, и биология в некоторой степени занимается алгоритмами (так как заниматься «общим» в чем-то и заниматься алгоритмами определения, нахождения этого «общего» для меня неотделимо, и друг другу не противоречит).

.2726. Так что речь идет лишь о том, что, определяя предмет биологии, традиция акцент ставит на некоторое ограниченное подмножество материальных объектов, а, определяя предмет математики, я по трем указанным причинам переношу акцент на алгоритмы.

.2727. Но вообще-то нет никакого противопоставления «либо алгоритмы, либо объекты внешнего мира», так как речь идет об алгоритмах обработки информации в конечном счете именно о внешнем мире.

.2728. Вообще, я думаю, что, если Вы согласны с моей основной схемой, то это уже главное, а остальное – лишь несущественный вопрос терминологии: как мы договоримся что называть.

10. О приложениях математики

1981.03

.2729. И, заодно, я хотел бы изложить свое мнение по еще одному, близкому к предыдущему, вопросу: о приложениях математики. Каким же чудом получается то, что, изучая алгоритмы мышления, математика позволяет так много узнать о реальных объектах?

.2730. Я попытаюсь объяснить свое мнение на примере вычисления объема пирамиды. В школьном курсе математики давалось доказательство формулы для вычисления объема пирамиды, восходящая, если я правильно помню, еще к Архимеду. Там сначала рассматривалась ступенчатая пирамида, состоящая из ряда призм, а потом высота «ступенек» бесконечно сокращалась.

.2731. Чтобы получить (измерить) объем пирамиды, можно и впрямь разрезать ее на призмы, измерять объем каждой такой призмы и т.д. То есть, за этой «ступенчатой пирамидой» я вижу действительный, реальный алгоритм нахождения (приблизительного) объема пирамиды (известен также способ-алгоритм, как полученный результат сколь угодно уточнять: надо резать всё чаще и чаще).

.2732. За общеизвестной формулой

.2733.

$$V = \frac{1}{3} Lh$$

.2734. я тоже вижу некоторый алгоритм, но алгоритм, манипулирующий числами, и такой, который сам по себе не имеет никакого отношения к объему пирамиды.

.2735. Вся суть доказательства формулы для вычисления объема пирамиды состоит в том, что доказывается некоторая связь между этими обоими алгоритмами, связь, означающая их эквивалентность в некотором смысле.

.2736. Установив эту эквивалентность обоих алгоритмов, люди получают возможность для нахождения объема пирамиды вместо первого алгоритма употреблять второй. А смысл этого «фокусничества» в том, что первый алгоритм, как правило, практически нереализуем, а второй реализуем.

.2737. И я думаю: какие бы сложные интегралы и дифференциальные уравнения вы не применяли бы для изучения физических явлений, их применяемость означает только то, что необозримая цепь доказанных эквивалентностей ведет от ваших интегралов (которые в моих глазах только различные алгоритмы манипулирования числами и другими абстрактными вещами) к алгоритмам измерения и им подобным, работающим с материальными вещами.

.2738. В этом, в замене одних (неудобных) алгоритмов другими (удобными) и в доказательстве их эквивалентности (по крайней мере эквивалентности для данной цели) на мой взгляд и кроется секрет успехов математики, секрет того, как наука, изучающая алгоритмы (или изучающая вообще неизвестно что, если Вы не признаете, что она изучает алгоритмы), как такая наука может найти столь широкое и столь успешное применение во всех областях знания.

11. Мой ответ П.К. о противоречиях

1981.03

.2739. Кроме других программ, написанных за свою жизнь, я спроектировал систему Диспетчер, которая в ИЭВТ[16] вот уже несколько лет эксплуатируется круглосуточно. Это самостоятельная операционная система (или, если хотите, системно-независимая программа) с транзитными фазами, собственной (списковой) организацией дисков и т.д. В настоящее время эта система состоит из 27 тысяч операторов Ассемблера и, согласно классификации Йодана[17] относится к разряду сложных систем (10–100 тысяч операторов). Согласно результатам машинного подсчета исходной библиотеки, я лично написал около 53% программ, в том числе такие узловые части, как супервизор ввода–вывода, супервизор файлов и макрокоманды генерации системы (кстати к пункту {.2683}: можно ли меня считать программистом?).

.2740. Так вот, я спрашиваю: есть ли в Диспетчере противоречия? Не ошибки, а противоречия. Ошибка – это когда программа делает не то, что я хотел бы, чтобы она делала. Ошибки в Диспетчере есть. А противоречия?

.2741. Я думаю, что такой вопрос просто лишен смысла. Противоречивыми могут быть утверждения. Например, рассказывая о Диспетчере, я в результате каких-то рассуждений утверждаю, что поля A и B будут перекрываться, а в результате какого-то другого рассуждения утверждаю, что поля A и B не перекрываются. Эти мои утверждения о Диспетчере противоречивы.

.2742. Согласно моим представлениям, совершенно аналогичная ситуация наблюдается в математике. Математика изучает некоторую систему алгоритмов, а «математические теории» или «математический текст» – это некоторый рассказ об этих алгоритмах и их продуктах, какие-то утверждения о них. Эти утверждения, разумеется, могут быть противоречивыми, и я вполне верю Геделю, что невозможно доказать их непротиворечивость.

.2743. Но я предлагаю в корне иной подход: давайте сначала просто запишем сами алгоритмы, которые мы изучаем, прежде, чем что-то утверждать о их продуктах! Создадим просто их листинги, которые в принципе не могут быть противоречивыми, как не могут быть противоречивыми листинги Диспетчера.

.2744. Но, разумеется, для этого сначала нужно поверить, что математика и вправду изучает некоторые алгоритмы.

.2745. Вот, такую непротиворечивость листингов я и имел в виду, когда в пунктах {.2596} – {.2599} говорил о том, что не считаю теорию множеств противоречивой.

12. Дальнейшие события

1981.09
(через 6 месяцев)

.2746. Предыдущие главы были написаны и напечатаны еще в марте, но я до сентября задержал их отправку П.К-у, таким образом на пять месяцев приостановив наш диалог (я находился в очень остром цейт-ноте, из которого не полностью выбрался еще и сейчас).

.2747. Еще в апреле мне позвонил П.К. и предложил провести в ВЦ ЛГУ семинар, на котором рассказать некоторым заинтересованным людям о своих взглядах. Мы договорились провести этот семинар осенью.

.2748. В мае и июле, оторвавшись от работ по Диспетчеру, я подготовил текст выступления, составляющий в настоящее время сборник «Лекции о математике» {TRANS.24}.

.2749. В конце июля (21–27 июля 1981 г.) мы провели в ИЭВТ у зав. лабораторией Я. Кикуста семинары, которые продолжались 5 дней по 1,5 – 2 часа каждый (значительную часть времени, правда, заняли с моей точки зрения совершенно непродуктивные споры и болтовня).

---

[16] Институт Электроники и вычислительной техники Академии Наук Латвийской ССР, где я тогда работал.

[17] Yourdon Edward. «Techniques of program structure and design». Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975. Йодан Э. «Структурное проектирование и конструирование программ». Мир, Москва, 1979.

.2750. Август я опять занимался только программами Диспетчера, а 1 сентября позвонил П.К-у, чтобы договориться о семинаре в ВЦ ЛГУ.

.2751. Сегодня, 3 сентября, я отправляю П.К-у главы с нашим диалогом в знак того, что я согласен продолжить этот диалог, если П.К. сочтет нужным что-то возразить против того, что я здесь писал.

13. Третья записка

1981.09

.2752. 7 сентября П.К. вручил мне свою третью записку, касающуюся сборника «О природе чисел» (ответ на пункты {.2628} – {.2751}). Вручение записки сопровождалось словами, из которых явствовало, что это по сути дела предложение заключить мир. Вот текст записки:

* * *

.2753. Читая послание В. Эгле с пунктами {.2628}, {.2629} и т.д.

.2754. Еще раз повторяю, что полностью одобряю сделанные В.Э. теоретические исследования мозговых механизмов.

.2755. Читая пункт {.2665} мне, наконец, становится ясно, что причины нашего взаимонепонимания имеют лишь терминологическую природу. Вот доказательство. Пункт {.2658} дает два тезиса:

.2756. – «*Геометрия Эвклида – это учение о системе потенциальных продуктов тех алгоритмов мозга, которыми человек воспринимает пространство*»

.2757. – «*...это учение о свойствах этих алгоритмов*».

.2758. С первым тезисом я абсолютно согласился уже в момент чтения, второй абсолютно отверг. Сразу после этого меня несколько удивило сказанное в пункте {.2659}. С этим отвержением дело такое. Я много занимался геометрией и много занимался исследованием свойств алгоритмов. Для меня это никогда не было одно и то же. И мне кажется, что точности ради не следовало бы терминологию делать такой, чтобы эти две вещи совпали. У В.Э. эти вещи может быть совпадают потому, что, не являясь профессиональным математиком, он никогда не занимался ни одной из них (алгоритмизация и программирование не одно и то же).

.2759. К пункту {.2641}. стиль изложения у В.Э. такой, что у меня создалось впечатление, отображенное в пункте {.2638}. Он действительно не единственный, но эти вещи далеко не общеизвестны. Читал ли В.Э. мысли Рашевского[18] о натуральных числах? Знает ли В.Э., что арифметика аксиоматизирована и что разным аксиомам соответствуют различные арифметики?

.2760. Пункты {.2658} – {.2671} могли бы служить началом публикаций, не забывая, что для специалистов всё это не ново.

.2761. Пункт {.2677} мне нравится. Еще раз осмеливаюсь предложить В.Э. перейти работать ко мне в ВЦ.

.2762. С пунктом {.2679} я практически согласен.

.2763. Было бы просто великолепно, если мы могли бы сотрудничать «В саду мозговых механизмов», а «Сад математики» В.Э. некоторое время оставил бы в покое!

.2764. Против сказанного в пунктах {.2682} – {.2751} не возражаю, жду публикации!

* * *

.2765. Ответ на пункт {.2761}. Я польщен настойчивыми предложениями П.К. и испытываю некоторую неловкость в связи с тем, что всё же вынужден отказаться. Этому есть много причин как материальных (не в философском смысле), так и идеальных (также в житейском смысле). Материальные причины состоят в наличии в ИЭВТ удобных помещений, хорошо оборудованного рабочего места (оборудованного своими силами: надо посмотреть на это, чтобы понять, что эти слова означают: я привез из дома личную мебель и т.д.). В ИЭВТ есть столовая, кафе, лес для прогулок, гораздо легче с машинным временем, особенно мне при моем положении

---

[18] Рашевский П. «О догмате натурального ряда». «Успехи математических наук», 1973, т.28 вып.4. **В.Э. 2009.01.11:** Это вообще-то ничем не примечательная статья; более того, Рашевский там говорит явные глупости (в духе того, что «очень большие» натуральные числа «не существуют»), но она почему-то очень повлияла на Подниекса и Кикуста. Спустя десятилетия, еще в XXI веке они будут снова и снова повторять эти глупости Рашевского – что натуральный ряд противоречив, непостижим и т.д.

в Институте. Здесь мне всё известно, все знакомы, здесь работают мои друзья. Я не хочу всё это терять.

.2766. Идеальные причины состоят в том, что я на том пути, по которому иду по своей инициативе, всегда был сам себе начальником, ни от кого не зависел и делал всегда то, что сам считал нужным, не взирая ни на что. Я не хочу, чтобы положение в этом смысле изменилось. Я прирожденный индивидуалист, не желающий навязывать другим свое мнение, но и не позволяющий, чтобы другие навязывали мне свое мнение. Я независимый мыслитель, одиноко идущий своей дорогой, как степной волк («Степной волк»[19] – это книга немецкого писателя Германа Хессе (Hesse 1877–1962), опубликованная в 1927 году (русский перевод в 1977, Нобелевская премия в 1946), в которой изображен яркий, классический шизоид (психологический тип, к которому принадлежу и я), который контактам с обществом предпочитает самоизоляцию и жизнь в своем собственном мире. Эта книга долго была самой популярной на Западе). Так вот, как тоже яркий представитель своего психологического типа, я не желаю иметь ни начальников, ни подчиненных, у меня могут быть только единомышленники. В настоящее время у меня именно такой статус. И у меня имеются серьезные опасения, что с переходом в ВЦ ЛГУ положение изменилось бы, так как П.К., во-первых, тоже заинтересован в этих делах (в отличие от моего теперешнего начальства, которое не вмешивается в мои дела, не касающиеся тем Института), и, во-вторых, он холерик (тоже в отличие от моего теперешнего начальника – сангвиника[20]).

.2767. Кроме того, после семинаров в ИЭВТ и ВЦ ЛГУ создалось такое положение, что именно в ИЭВТ имеется больше людей, одобряющих мою деятельность.

.2768. Таким образом, этот вопрос можно считать окончательно решенным, и я очень извиняюсь, что не оправдал надежды П.К.

.2769. Ответ на пункт {.2763}. «Сад математики» я действительно некоторое время оставлю в покое, так как в лекции ПРЕОБРАЗОВАНИЕ {TRANS.38} изложил практически все узловые моменты своих взглядов, и создание сборника «В саду математики» теперь не так актуально, хоть и по-прежнему нужно. Более актуальна теперь реализация Эуклидоса.

.2770. Относительно сотрудничества «В саду мозговых механизмов» я отвечу в новом диалоге под названием ИНТЕЛЛЕКТ {TRANS.1304}. Настоящий же диалог, видимо, можно считать законченным.

---

[19] Hesse Hermann. «Der Steppenwolf». 1927.

[20] Имеется в виду Янис Кикутс.

Послесловие сборника «О природе чисел»

1980.07
(раньше на 1 год, 2 месяца)

.2771. Итак, мой читатель, Вы познакомились со сборником медитаций «О природе чисел», с первым сборником цикла «Механика Идей». Неисправимый материалист, убежденный сторонник теории отражения, я вижу математику не такой, какой мне ее преподносили в школе. Если признаться честно, я не сомневаюсь в том, что объектами, которые изучаются в математике, в действительности являются некоторые человеческие алгоритмы обработки информации о внешнем мире, то есть, что математика – родная сестра программирования, и не сомневаюсь в том, что этот факт рано или поздно будет ясно и четко осознан всеми, и постепенно вся терминология и символика будут согласованы с этим фактом.

.2772. Перевод всего громадного здания математики на материалистические, естественные основания – дело непосильное ни мне, ни кому бы то ни было одному человеку. Подобных целей я себе не ставлю.

.2773. Более того, теорику «любил я только кстати, заодно с другими на земле», и не намерен впредь все свои силы посвящать только этим вопросам.

.2774. Но всё же свои размышления над материалистическими основаниями абстрактных наук я не считаю законченными и надеюсь, что этот сборник будет первым, но не последним. Аппарат АЛГОРИТМ не единственный и даже не главный из рабочих аппаратов Эуклидоса. Мне хотелось бы еще многие понятия разобрать таким способом, каким здесь были разобраны числа.

.2775. Работа далеко не закончена, и я хочу ее продолжить.

.2776. Я не знаю, в какой мере читатель согласился с моими методами и результатами. Если читатель вместе со мной придет к выводу, что всякая теория, как и всё сознание вообще, представляет собой отражение реального мира, что отражение – это обработка информации о реальном мире, что эта обработка не может происходить иначе, чем по определенным алгоритмам, что и в основе понятия числа лежат определенные (а именно: описанные выше) алгоритмы, и что с точки зрения анализа этих алгоритмов более естественной представляется система чисел иная, чем общепринятая сейчас, то я буду считать, что один этот результат уже полностью окупил не только те усилия и время, которые я до сих пор посвятил этим размышлениям, но также и те, которые я им посвящу в будущем.

.2777. Для того, чтобы помочь Вам, читатель, сформировать как можно более четкое и недвусмысленное отношение к этой работе и чтобы придать нашему обсуждению этого сборника больше определенности, мне бы хотелось, чтобы Вы выработали у себя ясный и однозначный ответ («да» или «нет») на следующие вопросы:

.2778. 1) Известна ли Вам такая концепция сущности чисел, которую можно было бы противопоставить описанной здесь?

.2779. 2) Нужно ли при попытке разобраться в сущности чисел исходить из рассмотрения процесса отражения?

.2780. 3) Является ли процесс отражения процессом обработки информации о внешнем мире?

.2781. 4) Должен ли процесс отражения иметь общие черты с другими процессами обработки информации?

.2782. 5) Можно ли утверждать, что в мозге действуют различные механизмы, работающие по тем или иным алгоритмам?

.2783. 6) Являются ли числа потенциальными продуктами некоторых из этих алгоритмов?

.2784. 7) Представляется ли описанная здесь система чисел более естественной по сравнению с традиционной, если исходить только из анализа алгоритмов?

.2785. 8) Имею ли я моральное право за счет общества (за зарплату) продолжать работу в этом направлении?

.2786. 9) Следует ли изложенные здесь мысли опубликовать?

.2787. Если читатель положительно ответил на два последних вопроса, то не может ли он мне высказать конкретные предложения о том

.2788. а) где и как, в какой организации и на какой должности я мог бы «официально» работать в данном направлении?

.2789. б) где и как, в каком издании, в каком объеме и в какой форме это может быть опубликовано? (Я еще раз подчеркиваю, что речь может идти не о публикации этих личных рукописей, а о работе, которую я мог бы написать на их основе специально для печати в том или ином объеме, форме и стиле).

Послесловие сборника «О природе чисел»

1982.01
(через 1 год, 6 месяцев)

.2790. Предыдущее послесловие было написано к первому варианту сборника в июле 1980 года.

.2791. Как явствует из вопросов 8 {.2785} и 9 {.2786}, заданных там, от общества я тогда хотел добиться двух вещей:

.2792. а) разрешения мне заниматься этими делами в рабочее время;

.2793. б) опубликовать мое мнение о числах (и математике вообще).

.2794. В настоящее время (январь 1982) я могу сказать, что мои цели относительно общества несколько изменились.

.2795. 1) Перестал быть актуальным вопрос о разрешении лично мне заниматься этими делами в рабочее время; я на своей старой работе могу делать это в такой мере, в какой это не мешает осуществлению других моих же проектов.

.2796. Но проектов у меня слишком много, чтобы я мог с ними в разумные сроки справиться. Поэтому для меня теперь стал более актуальным другой вопрос:

.2797. Где и каким образом, в какой организации и на каких началах я мог бы получить поддержку в виде помощников (программистов для реализации Эуклидоса, машинисток для печати моих сочинений и т.д.). Я не очень верю, что в ближайшие 5 лет получу такую помощь, будь то от государства, будь то от энтузиастов-добровольцев, но всё же я задаю этот вопрос своим читателям и призываю их подумать о том, как можно было бы мне помочь на официальных, полуофициальных или общественных началах, если, разумеется, они находят мою работу интересной и нужной.

.2798. 2) За эти 1,5 года несколько изменилось и мое отношение к публикации изложенных в этом сборнике мыслей. Как видно из помещенных здесь протоколов обсуждения сборника {.2764}, я получил предложения публиковать «очищенные от глупостей» {.2637} «теоретические исследования» {.2754}.

.2799. Но я практически отказался от этих публикаций, так как в «очищенном от глупостей» виде они не могут принести мне того решающего успеха, единственно который меня устраивает. Именно в том, что пока еще признается «глупостями», содержатся те идеи, которые в конце концов перевернут математику и поставят ее на ноги. Я по-прежнему считаю, что обладаю таким пониманием природы чисел и вообще всей математики, которое более глубоко и верно, чем понимание любого из тех, с мнением которых мне приходилось иметь дело.

.2800. Но в то же время я думаю, что материала, изложенного в этом сборнике, недостаточно для переубеждения широкой общественности. Это хорошее начало, но это только начало. Поэтому я теперь придаю большее значение продолжению работы, нежели немедленной публикации идейного содержания настоящего сборника (хотя я и не отказался бы от немедленных публикаций, если они не требовали бы выбросить самое главное).

.2801. Итак, теперь я заканчиваю этот сборник двумя другими вопросами к читателю, нашедшему идеи сборника достойными развития:

.2802. а) кто может мне помочь?

.2803. б) как можно опубликовать изложенное здесь представление О ПРИРОДЕ ЧИСЕЛ И СУЩНОСТИ ВСЕЙ МАТЕМАТИКИ?

1994.06.05 14:55 воскресенье
(через 12 лет, 5 месяцев)

.2804. Так заканчивался машинописный сборник «О природе чисел» начала 1980-х годов. Естественно, что помощи никто не предложил, а природу чисел и сущность математики, видимо, по-прежнему понимаю один лишь я.

.2805. Ну что ж. Теперь я помощи больше не прошу: сам всё сделаю, к тому же Эуклидос всё равно, кроме меня, никто не в состоянии написать, – во всяком случае так, чтобы мне понравилось.

.2806. Помочь с публикацией тоже не прошу – сам всё опубликую. Как минимум, в виде компьютерного файла: в этом передо мной нет никаких преград. Так что от Вас, мой читатель, ничего не требуется, кроме как спокойно читать всё это и потихоньку познавать истинную природу чисел, истинную природу математики и истинную природу математиков.

Индекс

Список литературы сборника NATUR

1. Аль-Хорезми Мухаммед бен-Муса. «Китаб аль-джебр валь мукабала». (Книга о восстановлении и противопоставлении). Хорезм, век 0800. (.732).

2. Гудстейн Р.Л. «Рекурсивный математический анализ». Наука, Москва, 1970. (.2355).

3. Джермейн Кларенс Б. «Программирование на IBM/360». Мир, Москва, 1971. (.1070).

4. Йодан Э. «Структурное проектирование и конструирование программ». Мир, Москва, 1979. (.2739).

5. Кнут Д. «Искусство программирования для ЭВМ, т.1. Основные алгоритмы». Мир, Москва, 1976. (.272 .281 .2280).

6. Ленин В.И. «Материализм и эмпириокритицизм». Звено, Москва, 1909. (ПСС, т. 18). (.79 .92 .93).

7. Марков А.А. «Конструктивная математика». Статья в БСЭ-3, т.13, Москва, 1973. (.2307).

8. Марков А.А. «Конструктивное направление в математике». Статья в БСЭ-3, т.13, Москва, 1973. (.2307).

9. Нечаев В.И. «Числовые системы». Просвещение, Москва, 1975. (.443 .473).

10. Плавильщиков Н.Н. «Гомункулус». Детская литература, Москва, 1971. (.812).

11. Подниекс К. «Вокруг теоремы Геделя». ЛГУ, Рига, 1981. (.2690).

12. Рашевский П. «О догмате натурального ряда». «Успехи математических наук», 1973, т.28 вып.4. (.2759).

13. Реньи А. «Диалоги о математике». Мир, Москва, 1969. (.793 .913).

14. Эвклид. «Начала». Александрия, век 09700. (.422).

15. Bombelli Raphaele. «Algebra, parte maggiore dell' aritmetica, divisia in tre libri». Bologne, 1572. (.1725).

16. Descartes Rene. «Geometrie». 1637. (.1724).

17. Gauss Carl Friedrich. «Disquisitiones Arithmeticae». 1801. (.1726).

18. Hesse Hermann. «Der Steppenwolf». 1927. (.2766).

19. Hilbert David. «Grundlagen der Geometrie». 1899. (.427).

20. Knuth D.E. «The art of the computer programming. Vol.1. Fundamental algorithms». California Institute of tehnology. Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts; Menlo Park, California; Don Mills, Ontario, 1968. (.272).

21. Swift Jonathan. «A Tale of a Tub». London, 1704. (.766).

22. Swift Jonathan. «Travels into several remote nations of the world by Lemuel Guliver first a surgeon, and then a captain of several ships». London, 1726. (.909).

23. Yourdon Edward. «Techniques of program structure and design». Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975. (.2739).

Векордия (VEcordia) представляет собой электронный литературный дневник Валдиса Эгле, в котором он цитировал также множество текстов других авторов. Векордия основана 30 июля 2006 года и первоначально состояла из линейно пронумерованных томов, каждый объемом приблизительно 250 страниц в формате A4, но позже главной формой существования издания стали «извлечения». «Извлечение Векордии» – это файл, в котором повторяется текст одного или нескольких участков Векордии без линейной нумерации и без заранее заданного объема. Извлечение обычно воспроизводит какую-нибудь книгу или брошюру Валдиса Эгле или другого автора. В названии файла извлечения первая буква «L» означает, что основной текст книги дан на латышском языке, буква «E», что на английском, буква «R», что на русском, а буква «M», что текст смешанный. Буква «S» означает, что файл является заготовкой, подлежащей еще существенному изменению, а буква «X» обозначает факсимилы. Файлы оригинала дневника Векордия и файлы извлечений из нее Вы **имеете право** копировать, пересылать по электронной почте, помещать на серверы WWW, распечатывать и передавать другим лицам бесплатно в информативных, эстетических или дискуссионных целях. Но, основываясь на латвийские и международные авторские права, **запрещено** любое коммерческое использование их без письменного разрешения автора Дневника, и **запрещена** любая модификация этих файлов. Если в отношении данного текста кроме авторских прав автора настоящего Дневника действуют еще и другие авторские права, то Вы должны соблюдать также и их.

В момент выпуска настоящего тома (обозначенный словом «Версия:» на титульном листе) главными представительствами Векордии в Интернете были сайты: для русских книг – http://vecordija.blogspot.com/; для латышских книг – http://vekordija.blogspot.com/.

Оглавление